Гарчиг

ӨМНӨХ ҮГ

Хэрэглээний математикийн орчин үеийн чиглэлүүд дотроос тоглоомын онол чухал байр суурь эзэлдэг.
1940-өөд оны үед цэрэг, дайны үйл ажиллагааг загварчлахтай холбоотойгоор тоглоомын онолын эрчимтэй хөгжил явагдсан гэж үздэг. Үүнд тулалдаж байгаа талууд нь тоглоомын этгээдүүд, байлдааны төлөвлөгөө нь талуудын стратегүүд болж өгдөг.

Нийгэм, эдийн засаг ба бизнесийн шийдвэр гаргах олон тооны бодлогууд тоглоомын онолын бодлого хэлбэрээр томъёологдоно. Түүнчлэн, бидний өдөр тутмын амьдралд тохиолддог шатар, хөзөр, покер зэрэг тоглоомууд нь тоглоомын онолын төрөлд багтдаг. Шатар нь тэг нийлбэртэй дараалсан тоглоомын ангид ордог. Дашрамд дурдахад, шатарт цэвэр стратегитэй үеийн тэнцвэр үргэлж оршин байдгийг харуулсан онолын чухал үр дүн ахисан түвшний тоглоомын онолд бий.
Америкийн эрдэмтэн Ж.Нэш нь үл эвсэлдэх тоглоомын онол, арга зүйг боловсруулж, эдийн засагт хэрэглэж харуулсанаар 1994 онд Нобелийн шагнал хүртсэн билээ.
Олигополь зах зээлийн математик загвар нь тоглоомын онол дээр суурилдаг. Жишээлбэл, монголын нефть импортлогч компаниуд нь үгсэн хуйвалдаж шатахууны үнийг жилээс жилд өсгөж байгаа нь олигополь зах зээлийн "хуйвалдах" үндсэн мөн чанарыг харуулж байгаа боловч үүний эсрэг тэмцэх торгууль ногдуулах арга зүйг тоглоомын онолоор тайлбарлаж, хэрэгжүүлдэг билээ. Тоглоомын онол нь их, дээд сургуулиудын оюутнуудын зайлшгүй судлах хичээлүүдийн нэг юм.
Энэхүү номыг их, дээд сургиулуудын хэрэглээний математик, эдийн засгийн салбарын оюутнууд, магистрант, докторант болон тоглоомын онолыг бизнес, улс төрийн шийдвэр гаргахад ашиглаж буй шинжээч, судлаач, эдийн засагчдад зориулав.

Номонд тоглоомын онолын үндэс, түүний төрөл хэлбэрүүд, тэг ба тэг биш нийлбэртэй тоглоом, олигополь зах зээлийн загварууд, Нэшийн тэнцвэр, Стакелбергийн тэнцвэр, пүүсүүдийн өрсөлдөөний динамик загвар, тогтворжилт зэргийг авч үзсэн. Ахисан түвшний тоглоомын онолоор судалдаг стохастик болон динамик, тоглоом, давталттай ба дараалсан тоглоом зэргийг энэ номонд авч үзээгүй. Тоглоомын онолыг судлахад уншигчдаас шугаман програмчлал, шугаман биш програмчлал, оптимизацийн онолын тодорхой мэдэгдэхүүнтэй байхыг бага зэрэг шаардана.
Зохиогч тоглоомын онолоор МУИС-ийн МКС ба ЭЗС-ийн оюутнуудад уншиж байсан лекцийн материал дээр тулгуурлаж уг номыг бүтээв.
Номонд тоглоомын онолын бодлого, дасгал оруулсан ба Matlab програм хангамжийг хэрхэн ашиглахыг харуулсан нэг бүлэг зориулав.
Эцэст нь тус номыг хянан тохиолдуулсан доктор С.Батбилэг, номын эхийг компьютерт бэлтгэсэн Ж.Дэлгэрхүү нарт гүн талархал илэрхийлье.

. **Зохиогч**

1 Тоглоомын онол

1.1 Тоглоомын онолын ерөнхий үндэслэл

Зөрчилдөөнт байдлыг судалдаг математикийн салбарыг тоглоомын онол гэж нэрлэнэ.
Байлдааны үйл ажиллагаа, пүүсүүдийн өрсөлдөөн зэрэг улс төр, нийгэм эдийн засгийн олон асуудлууд тоглоомын онолын хүрээнд загварчлагдаж тайлбарлагдана. Түүнчлэн шатар, даам, хөзөр, покер, волейбол ба сагс зэрэг тоглоомууд нь тоглоомын онолын элементүүд болно. Олигополь зах зээл дээр өрсөлдөж буй пүүсүүдийн ашиг нь өөрийнх нь төдийгүй бусад пүүсүүдийн үйлдвэрлэлийн хэмжээнээс хамааран тодорхойлогддог ба энэ нь тоглоомын онолоор тайлбарлагдана.

Тоглоомын онол нь зөрчилдөөний нөхцөлт байдалд хүний үйл ажиллагааны оновчтой шийдвэрийг гаргах асуудалтай холбоотойгоор үүсэж хөгжсөн. Тоглоомын онол анх дайны үйл ажиллагааг загварчлахтай холбоотойгоор 1944 оноос эхлэн математикийн бие даасан салбар болон хөгжиж ирсэн түүхтэй. Тоглоомын онолын хүрээнд дараах асуудлуудыг авч үзэн шийднэ. Үүнд:

1. Зөрчилдөөнт байдлын үед юуг оновчтой шийд гэж ойлгох бэ?
2. Оновчтой шийд цор ганц орших эсэх
3. Оновчтой шийдийн ялгарах онцлог шинж чанар
4. Оновчтой шийдийг хэрхэн олох

Тоглоомд тодорхой тооны талууд оролцож, үйл ажиллагааны буюу тоглоомын дүрмээ тодорхойлон, зорилго тус бүрийг бие биеийнхээ үйлдлээс хамааруулж хожлын функцээр илэрхийлдэг.
Тоглоомд оролцогч талууд, хүн эсвэл бүлэг хүмүүсийг этгээд гэж нэрлэнэ. Хэрэв тоглоомд 2 этгээд оролцож байвал хоёр этгээдтэй, харин хоёроос олон этгээд орлцож байвал олон этгээдтэй тоглоом гэж тус тус нэрлэнэ.

Тодорхойлолт: *Тоглоомд оролцогч талуудын үйл ажиллагааны хувилбаруудын олонлогийг стратеги гэж нэрлэнэ.*

Хэрэв талуудын стратегийн олонлог нь төгсгөлөг элементээс тогтож байвал энэ тоглоомыг төгсгөлөг тоглоом гэнэ. Хэрэв аль нэг талын стратегийн олонлог төгсгөлгүй олон элементээс тогтсон бол энэ тоглоомыг төгсгөлгүй тоглоом гэж нэрлэнэ.
Жишээлбэл, талуудын стратегийн олонлог нь $[0, 1]$ хэрчим бол энэ төгсгөлгүй тоглоом болно. Тоглоомын шинж чанараас хамаараад тоглоомыг эвсэх ба үл эвсэх тоглоом гэж хуваана.

Тоглоомд талууд гэрээ хэлэлцээр хийх боломжгүй бол үүнийг үл эвсэх тоглоом гэнэ.
Жишээлбэл, дайнд зөвхөн ялалтын төлөө тэмцэж буй талуудын үйл ажиллагаа үл эвсэх тоглоом болно.

Тоглоомын үүссэн нөхцөл байдалд талуудын аль альных нь эрх ашгийг

тусгасан гэрээ хэлэлцээр хийх боломжтой бол үүнийг эвсэлдэх тоглоом гэнэ.
Жишээлбэл, олигополь зах зээл дээр пүүсүүд тус бүрдээ хамгийн ашигтай байхаар гэрээ хэлэлцээр хийж бүтээгдэхүүний тоо хэмжээ, үнийг эвсэлдэн тогтоож болно.

Тоглоом нь тоглоомд оролцогч этгээдийн тоо, тоглоомын дүрэм ба хожлын хэлбэрээс хамааран тодорхойлогдоно. Тоглоомын хожлын шинж чанараас хамааран тэг нийлбэртэй ба тэг биш нийлбэртэй тоглоом гэж ангилна.

Хэрэв тоглогч талуудын хожлуудын нийлбэр нь тэг бол энэ тоглоомыг тэг нийлбэртэй тоглоом гэж нэрлэнэ.
Мөн түүнчлэн тоглогч талуудын хожлын нийлбэр тогтмол байдаг тоглоомыг тэг нийлбэртэй тоглоом рүү шилжүүлж болдог. Эдийн засгийн болон дайн байлдааны үйл ажиллагаатайгаар тодорхойлогдох ихэнх тоглоом нь тэг нийлбэртэй тоглоом байдаг.

Хэрэв тоглогч талуудын буюу этгээдүүдийн хожлын нийлбэр нь тэгээс ялгаатай бол энэ тоглоомыг тэг биш нийлбэртэй тоглоом гэж нэрлэнэ.
Жишээлбэл, хоёр улсын хоорондын гадаад худалдааны үйл ажиллагааг тэг биш нийлбэртэй тоглоом гэж үзэж болно. Учир нь тоглоомын эцэст 2 орон хоёулаа харилцан ашигтай худалдаа хийсэн байна. Тоглоомыг хожлын функцийн хэлбэрээс хамааран матрицан, биматрицан, тасралтгүй, гүдгэр тоглоом гэж ангилна. Матрицан тоглоом нь тэг нийлбэртэй 2 этгээдийн төгсгөлөг тоглоом бөгөөд 1-р тоглогчийн хожлын функц нь матрицан хэлбэрээр өгөгдсөн байдаг. Матрицын мөрүүд нь 1-р тоглоомын стратегийг тодорхойлох ба баганууд нь 2-р тоглогчийн стратегийг тодорхойлно. 2-р тоглогчийн хожил нь 1-р тоглогчийн алдагдлаар тодорхойлогдоно.

Биматрицан тоглоом нь тэг биш нийлбэртэй 2 этгээдийн төгсгөлөг тоглоом бөгөөд тоглогч тус бүрийн хожлын функцүүд нь матрицуудаар тодорхойлогдоно.

Хэрэв тоглогч тус бүрийн хожлын функцүүд нь тасралтгүй бол энэ тоглоомыг тасралтгүй тоглоом гэж нэрлэнэ.
Жишээлбэл, 1-р тоглогч стратеги z-ийг $[0, 1]$ хэрчмээс , 2-р тоглогч стратеги y-г $[1, 4]$ хэрчмээс сонгодог бөгөөд тоглоомын үр дүнд 1-р тоглогч $f(x, y) = x^3y^2 + x - y$ тоо хэмжээг хождог ба 2-р тоглогч ийм хэмжээг алддаг тоглоом нь тасралтгүй тоглоом болно. Тоглоомд оролцогч этгээдүүд харилцан үйлдэл хийж оролцдог ба үйлдлийн тооноос хамааран тоглоомыг нэг алхамт ба олон алхамт тоглоом гэж ангилна. Нэг алхамт тоглоом нь тоглогч тус бүрийг нэг үйлдэл хийсний дараа дуусдаг. Жишээлбэл, матрицан тоглоом нь нэг алхамт тоглоом бөгөөд тоглогч тус бүр нэгэн зэрэг стратегээ сонгож нэг нэг үйлдэл хийсний дараа хожлын хувиарлалт явагддаг. Олон алхамт тоглоомыг байрлалын тоглоом, стохастик тоглоом ба дифференциал тоглоом зэргээр ангилдаг. Байрлалын тоглоомд хэд хэдэн этгээдүүд оролцох ба ээлж дараалан стратегээ

сонгох үйлдэл хийнэ. Ийм тоглоомыг тусгай хувиргалт хийж матрицан тоглоом руу шилжүүлж болдог.
Хэрэв тоглоомын явцад тодорхой үйлдэл хийсний дараа тодорхой байрлал үүсдэг бөгөөд тодорхой магадлалтайгаар буцаж өмнөх байрлал руу шилждэг тоглоомыг стохастик тоглоом гэж нэрлэнэ.
Хэрэв олон алхамт тоглоомд талууд тасралтгүй үйлдэл хийх бөгөөд талуудын төлөв байдал нь дифференциал тэгшитгэлээр бичигддэг бол энэ тоглоомыг дифференциал тоглоом гэж нэрлэнэ. Жишээлбэл, эсрэг талуудын байлдааны 2 онгоцны хөөцөлдөөний бодлого нь дифференциал тоглоом юм. Нэг онгоцны гол зорилго нь тодорхой мужид орж ирсэний дараа нөгөө онгоцыг онилж буудах, нөгөө онгоцны зорилго нь аль болохоор зугатааж энэ мужид нөгөө онгоцыг оруулахгүй бас явдал юм.
Мэдээллийн байдлаас хамааран тоглоомыг бүрэн ба бүрэн бус мэдээлэлтэй тоглоом гэж ангилдаг.

Хэрэв тоглоомын алхам тус бүрт тоглогч бүрт өмнө нь ямар стратеги сонгож үйлдэл хийсэн нь мэдэгдэж байвал энэ тоглоомыг бүрэн мэдээлэлтэй тоглоом гэнэ.

Жишээлбэл, шатар ба даам нь бүрэн мэдээлэлтэй тоглоом болно. Учир нь тоглогч тус бүр өмнө нь ямар нүүдэл хийснээ мэдэж байж дараагийн нүүдэл хийх буюу үйлдлээ гүйцэтгэдэг.

Хэрэв тоглоомд өмнөх үйлдлийн талаар мэдээлэл байхгүй бол энэ тоглоомыг бүрэн бус мэдээлэлтэй тоглоом гэнэ.

Дурын бүрэн мэдээлэлтэй тоглоом нь цэвэр стратегийн хувьд шийдтэй байдаг.
Жишээлбэл, шатар тоглож буй талуудын хувьд үргэлж тэнцээнд хүргэдэг стратеги буюу нүүдлүүдийн оновчтой дараалал оршдог гэсэн үг юм.

1.2 Тоглоомын математик загвар

Хоёр этгээдтэй тоглоомын загвар авч үзье. A ба B олонлогууд нь 1 ба 2-р тоглогчуудын стратегийн олонлогууд болог. Тоглоомын явцад 1-р тоглогч өөрийн стратеги x-г A олонлогоос, 2-р тоглогч стратеги y-г B-ээс тус тус бие биенээсээ үл хамааран сонгоно

$$(x, y) \in A \times B, \quad x \in A, \quad y \in B.$$

(x, y) стратеги сонгосны үр дүнд 1-р тоглогч $f(x, y)$ хожил, 2-р тоглогч $\varphi(x, y)$ хожил тус тус авдаг байг. f, φ-үүд нь скаляр функцүүд болно.

$$f : A \times B \to R, \qquad \varphi : A \times B \to R.$$

Хэрэв дурын $(x, y) \in A \times B$-ын хувьд

$$f(x, y) + \varphi(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

нөхцөл биелдэг бол энэ тоглоомыг тэг нийлбэртэй тоглоом гэж нэрлэнэ.

Хэрэв дурын $(x,y) \in A \times B$-ын хувьд

$$f(x,y) + \varphi(x,y) \neq 0 \tag{1.2}$$

нөхцөл биелдэг бол энэ тоглоомыг 2 этгээдтэй тэг биш нийлбэртэй тоглоом гэнэ. Тэг нийлбэртэй тоглоомын хувьд

$$\varphi(x,y) = -f(x,y)$$

тул 2-р тоглогчийн хожил нь 1-р тоглогчийн алдагдлаар тодорхойлогдож байна.
Тоглогч тус бүрийн зорилго нь $x \in A$ ба $y \in B$-г сонгох замаар өөрсдийнхөө хожлыг хамгийн их байлгахад оршино.
$x \in A$ ба $y \in B$ гэсэн сонголт нь (x,y) гэсэн нөхцөл байдлыг үүсгэх ба энэ нь $f(x,y), \varphi(x,y)$ гэсэн хожлын функцүүдийг тодорхойлно.
Тэг биш нийлбэртэй тоглоомын хувьд $(x^*, y^*) \in A \times B$ орших бөгөөд

$$\begin{cases} f(x^*,y^*) \geq f(x,y^*), & \forall x \in A \\ \varphi(x^*,y^*) \geq \varphi(x^*,y), & \forall y \in B \end{cases} \tag{1.3}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал (x^*, y^*) стратегийг 2 этгээдтэй тэг биш нийлбэртэй тоглоомын оновчтой шийд буюу Нэшийн тэнцвэр гэж нэрлэнэ. Өөрөөр хэлбэл, Нэшийн тэнцвэр дээр тоглогч тус бүр өөрсдийн бусад стратеги дээрх хожлыг бодвол хамгийн их хожил авдаг. Мөн (1.3) нөхцлийг дараах хэлбэрт бичвэл:

$$\begin{cases} f(x^*,y^*) = \max\limits_{x \in A} f(x,y^*) \\ \varphi(x^*,y^*) = \max\limits_{y \in B} \varphi(x^*,y) \end{cases}$$

Олон этгээдтэй тэг биш нийлбэртэй тоглоом болон түүний эдийн засгийн хэрэглээг бид (3)-р бүлэгт дэлгэрэнгүй авч үзэх болно. Одоо 2 этггээдтэй тэг нийлбэртэй тоглоомын хувьд шийдийг тодорхойльё.
Энэ зорилгоор $\min\limits_{y \in B} f(x,y)$, $\max\limits_{x \in A} f(x,y)$ утгууд оршдог гэж үзье.
1-р тоглогч ямар нэгэн $x \in A$ стратеги сонгосон байг. Тэгвэл $f(x,y)$ нь 2-р тоглогчийн алдагдлын функц болох бөгөөд энэ тоглогч өөрийнхөө мэдэлд буй стратеги y-г сонгох замаар энэ алдагдлыг бууруулахыг эрмэлзэнэ. Өөрөөр хэлбэл, энэ $\min\limits_{y \in B} f(x,y)$ болно. Одоо 1-р тоглогч өөрийнхөө мэдлийн x^0-ийг сонгох замаар энэ утгыг ихэсгэхийг зорино. Иймд

$$v_1 = \min_{y \in B} f(x^0, y) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x,y)$$

$x^0 \in A$-г 1-р тоглогчийн максимин стратеги гэж нэрлэнэ. v_1 утга нь 1-р тоглогчийн баталгаат хожлыг өгнө. Өөрөөр хэлбэл, 2-р тоглогч стратегээ ямар ч байдлаар сонгоод 1-р тоглогчийн хожлыг бууруулсан ч 1-р тоглогчийн хожлын баталгаат утга нь v_1 байна.

Одоо 2-р тоглогчийн ямар нэг стратеги $y \in B$ өгөгдсөн байг. Тэгвэл 1-р тоглогч $x \in A$ стратеги сонгох замаар $f(x,y)$ утгыг ихэсгэхийг эрмэлзэнэ. Энэ утга нь $\max\limits_{x \in A} f(x,y)$ болно. 2-р тоглогч стратеги y^0-гээ сонгох замаар энэ хожлын утгыг бууруулахыг эрмэлзэнэ. Өөрөөр хэлбэл,

$$v_2 = \max_{x \in A} f(x, y^0) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x,y)$$

v_2 утга нь 2-р тоглогчийн баталгаат алдагдлыг тодорхойлно.
$y^0 \in B$-г 2-р тоглогчийн минимакс стратеги гэж нэрлэнэ.
Хэрэв $v_1 = v_2$ бол x^0 ба y^0 нь I, II тоглогчуудын оновчтой стратеги болно. $v^* = v_1 = v_2$ утгыг тоглоомын утга гэж нэрлэнэ. Ерөнхий тохиолдолд $v_1 \neq v_2$ биелэх албагүй бөгөөд тоглоомын шийд оршихгүй ба энэ нь өргөтгөсөн утгаар орших ба энэ асуудлыг дараагийн бүлгүүдэд судлах болно.

1.3 Минимакс ба максимин

A ба B нь төгсгөлөг хэмжээст вектор огторгуй R^n-ын олонлогууд болог. $A \subset R^n$, $B \subset R^n$. $f(x,y)$ функц нь вектор аргументтай скаляр утга авдаг функц. $f : A \times B \to R$.
v_1 ба v_2 хэмжигдэхүүнийг тодорхойлъё.

$$v_1 = \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x,y), \quad v_2 = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x,y) \tag{1.4}$$

Теорем 1.1 *A, B олонлогууд компакт бөгөөд $f(x,y)$ функц нь $A \times B$ дээр тасралтгүй байг. Тэгвэл v_1, v_2 утгууд оршино.*
Баталгаа. Дараах туслах чанарын функцүүдийг тодорхойлъё.

$$\alpha(x) = \min_{y \in B} f(x,y) \quad \beta(x) = \max_{x \in A} f(x,y).$$

Эдгээр функцүүд нь дурын $x \in A$ ба $y \in B$-ын хувьд тодорхойлогдоно. Функцүүд тасралтгүй гэдгийг харуулъя. Жишээлбэл, $\alpha(x)$ функцийг авч үзье. B олонлог нь компакт буюу битүү зааглагдсан олонлог тул Вейерштрассын теорем ёсоор ([11]) $\alpha(x)$ функц минимум утгаа ямар нэг $y(x)$ элемент дээр авна. Өөрөөр хэлбэл $\alpha(x) = f(x, y(x))$, $y(x) \in B$ байна.
Дурын x, $\overline{x} \in A$-ын хувьд

$$\begin{aligned} \alpha(x) = f(x, y(x)) \leq f(x, y(\overline{x})) \\ \alpha(\bar{x}) = f(\bar{x}, y(\bar{x})) \leq f(\bar{x}, y(x)) \end{aligned}$$

биелнэ. Эндээс доорх тэнцэтгэл бишийг бичиж болно.

$$f(x, y(x)) - f(\bar{x}, y(x)) \leq \alpha(x) - \alpha(\bar{x}) \leq f(x, y(\bar{x})) - f(\bar{x}, y(\bar{x})). \tag{1.5}$$

$\{x^k\} \in A$, $k = 1, 2, \ldots$, дараалал нь $\bar{x}$ руу нийлдэг дурын дараалал болог. $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = \bar{x}$. $y^k = y(x^k)$ дарааллыг байгуулъя. Тэгвэл $y^k \in B$ болох ба

B компакт тул $\{y^k\}$ дараалал нь нийлдэг дэд дарааллыг өөртөө агуулна. Жишээлбэл, $\{y^k_m \in B\}$ дараалал нийлдэг болог. $\lim\limits_{m\to\infty} y^{k_m} = \bar{y}$.
Одоо (1.5)-д $x = x^{k_m}$ гэж үзээд $m \to \infty$ үед хязгаарт шилжье. Мөн $\lim\limits_{m\to\infty} x^{k_m} = \bar{x}$ болох нь илэрхий юм.

$$f(x^{k_m}, y(x^{k_m})) - f(\bar{x}, y(x^{k_m})) \leq \alpha(x^{k_m}) - \alpha(\bar{x}) \leq f(x^{k_m}, y(\bar{x})) - f(\bar{x}, y(\bar{x})) \tag{1.6}$$

$f(x, y)$ функц тасралтгүй тул

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} f(x^{k_m}, y(x^{k_m})) &= f(\bar{x}, \bar{y}), \\
\lim_{m\to\infty} f(x^{k_m}, y(\bar{x})) &= f(\bar{x}, y(\bar{x})), \\
\lim_{m\to\infty} f(\bar{x}, y(x^{k_m})) &= f(\bar{x}, \bar{y})
\end{aligned}$$

биелнэ. Иймд (1.6) нь

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} [\alpha(x^{k_m}) - \alpha(\bar{x})] \leq 0$$

болох ба $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha(x^{k_m}) = \alpha(\bar{x})$ биелэгдэж $\alpha(x)$ функц нь $\bar{x}$ цэг дээр тасралтгүй байна. $\bar{x} \in A$ цэг нь дурын ба $f(x, y)$ тасралтгүй тул $\alpha(x)$ функц нь A олонлог дээр мөн тасралтгүй байна.
Мөн үүнтэй төсөөтэйгээр $\beta(y)$ функцийг B олонлог дээр тасралтгүй гэдгийг харуулж болно. Иймд $v_1 = \max\limits_{x\in A} \alpha(x)$, $v_2 = \max\limits_{x\in B} \beta(y)$ утгууд Вейерштрассын теорем ёсоор орших нь илэрхий болж теорем батлагдав ■.

Мөрдлөг 1.1. $F(x, y, z)$ функц нь $A \times B \times Z$ муж дээр тодорхойлогдсон ба тасралтгүй байг. A, B компакт олонлогууд. Тэгвэл

$$\mu_1(z) = \max_{x\in A} \min_{y\in B} F(x, y, z), \quad \mu_2(z) = \min_{y\in B} \max_{x\in A} F(x, y, z)$$

функцууд Z олонлог дээр тасралтгүй байна.
Одоо v_1 ба v_2 утгуудын хоорондох холбоог гаргая.

Теорем 1.2 *Хэрэв v_1 ба v_2 утгууд оршдог бол $v_1 \leq v_2$ буюу*

$$\max_{x\in A} \min_{y\in B} f(x, y) \leq \min_{y\in B} \max_{x\in A} f(x, y) \tag{1.7}$$

Баталгаа. Дурын $x \in A$, $y \in B$-г авахад $\min\limits_{y\in B} f(x, y) \leq f(x, y) \leq \max\limits_{x\in A} f(x, y)$ болох ба $\min\limits_{y\in B} f(x, y) \leq \max\limits_{x\in A} f(x, y)$ эндээс $\max\limits_{x\in A} \min\limits_{y\in B} f(x, y) \leq \max\limits_{x\in X} f(x, y)$, $\forall x \in A$ болно.
Иймд $v_1 = \max\limits_{x\in A} \min\limits_{y\in B} f(x, y) \leq v_2 = \min\limits_{y\in B} \max\limits_{x\in A} f(x, y)$ болж теорем батлагдав.
■

Жишээ 1.1. $A = B = [0,1]$, $f(x,y) = x(y+1)$, $\alpha(x) = x$, $\beta(y) = y+1$. Иймд $\max\limits_{x\in A}\alpha(x) = \min\limits_{y\in B}\beta(y) = 1$.

Жишээ 1.2. $A = B = [0,1]$, $f(x,y) = (x-y)^2$, $\alpha(x) = \min\limits_{y\in B} f(x,y) = \min\limits_{y\in[0,1]}(x-y)^2 = 0$, $\forall x \in A$, $v_1 = \max\limits_{x\in[0,1]} 0 = 0$.

$$\beta(y) = \max_{x\in[0,1]}(x-y)^2 = \begin{cases} (1-y)^2, & 0 \le y \le \dfrac{1}{2} \\ y^2, & \dfrac{1}{2} \le y \le 1 \end{cases}$$

Эндээс $\min\limits_{y\in[0,1]}\beta(y) = \dfrac{1}{4} = v_2 > v_1$.

Тоглоомын онолын үүднээс авч үзвэл $v_1 = v_2$ байх тохиолдлыг судлах нь илүү ач холбогдолтой. Учир нь тэг нийлбэртэй тоглоомд v_1 нь 1-р тоглогчийн баталгаат хожлыг, v_2 нь 2-р тоглогчийн баталгаат алдагдлыг тодорхойлдог.

Теорем 1.3 (Минимаксын тухай) *$f(x,y)$ функц нь гүдгэр компакт олонлогуудын үржвэр $A \times B$ дээр тодорхойлогдсон ба тасралтгүй байг. $f(x,y)$ функц нь дурын $y \in B$-ын хувьд x хувьсагчаар хотгор, дурын $x \in A$-ын хувьд y хувьсагчаар гүдгэр болог.*

тэгвэл

$$\max_{x\in A}\min_{y\in B} f(x,y) = \min_{y\in B}\max_{x\in A} f(x,y)$$

Баталгаа. Теорем 1.2 ёсоор

$v_1 = \max\limits_{x\in A}\min\limits_{y\in B} f(x,y) \le v_2 = \min\limits_{y\in B}\max\limits_{x\in A} f(x,y)$ биелэгдэх тул $v_1 \ge v_2$-г харуулах нь хангалттай юм.

Теоремын баталгаанд нэмэлт болгон $f(x,y)$ функцийг y хувьсагчаар эрс гүдгэр функц гэж үзье. Тэгвэл дурын $x \in A$-ын хувьд

$$\alpha(x) = \min_{y\in B} f(x,y) = f(x, y(x))$$

байх цор ганц $y(x) \in B$ оршино. Одоо $y(x)$ вектор функцийг A дээр тасралтгүй гэдгийг харуулъя. Эсрэгээс нь баталъя. Жишээлбэл, дор хаяж нэг цэг болох $\overline{x} \in A$ дээр функц тасралттай гэж үзье. Тэгвэл $\bar{x}$ цэг рүү нийлсэн $\{x^k\} \in A$ дараалал үргэлж орших бөгөөд $\lim\limits_{k\to\infty} y(x^k) = \bar{y}$ ба $\bar{y} \ne y(\bar{x})$.

Нөгөө талаас B компакт олонлог тул $\bar{y} \in B$ байна. $f(x,y)$ ба $\alpha(x)$ функцүүд тасралтгүй тул $f(\bar{x},\bar{y}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k, y(x^k)) = \lim\limits_{k\to\infty}\alpha(x^k) = \alpha(\bar{x}) = f(\bar{x}, y(\bar{x}))$.

Иймд $\alpha(\bar{x}) = f(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x}, y(\bar{x}))$, $\quad \bar{y} \ne y(\bar{x})$ болж, $f(\bar{x},y)$ функцийн y хувьсагчаар гүдгэр гэдэгт харшилж байна. Иймд $y(x)$ функц нь A дээр тасралтгүй байна. Вейерштрассын теорем ёсоор $x^* \in A$ цэг орших ба

$$\alpha(x^*) = \max_{x\in A}\alpha(x).$$

Дараах цэгүүдийг байгуулъя.
$x^t = (1-t)x^* + tx, \quad y^t = y(x^t), \quad t \in (0,1), \quad x \in A.$
A олонлогийн гүдгэр болон $f(x,y)$ функцийн x-ээр хотгор чанарыг харгалзан үзвэл:
$x^t \in A$ ба $\alpha(x^t) = f(x^t, y^t) = f([1-t]x^* + tx, y^t) \geq (1-t)f(x^*, y^t) + t \cdot f(x, y^t) \geq (1-t)\alpha(x^*) + t \cdot f(x, y^t).$

Нөгөө талаас, $\alpha(x^*) \geq \alpha(x^t)$ тул өмнөх тэнцэл бишээс

$$\alpha(x^t) \geq (1-t)\alpha(x^*) + tf(x,y^t) \geq (1-t)f(x^t, y^t) + tf(x, y^t)$$

болох ба $f(x^t, y^t) \geq (1-t)f(x^t, y^t) + tf(x, y^t)$ болж

$$\alpha(x^t) = f(x^t, y^t) \geq f(x, y^t), \quad \forall x \in A, \quad t \in (0,1) \tag{1.8}$$

биелнэ. $y(x)$ вектор-функц тасралтгүй тул

$$\lim_{t \to 0} y^t = \lim_{t \to 0} y(x^t) = y(x^*) = y^* \tag{1.9}$$

Одоо (1.9)-г харгалзан үзэж (1.8)-д $t \to 0$ үед хязгаарт шилжвэл

$$\lim_{t \to 0} \alpha(x^t) \geq \lim_{t \to 0} f(x, y^t)$$

болох ба эндээс $\alpha(x^*) \geq f(x, y^*), \quad \forall x \in A$ биелнэ. Иймд эндээс

$$\alpha(x^*) \geq \max_{x \in A} f(x, y^*) \geq \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x,y) = v_2.$$

Одоо $\alpha(x^*) = \max\limits_{x \in A} \min\limits_{y \in B} f(x,y) = v_1$ гэдгийг харгалзан үзвэл $v_1 \geq v_2$ болох ба Теорем 1.2-ыг харгалзан үзвэл $v_1 = v_2$ болж теорем $f(x,y)$ функц y-ээр эрс гүдгэр үед батлагдав. Одоо ерөнхий тохиолдолд теоремыг дахин баталъя. Туслах чанарын функц $F(x,y,\varepsilon)$-г тодорхойлно. $F(x,y,\varepsilon) = f(x,y) + \varepsilon M(y)$, үүнд $M(y)$ нь B дээр дурын тасралтгүй, эрс гүдгэр функц, ε-параметр. Тэгвэл дурын $\varepsilon > 0$ үед $F(x,y,\varepsilon)$ функц теоремын нөхцөлийг хангах бөгөөд y-гээр эрс гүдгэр болно. Иймд өмнө нь баталсан ёсоор

$$\mu(\varepsilon) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} F(x,y,\varepsilon) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} F(x,y,\varepsilon) = v(\varepsilon).$$

$\mu(\varepsilon)$ ба $v(\varepsilon)$ функцүүд дурын ε-ын хувьд тасралтгүй ба $\mu(\varepsilon) = v(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$. Иймд

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} v(\varepsilon) = \mu(0) = v(0)$$

болж теорем бүрэн батлагдав. ■

1.4 Эмээлийн цэг

Тодорхойлолт 1.1 Хэрэв $A \times B$ олонлог дээр тодорхойлогдсон $f(x, y)$ функцийн хувьд $(x^*, y^*) \in A \times B$ цэг дээр

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y), \quad \forall (x, y) \in A \times B \tag{1.10}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал (x^*, y^*) цэгийг $f(x, y)$ функцийн $A \times B$ дээрх эмээлийн цэг гэж нэрлэнэ.

Теорем 1.4 *Хэрэв (x^*, y^*) ба (x^0, y^0) цэгүүд нь $f(x, y)$ функцийн $A \times B$ дээрх эмээлийн цэгүүд бол*

$$f(x^*, y^*) = f(x^0, y^0)$$

болох ба $(x^*, y^0), (x^0, y^*)$ цэгүүд нь мөн $f(x, y)$ функцийн $(A \times B)$ дээрх эмээлийн цэгүүд болно.

Баталгаа. Теоремын нөхцөл ёсоор

$$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y), \quad \forall x \in A, \ \ y \in B \tag{1.11}$$

(1.10)-д $x = x^0, \ \ y = y^0$ гэж орлуулан $x = x^*, \ \ y = y^*$ үед (1.11)-г бичээд харьцуулбал

$$f(x^*, y^0) = f(x^*, y^*) = f(x^0, y^0) = f(x^0, y^*).$$

Одоо (1.11)-ын зүүн тал, (1.10)-ын баруун талыг ашиглавал

$$f(x, y^0) \leq f(x^*, y^0) \leq f(x^*, y), \quad x \in A, \ \ y \in B.$$

Иймд (x^*, y^0) нь f функцийн эмээлийн цэг болох нь харагдаж байна. Мөн үүнтэй ижилхэнээр (x^0, y^*)-г эмээлийн цэг гэдгийг харуулж болно. Одоо эмээлийн цэг ба $v_1 = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in B} f(x, y), \quad v_2 = \min\limits_{y \in B} \max\limits_{x \in A} f(x, y)$ утгуудын холбоог тогтооё.

Теорем 1.5 *$v_1, \ v_2$ утгууд оршдог болог. $f(x, y)$ функц $A \times B$ олонлог дээр эмээлийн цэгтэй байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь*

$$v_1 = v_2$$

байх явдал юм.

Баталгаа. Зайлшгүй нөхцөл. (x^*, y^*) цэг нь $f(x, y)$ функцийн $A \times B$ дээрх эмээлийн цэг байг. Тодорхойлолт ёсоор

$$\max_{x \in A} f(x, y^*) = f(x^*, y^*) = \min_{y \in B} f(x^*, y).$$

нөгөө талаас

$$v_2 \le \max_{x\in A} f(x, y^*),$$

$$\min_{y\in B} f(x^*, y) \le v_1$$

биелнэ. Эндээс $v_2 \le f(x^*, y^*) \le v_1$. Нөгөө талаас $v_2 \ge v_1$ үргэлж биелдэг тул

$$v_1 = v_2 = f(x^*, y^*).$$

Хүрэлцээтэй нөхцөл. $v_1 = v_2$ биелэгддэг болог.

$v_1 = \max_{x\in A} \min_{y\in B} f(x, y) = \min_{y\in B} f(x^*, y),$

$v_2 = \min_{y\in B} \max_{x\in A} f(x, y) = \max_{x\in A} f(x, y^*).$

(x^*, y^*) цэгийг f функцийн $A \times B$ дээрх эмээлийн цэг гэдгийг харуулъя. $v_1 = v_2$ нөхцөл ёсоор

$$\min_{y\in B} f(x^*, y) = \max_{x\in A} f(x, y^*).$$

$$f(x, y^*) \le \max_{x\in A} f(x, y^*) = \min_{y\in B} f(x^*, y) \le f(x^*, y^*), \quad x \in A,$$
$$f(x^*, y^*) \le \max_{x\in A} f(x, y^*) = \min_{y\in B} f(x^*, y) \le f(x^*, y), \quad y \in B.$$

Сүүлчийн 2 тэнцэтгэл бишийг нэгтгэн бичвэл

$$f(x, y^*) \le f(x^*, y^*) \le f(x^*, y), \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

болж (x^*, y^*) нь $f(x, y)$ функцийн эмээлийн цэг болох нь батлагдав.

Мөрдлөг 1. $f(x, y)$ функцийн эмээлийн цэг (x^*, y^*) болон v_1, v_2 оршдог бол

$$v_1 = v_2 = f(x^*, y^*)$$

Мөрдлөг 2. Теорем 1.3-ын нөхцөл нь $f(x, y)$ функцийн $A \times B$ дээрх эмээлийн цэг оршин байх хүрэлцээтэй нөхцөл болно.

1.5 Цэвэр стратегитэй матрицан тоглоом

Хоёр этгээдтэй тэг нийлбэртэй тоглоом авч үзье. Тоглогч талуудын стратегийн олонлогууд A ба B нь төгсгөлөг элементүүдээс тогтдог гэж үзье.

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Харилцан ганц утгатай

$$i \leftrightarrow a_i, \quad i = 1, \ldots, m; \qquad j \leftrightarrow b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

буулгалтуудыг оруулж ирсэнээр зөвхөн стратегүүдийн дугаартай ажиллах боломжтой болно. Өөрөөр хэлбэл

$$A = \{1, \ldots, m\}, \qquad B = \{1, \ldots, n\}.$$

1-р тоглогчийн хожлын функцийг тодорхойлбол:

$$f(a_i, b_j) = \widetilde{f}(i, j) = c_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

Хожлын функцийг $(m \times n)$ хэмжээтэй $\{c_{ij}\}$ матрицээр бичвэл

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Тодорхойлолт 1.2. Хоёр этгээдийн тэг нийлбэртэй тоглоомын стратегийн олонлогууд нь төгсгөлөг элементүүдээс тогтож байвал энэ тоглоомыг матрицан тоглоом гэж нэрлэнэ.

Матрицан тоглоомын үйлдлийг тодорхойлъё. 1-р тоглогч өөрийн стратеги a_i-г сонгохдоо матрицын i-р мөрийг сонгох ба 2-р тоглогч j-р баганыг сонгоно.

Матрицан i-р мөр, j-j баганын огтлолцол дээр орших буй c_{ij} нь 1-р тоглогчийн хожлыг буюу 2-р тоглогчийн алдагдлыг тодорхойлно. Өөрөөр хэлбэл, тоглолтын явцад 1-р тоглогч a_i-стратегийг сонгох ба 2-р тоглогч b_j стратегийг сонгосон үеийн тоглоомын үр дүнд 1-р тоглогч c_{ij} хэмжээний хожил олох ба 2-р тоглогч c_{ij} хэмжээг алдана гэсэн үг юм. Иймд хожлын нийлбэр тэг юм.

$$c_{ij} + (-c_{ij}) = 0$$

1-р тоглогчийн баталгаат хожлыг бичвэл:

$$v_1 = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} \widetilde{f}(a_i, b_j) = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} c_{ij}$$

2-р тоглогчийн баталгаат алдагдлын хэмжээ нь

$$v_2 = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} \widetilde{f}(a_i, b_j) = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} c_{ij}$$

Максмин стратеги i_0-г тодорхойлбол:

$$v_1 = \min_{1 \le j \le n} c_{i_0 j} = \max_{1 \le i \le m} \left(\min_{1 \le j \le n} c_{ij} \right) = c_{i_0 j_1}$$

Минимакс стратеги j_0 нь дараах нөхцлөөс тодорхойлогдоно.

$$v_2 = \max_{1 \le i \le n} c_{i j_0} = \min_{1 \le j \le n} \left(\max_{1 \le i \le m} c_{ij} \right) = c_{i_1 j_0}$$

Теорем 1.2 ёсоор $v_1 = c_{i_0 j_1} \le v_2 = c_{i_1 j_0}$ биелэгдэнэ.
Хэрэв $v_1 = v_2$ буюу

$$\max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} c_{ij} = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} c_{ij} = c_{i_0 j_0}$$

нөхцөл болж байвал (i_0, j_0) стратегийг тоглоомын шийд буюу эмээлийн цэг гэж нэрлэнэ.
Эмээлийн цэгийн хувьд

$$c_{ij_0} \leq c_{i_0j_0} \leq c_{i_0j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Эндээс $c_{i_0j_0} = \max\limits_{1\leq i\leq m} c_{ij_0}, \quad c_{i_0j_0} = \min\limits_{1\leq j\leq n} c_{i_0j}$ тул тоглоомын утга $c_{i_0j_0}$ нь i_0 мөрийн элементүүдийн хувьд хамгийн бага нь, j_0-р баганын элементүүдийн хувьд хамгийн их нь болж байна. Тоглоомын эмээлийн цэгийг олохдоо дараах матрицан хүснэгтийг ашиглаж олох нь тохиромжтой.
Хүснэгт 1.1.

b_j / a_i	b_1	b_2	$\ldots$	b_j	$\ldots$	b_n	α_i
a_1	c_{11}	c_{12}	$\ldots$	c_{1j}	$\ldots$	c_{1n}	α_1
a_2	c_{21}	c_{22}	$\ldots$	c_{2j}	$\ldots$	c_{2n}	α_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_i	c_{i1}	c_{i2}	$\ldots$	c_{ij}	$\ldots$	c_{in}	α_i
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\ldots$	c_{mj}	$\ldots$	c_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	$\ldots$	β_j	$\ldots$	c_{1n}	

$$\alpha_i = \min_{1\leq j\leq n} c_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad v_1 = \max_{1\leq i\leq m} \alpha_i$$

$$\beta_j = \max_{1\leq i\leq m} c_{ij}, \quad v_2 = \min_{1\leq j\leq n} \beta_j$$

Хэрэв $v_1 = \alpha_{i0} = \max\limits_{1\leq i\leq m} \alpha_i = v_2 = \beta_{j0} = \min\limits_{1\leq j\leq n} \beta_j$ бол (i_0, j_0) стратеги нь матрицан тоглоомын цэвэр стратегитэй үеийн шийд болно.
Хэрэв $v_1 \neq v_2$ бол энэ тоглоом нь цэвэр стратегитэй үед шийдгүй байна.

Жишээ 1.1. Хоёр тоглогч нэгэн зэрэг 2 зоос шиднэ. Хэрэв 2 зоос ижилхэн сүлдээр эсвэл тоогоор буувал 1-р тоглогч 100 төг. хожиж, 2-р тоглогч 100 төг. алдана. Хэрэв 2 зоос эсрэгээр буувал 1-р тоглогч 100 төг. алдана. Энэ тоглоомын шийдийг шинжилье.
1-р тоглогчийн стратегийн олонлог A нь тоо ба сүлдээс тогтоно. 2-р тоглогчийн стратегийн олонлог B нь мөн тоо ба сүлдээс тогтоно. Иймд $A = \{\text{тоо}, \ \text{сүлд}\}, \quad B = \{\text{тоо}, \ \text{сүлд}\}$.
Тоглоомын матрицыг зохиовол

B / A	тоо	сүлд
тоо	100	-100
сүлд	-100	100

эсвэл $\begin{pmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{pmatrix}$
Энэ матрицын хувьд

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = -100 & \alpha_2 = -100, & v_1 = -100 \\ \beta_1 = 100 & \beta_2 = 100, & v_2 = 100 \end{array}$$

$v_1 \neq v_2$ тул энэ тоглоом цэвэр стратегитэй үед шийдгүй байна.

Жишээ 1.2 Дараах матрицан тоглоомын шийдийг олъё.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -3, \quad \alpha_3 = -5, \quad v_1 = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 2,$
$\beta_1 = 9, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = 3, \quad \beta_4 = 2, \quad v_2 = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} = 2$
$v_1 = v_2 = 2$ тул энэ тоглоом 2 шийдтэй. Түүнчлэн $\alpha_1 = \beta_2 = \beta_4 = 2$ тул тоглоом (a_1, b_2) ба (a_1, b_4) гэсэн 2 эмээлийн цэгтэй байна. Өөрөөр хэлбэл 1-р тоглогч 1-р стратегийг сонгож, 2-р тоглогч 2-р эсвэл 4-р стратегээ сонговол тоглогч тус бүр баталгаат хожил ба баталгаат алдагдалдаа хүрч байна.

Жишээ 1.3

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоглоомын хувьд
$\alpha_1 = -3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -2, \quad v_1 = 0,$
$\beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 4, \quad \beta_3 = 2, \quad \beta_4 = 3, \quad v_2 = 2.$

Жишээ 1.4

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Тоглоомын хувьд
$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -4, \quad v_1 = 3,$
$\beta_1 = 10, \quad \beta_2 = 3, \quad \beta_3 = 4, \quad \beta_4 = 3, \quad v_2 = 3.$
$v_1 = v_2 = a_{12} = a_{14} = 3$ тул тоглоомд (1,2) ба (1,4) гэсэн эмээлийн цэгүүд байна.

Жишээ 1.5 (Хоёр хурууны тоглоом)
Тоглоомд оролцогч 2 тоглогч тус бүр нь нэг эсвэл хоёр хуруугаа үзүүлж нэгэн зэрэг 1 эсвэл 2 гэсэн тоог нэрлэнэ. Тоглогч тус бүрийн зорилго нь нөгөө тоглогчийн үзүүлсэн хурууны тоог таахад оршино. Хэрэв 2

тоглогч хоёулаа бие биенийхээ үзүүлсэн хурууны тоог зэрэг таасан эсвэл таагаагүй бол тоглоом тэнцээгээр төгсөнө. Хэрэв аль нэг нь зөв таавал, тэр 2 тоглогчийн үзүүлсэн хуруунуудын тоонуудын нийлбэртэй тэнцүү хожлыг авна.
Энэ тоглоомыг матрицан хэлбэрт бичье.
Тоглогч тус бүрийн стратегийг (i, j)-ээр тэмдэглэе.
Үүнд $i(i = 1, 2)$ нь хурууны тоо, j нь $(j = 1, 2)$ нэрлэсэн тоо.
Тэгвэл тоглогч тус бүрийн боломжит стратегүүд нь (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) болно. Тоглоомын хожлыг дараах хүснэгтэд үзүүлье.

B / A	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1,1)	0	2	-3	0
(1,2)	-2	0	0	3
(2,1)	3	0	0	-4
(2,2)	0	-3	4	0

Жишээлбэл, 1-р тоглогч 2 хуруу үзүүлж, 1-г нэрлэсэн (2,1) стратегийг хэрэгжүүлсэн, харин 2-р тоглогч 1 хуруу үзүүлж, 1-г нэрлэж (1,1) стратеги хэрэгжүүлсэн бол 1-р тоглогчийн хожил нь $c_{31} = 2 + 1 = 3$ болно.
Энэ тоглоомын шийдийг сонирхвол
$\alpha_1 = -3, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = -4, \quad \alpha_4 = -4, \quad v_1 = -2,$
$\beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = 4, \quad \beta_4 = 3, \quad v_2 = 2.$
$v_1 \neq v_2$ тул энэ тоглоом цэвэр стратегитэй үед шийдгүй.

Жишээ 1.6 (Монгол ардын хуруу гаргах тоглоом)
Хоёр тоглогч нэгэн зэрэг нэг нэг хуруу гаргаж тоглоно. Тоглоомын дүрэм ёсоор "эрхий" хуруу, "долоовор" хурууг, "долоовор" хуруу "дунд" хурууг, "дунд" хуруу "ядам" хурууг, "ядам" хуруу "чигчий" хурууг, "чигчий" хуруу "эрхий" хурууг тус тус ялна. Хоёр тоглогч дараалсан хуруунуудыг үзүүлбэл дээрх дүрмээр хэн нэг нь хожил (1 оноо) авах ба ижил эсвэл эс дараалсан хуруунууд үзүүлбэл хэн ч ялахгүй тэнцээнд орлоо гэж үзнэ. Энэ тоглоомыг матрицан тоглоомон хэлбэрт бичье.

B / A	эрхий	долоовор	дунд	ядам	чигчий
эрхий	0	1	0	0	-1
долоовор	-1	0	1	0	0
дунд	0	-1	0	1	0
ядам	0	0	-1	0	1
чигчий	1	0	0	-1	0

Энэ тоглоомын хувьд $v_1 = -1, \;\; v_2 = 1$ тул цэвэр стратегитэй үед шийдгүй байна.

Жишээ 1.7 (Бурханд шүтэх тоглоом)
Хүн дэлхий ертөнцтэй харьцахдаа бурхан оршдог, эсвэл оршихгүй гэдгээс хамаарж амьдарна. Хэрэв бурхан оршдог бол хүн шүтэх стратегийг сонгох ба оршихгүй бол шүтэхгүй стратегийг баримтална. Энэ тоглоомд хүн ба дэлхий ертөнц гэсэн 2 тоглогч оролцоно. Хүний стратеги нь шүтэх ба үл шүтэх юм. Ертөнцийн стратеги нь бурхан оршдог ба эс орших юм. $\alpha, \beta, \gamma > 0$ өгөгдсөн гэж үзье.

ертөнц / хүн	бурхан оршино	бурхан оршихгүй
шүтэх	α	$-\beta$
үл шүтэх	$-\gamma$	0

Хэрэв бурхан оршихгүй бөгөөд хүн шүтдэг бол сөрөг таашаал буюу $-\beta$ хожлын утга авна. Хэрэв бурхан оршдог бөгөөд хүн шүтэхгүй бол хүн "бурхны шийтгэл" болох хожлын утга $-\gamma$-г авна. Хэрэв бурхан оршдог бөгөөд хүн шүтдэг бол "бурхны хишиг" болох оюун санааны хожлын утга α-г авна.
Энэ тоглоомын хувьд $v_1 = \max(-\beta, -\gamma) < 0$ ба $v_2 = 0$ тул тоглоом цэвэр стратегитэй үед шийдгүй байна.

Жишээ 1.8 Хөрөнгө оруулагч зах зээлийн төлөв байдлаас хамааран хувьцаа, бонд эсвэл хадгаламж хийхэд хөрөнгө оруулах шаардлагатай. Салбар тус бүрт оруулсан хөрөнгө оруулалтын өгөөж нь зах зээлийн төлөв байдлаас хамаарна.
Хувьцаанд хөрөнгө оруулах нь эрсдэлтэй, бонд нь хувьцааг бодвол эрсдэл багатай ба хадгаламж хийх нь эрсдэлгүй болно. Зах зээлийн төлөв байдал нь сайн, дунд, муу гэсэн төлөв байдлаар тодорхойлогдоно. Хөрөнгө оруулагчийн жилийн өгөөж болох нэгжээс олох ашиг дараах матрицээр өгөгдөх ба тоглоомд зах зээл 2-р тоглогчоор {сайн, дунд, муу} гэсэн стратегитэй оролцоно.

зах зээл / тоглогч	сайн	дунд	муу
хувьцаа	12	8	-5
бонд	4	4	6
хадгаламж	5	5	5

Хэрэв зах зээлийг хөрөнгө оруулагчийн өгөөжийг багасгах зорилготой байгаа өрсөлдөгч гэж үзвэл энэ тоглоомыг тэг нийлбэртэй 2 этгээдийн матрицан тоглоом гэж үзнэ. Үүнд
$\alpha_1 = -5, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 5, \quad v_1 = \max\{-5, 4, 5\} = 5, \beta_1 = 12, \quad \beta_2 = 8, \quad \beta_3 = 6, \quad v_2 = \min\{12, 8, 6\} = 6.$
$v_1 \neq v_2$ тул энэ тоглоом цэвэр стратегитэй үед шийдгүй байна.

Жишээ 1.9 Пүүс хурдан муудаг P_1, P_2 гэсэн 2 төрлийн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэнэ. P_1-бүтээгдэхүүний өөрийн өртөг 800 төг. ба борлуулах үнэ 1200 төг. P_2 бүтээгдэхүүний өөрийн өртөг 500 төг. ба борлуулах үнэ 800 төг.
Пүүс хамгийн их баталгаат ашигтай байх өдөр тутмын бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэлийн төлөвлөгөө зохиох шаардлагтай. Энэ зорилгоор маркетингийн дараах судалгаа явуулсан.
Хэрэв бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэгдсэн өдрөө борлуулагдахгүй бол чанар нь муудах ба дараагийн өдөр 4 дахин хямд үнээр зарагдана. Борлуулалт цаг агаараас хамаарна. Цаг агаарын тааламжтай үед P_1 ба P_2 бүтээгдэхүүн 1000 ш ба 6000 ш тус тус борлогдоно. Цаг агаар тааламжгүй үед P_1 бүтээгдэхүүн 4000 ш, P_2 бүтээгдэхүүн 1200 ш тус тус борлогдоно.
Өдөрт үйлдвэрлэгдсэн бүх бүтээгдэхүүн борлуулахад нэмэлт 200.000 төг. зардал гарна.

Энэ бодлогыг матрицан тоглоомын хэлбэрт бичье. Энэ тоглоомыг 2 этгээдийн тоглом гэж үзвэл 1-р тоглогч нь пүүс, 2-р тоглогч нь байгаль юм. Пүүс 2 стратеги хэрэгжүүлнэ. Үүнд:
• Цаг агаар тааламжтай гэж үзээд бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэх
• Цаг агаар тааламжгүй гэж үзээд бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэх
Байгаль нь цаг агаар тааламжтай байх ба цаг агаар тааламжгүй байх гэсэн 2 стратегитэй байна.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

c_{ij}-нь пүүсийн ашиг, $i, j = 1, 2$,
i-нь пүүсийн стратеги, $i = 1, 2$,
j-нь байгалийн стратеги, $j = 1, 2$.
Пүүсийн ашгийг олохдоо орлогоос зардлыг хасаж олно.

$$c_{ij} = R_{ij} - T_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

үүнд R_{ij}-орлого, T_{ij}- зардал.
$(1, 1)$ стратеги хэрэгжүүлсэн үеийн пүүсийн ашгийг тооцоолъё.
Өөрөөр хэлбэл, цаг агаар тааламжтай үед пүүс цаг агаарыг тааламжтай гэж үзээд бүтээгдэхүүнээ үйлдвэрлэх.
Пүүсийн орлогыг олъё.

$$R_{11} = 1000 \times 1200 + 6000 \times 800 = 6000000$$

Зардлыг тооцвол:

$$T_{11} = 1000 \times 800 + 6000 \times 500 + 200000 = 4000000$$

$$c_{11} = R_{11} - T_{11} = 2000000$$

Одоо (1,2) стратегийн хувьд c_{12}-г олъё. Энэ үед пүүс 1-р стратегээ сонгосон буюу цаг агаарыг тааламжтай гэж үзээд бүтээгдэхүүнээ үйлдвэрлэсэн ба байгаль 2-р стратеги сонгосон буюу цаг агаар тааламжгүй байсан гэж үзье.
Пүүс P_1-ээс 1000 ш, P_2-ээс 6000 ш үйлдвэрлэсэн. Харин цаг агаар тааламжгүй байсан тул орлогыг тооцвол

$$R_{12} = 1000 \times 1200 + 1200 \times 800 + (6000 - 1200) \times (800 : 4) = 3120000$$

Харгалзах зардал T_{12}-г олбол:

$$T_{12} = 1000 \times 800 + 6000 \times 500 + 200000 = 4000000$$

$$c_{12} = R_{12} - T_{12} = -880000$$

Одоо (2,1) стратегийн хувьд c_{21}-г олъё. Пүүс 2-р стратегээ хэрэглэсэн буюу цаг агаарыг тааламжгүй гэж үзээд P_1-ээс 4000 ш, P_2-ээс 1200 ш-г үйлдвэрлээн ба харин энэ үед цаг агаар тааламжтай байсан.
Бодлогын нөхцөл ёсоор P_1 нь 1000 ш, P_2 нь 6000 ш тус тус борлогдоно. Харин P_1-ийн үлдсэн $4000 - 1000 = 3000$ ш бүтээгдэхүүн нь маргааш нь $1200 : 4 = 300$ төгрөгөөр борлогдоно. Иймд орлогыг олбол:

$$R_{21} = 1000 \times 1200 + (4000 - 1000) \times (1200 : 4) + 1200 \times 800 = 3060000$$

Зардлыг олбол:

$$T_{21} = 4000 \times 800 + 1200 \times 500 + 200000 = 4000000$$

$$c_{21} = R_{21} - T_{21} = -940000$$

Эцэст нь (2,2) стратегийн үед c_{22}-г олъё. Энэ үед пүүс ба байгаль тус бүр нь 2-р стратегээ сонгосон. Өөрөөр хэлбэл, пүүс цаг агаарыг тааламжгүй гэж үзээд P_1-ээс 4000 ш, P_2-ээс 1200 ш тус тус үйлдвэрлэсэн. Харин цаг агаар энэ үед тааламжгүй байсан.

$$R_{22} = 4000 \times 1200 + 1200 \times 800 = 5760000$$

$$T_{22} = 4000 \times 800 + 1200 \times 500 + 200000 = 4000000$$

$$c_{22} = R_{22} - T_{22} = 5760000 - 4000000 = 1760000$$

Иймд тоглоомын матрицыг бичвэл

$$\begin{pmatrix} 200000 & -880000 \\ -940000 & 1760000 \end{pmatrix}$$

Энэ тоглоомын шийд цэвэр стратегитэй үед оршихгүй нь илэрхий байна.

1.6 Холимог стратегитэй матрицан тоглоом

Тэг нийлбэртэй 2 этгээдийн матрицан тоглоомд тоглоомын шийд цэвэр стратегитэй үед үргэлж орших албагүй гэдэг нь Жишээ 1.1-1.9-ээс харагдаж байна. Энэ үед харгалзах стратегүүдийг тодорхой магадлалтайгаар хэрэгжүүлдэг буюу холимог стратегитэй матрицан тоглоом үүснэ. $(m \times n)$ хэмжээстэй матрицан тоглоом $c = \{c_{ij}\}$ авч үзье.
1 ба 2-р тоглогч нарын стратегүүдийн олонлог нь
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ба $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ болог.
$x_i,\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ нь 1-р тоглогчийн i-р цэвэр стратеги a_i-г сонгох магадлал.
$y_j,\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ нь 2-р тоглогчийн j-р цэвэр стратеги b_j-г сонгох магадлал.
Тоглоомын дүрэм ёсоор 2 тоглогч аль нэг стратегийг заавал сонгох тул

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad x_i \geq 0, \ \ y_j \geq 0, \qquad (1.12)$$
$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Тодорхойлолт 1.3. (1.12) нөхцлийг хангаж буй $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ векторүүдийг $(m \times n)$ матрицан тоглоомын холимог стратегүүд гэж нэрлэнэ.

Дараах олонлогуудыг тодорхойлъё.

$$X = \left\{x = (x_1, \ldots, x_m) : x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, m, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\}$$
$$Y = \left\{y = (y_1, \ldots, y_n) : y_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right\}$$

X ба Y олонлогууд гүдгэр компакт гэдэг нь илэрхий юм. Учир нь эдгээр олонлогууд битүү, зааглагдсан гүдгэр олонлогууд юм.
Холимог стратегийн хос (x, y), $x \in X$, $y \in Y$ болно. Холимог стратегийг хэрэгжүүлсэн үед ердийн (i, j) стратеги нь $x_i y_j$ магадлалтайгаар хэрэгжинэ.
Энэ үеийн 1-р тоглогчийн дундаж хожил нь $c_{ij} x_i y_j$ байна. (x, y) хос дээр тодорхойлогдсон холимог стратегитэй тоглоомын дундаж хожил нь

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j \qquad (1.13)$$

томъёогоор өгөгдөнө. Энэ нь 1-р тоглогчийн дундаж хожил эсвэл 2-р тоглогчийн дундаж алдагдлыг тодорхойлно. 1-р тоглогчийн баталгаат дундаж хожил нь

$$v_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y).$$

2-р тоглогчийн баталгаат дундаж алдагдал нь

$$v_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Тодорхойлолт 1.4. Хэрэв $(x^*, y^*) \in X \times Y$ хосын хувьд

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = f(x^*, y^*) \tag{1.14}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал (x^*, y^*)-г холимог стратегитэй матрицан тоглоомын оновчтой холимог стратеги гэж нэрлэнэ.

Теорем 1.6 (Фон-Нейман) *Холимог стратегитэй дурын матрицан тоглоом оновчтой холимог стратегитэй буюу үргэлж шийдтэй байна.*
Баталгаа. (1.13) томъёогоор тодорхойлогдсон $f(x, y)$ функц нь x ба y хувьсагчуудаар шугаман функц нь илэрхий юм.
Иймд x-ээр хотгор, y-ээр гүдгэр байна. Нөгөө талаар X ба Y олонлогууд компакт олонлогууд тул минимаксын утгын тухай Теорем 1.3-ын нөхцлийг хангаж байна. Иймд

$$\min_{y \in B} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

биелэгдэж теорем батлагдав.

Теорем 1.5 ёсоор $(x^0, y^0) \in X \times Y$ эмээлийн цэг орших бөгөөд

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = f(x^0, y^0)$$

биелэгдэнэ. Иймд (x^0, y^0) хос нь оновчтой холимог стратеги болно.

$$v = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \tag{1.15}$$

утгыг холимог стратегитэй матрицан тоглоомын хожил гэж нэрлэе.

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^*, y) \tag{1.16}$$

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{x \in X} f(x, y^*) \tag{1.17}$$

байх x^* ба y^* үргэлж оршино. x^*-г 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги гэж нэрлэнэ. y^* нь 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги болно. Одоо оновчтой холимог стратегийн хувьд биелэгдэх зайлшгүй болон хүрэлцээтэй нөхцлийг тодорхойлъё. Энэ зорилгоор дараах теоремыг томъёолъё.

Теорем 1.7 *v гэсэн хожилтой холимог стратегитэй матрицан тоглоомын хувьд x^* нь 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги байх* *зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь 2-р тоглогчийн дурын холимог стратеги y-ийн хувьд*

$$v \leq f(x^*, y) \tag{1.18}$$

нөхцөл биелэгдэх явдал юм.
Мөн y^* нь 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь 1-р тоглогчийн дурын холимог стратеги x-ийн хувьд

$$f(x, y^*) \leq v \tag{1.19}$$

биелэгдэх явдал юм
Баталгаа. Теоремын 1-р хэсэг болох (1.18) нөхцөл биелэгдэхийг харуулъя.
x^* нь 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги болог. Теорем 1.6 болон (1.15) ёсоор $y^* \in Y$ орших бөгөөд

$$v = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y} f(x^*, y) \leq f(x^*, y), \quad \forall y \in Y.$$

Одоо (1.19) биелэхийг харуулъя. Тодорхойлолт ёсоор

$$v = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) = \max_{x\in X} f(x, y^*) \geq f(x, y^*), \quad \forall x \in X$$

болж зайлшгүй нөхцөл батлагдав.
Хүрэлцээтэй нөхцөл. x^* нь (1.18) нөхцлийг хангадаг байг.
Теорем 1.6 болон (1.15) ёсоор (x^0, y^0) хос орших бөгөөд

$$v = f(x^0, y^0) \tag{1.20}$$

$$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y), \quad x \in X,\ y \in Y \tag{1.21}$$

(1.18) ба (1.19)-г харгалзан үзвэл

$$f(x^0, y^0) \leq f(x^*, y), \quad \forall y \in Y. \tag{1.22}$$

(1.22)-д $y = y^0$, (121)-д $x = x^*$ гэж орлуулбал

$$f(x^0, y^0) \leq f(x^*, y^0)$$

$$f(x^*, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^*, y^0)$$

болох ба

$$f(x^0, y^0) = f(x^*, y^0) \tag{1.23}$$

гэж мөрдөн гарна. Одоо (1.21), (1.22) ба (1.23)-ээс

$$f(x, y^0) \leq f(x^*, y^0) \leq f(x^*, y), \quad \forall x \in X, \quad y \in Y$$

болж (x^*, y^0) нь $f(x, y)$ функцийн $X \times Y$ дээрх эмээлийн цэг болно. Иймд x^* нь 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги болж байна. Учир нь

$$v = f(x^0, y^0) = f(x^*, y^0) = \min_{y\in Y} f(x^*, y).$$

Үүнтэй төсөөтэйгээр (1.19)-г ашиглан y^*-г 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги гэдгийг харуулж болно. Теорем бүрэн батлагдав.

Мөрдлөг. $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*, \dots, x_m^*)$ нь холимог стратегитэй матрицан тоглоом $C = \{c_{ij}\}$-ын 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i^* \geq v, \quad j = 1, 2, \dots, m \tag{1.24}$$

байх явдал юм.
Мөн үүнтэй ижлээр $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ нь 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \leq v, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{1.25}$$

Иймд матрицан тоглоомын оновчтой холимог стратеги (x, y) болон хожил v-г олохын тулд дараах тэгшитгэл ба тэнцэтгэл бишүүдийн системийн сөрөг биш шийдийг олох шаардлагатай.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \geq v, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \leq v, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \tag{1.26}$$

Теорем 1.8 *v гэсэн хожилтой холимог стратегитэй матрицан тоглоом $C = \{c_{ij}\}$-ын хувьд $x = (x_1, \dots, x_m)$ ба $y = (y_1, \dots, y_m)$ нь 1 ба 2-р тоглогчийн харгалзах оновчтой холимог стратегууд болог. Тэгвэл*
а). Хэрэв ямар нэг индекс i-ийн хувьд

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j < v \tag{1.27}$$

бол $x_i = 0$,
в). Хэрэв ямар нэг индекс j-ийн хувьд

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i > v \tag{1.28}$$

бол $y_j = 0$.
Баталгаа. a)-г эсрэгээс баталъя. Өөрөөр хэлбэл, ямар нэг индекс i-ийн хувьд (1.27) биелэгдэх ба харин $x_i > 0$ гэж үзье.
Тэгвэл
$$x_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j < x_i v. \tag{1.29}$$
Нөгөө талаар $y = (y_1, \ldots, y_n)$ нь 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги тул (1.25) биелнэ.
$$\sum_{j=1}^{n} q_j y_j \le v, \quad (l = 1, 2, \ldots, m; \ \ l \ne i)$$
Эндээс
$$x_l \sum_{j=1}^{n} c_{lj} y_j < x_l v.$$
Сүүлийн тэнцэтгэл бишийг l-ээр нийлбэр авбал
$$\sum_{l \ne i} x_l \sum_{j=1}^{n} c_{lj} y_j + x_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \le v \sum_{l \ne i}^{m} x_l + x_i v.$$
Энэ тэнцэтгэл бишд (1.29)-г харгалзан үзвэл
$$f(x, y) = \sum_{l=1}^{m} x_l \sum_{j=1}^{n} c_{lj} y_j < v \sum_{l=1}^{m} x_l = v$$
болж v-г тоглоомын хожил гэдэгт зөрчилд орж байна.
в) хэсэг үүнтэй ижилхэнээр батлагдана. Иймд теорем бүрэн батлагдав.

Жишээ 1.10. Дараах матрицан тоглоомын шийдийг ол.
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
Энэ тоглоомын шийд нь цэвэр стратегитэй үед оршихгүй гэдгийг хялбархан шалгаж болох ба холимог стратегитэй үеийн шийдийг олъё. Оновчтой холимог стратегүүд нь дараах тэгшитгэл тэнцэтгэл бишүүдийн системийг хангана.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \ge v \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \ge v \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \ge v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 \le v \\ -y_1 - y_2 + 3y_3 \le v \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \le v \\ y_1 + y_2 + y_3 = v \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0 \end{cases} \tag{1.31}$$

Энэ системийг бодохын тулд зарим тэнцэтгэл бишүүдийг тэнцэтгэлээр сольж бодож түүний сөрөг биш шийдүүдийг олохыг оролдоно.
(1.30)-г тэнцэтгэл тохиолдолд бодъё.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = v \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = v \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Энэ системийг аль нэг аргаар бодож шийдийг олбол:

$$x_1 = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{3}{13}, \quad x_3 = \frac{4}{13}, \quad v = -\frac{1}{13}$$

бүх шийдүүд x_i эерэг тул эдгээр нь 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратегийг тодорхойлно. Одоо 2-р тоглогчийн хувьд доорх системийг бодъё.

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 = v \\ -y_1 - y_2 + 3y_3 = v \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 = v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Энэ системийг бодвол

$$y_1 = \frac{6}{13}, \quad y_2 = \frac{4}{13}, \quad y_3 = \frac{3}{13}$$

болох ба энэ нь 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратегийг тодорхойлно.
Иймд тоглоомын оновчтой холимог стратеги нь

$$x = \left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right), \quad y = \left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right), \quad v = -\frac{1}{13}$$

Жишээ 1.11

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

тоглоомын оновчтой холимог стратегийг олъё.
Оновчтой холимог стратегийн оновчтой байх нөхцлийг бичвэл

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge v \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge v \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \ge v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 \le v \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le v \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 \le v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Дээрх 2 системийн эхний системийн 1-р тэнцэтгэл биш эрс биелэгдэх ба үлдсэн нь тэгшитгэл хэлбэртэй байна гэж үзье.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 > v \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = v \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 = v \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 = v \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 = v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 > v$ тул Теорем 1.8 ёсоор $y_1 = 0$ болно.
$y_1 = 0$-г 2-р системд орлуулбал

$$\begin{cases} -2y_2 + 4y_3 = v \\ 4y_2 + 2y_3 = v \\ 2y_2 + 6y_3 = v \\ y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

болох ба энэ систем нь нийцгүй байна. Иймд $3x_1 - x_2 + 2x_3 > v$ гэсэн таамаглал хүчингүй байна. Одоо дараах тохиолдол авч үзье.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = v \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = v \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 > v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 < v \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 = v \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 = v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 > v$ нөхцөлөөс Теорем 1.8 ёсоор $y_3 = 0$ болох ба $3y_1 - 2y_2 + 4y_3 < v$ гэдгээс $x_1 = 0$ байна. Иймд дээрх систем нь

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = v \\ 4x_2 + 2x_3 = v \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + 4y_3 = v \\ 2y_1 + 2y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

болох ба системийг бодож шийдийг олбол:
$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad y_1 = \dfrac{2}{5}, \quad y_2 = \dfrac{3}{5}, \quad y_3 = 0, \quad v = 2.$
Бүх хувьсагчууд x_i, y_i нь сөрөг биш тул эдгээр нь оновчтой холимог стратеги болно. $x = (0, 0, 1), \quad y = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, 0\right), \quad v = 2.$

$C = \{c_{ij}\}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$ матрицан тоглоом авч үзье.

Тодорхойлолт 1.5 1-р тоглогчийн i ба k-р стратегийн хувьд доорх 2 нөхцөл

a) $c_{ij} \geq c_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$
b) $\forall l: \ c_{il} > c_{kl}$
биелэгддэг бол i-р стратегийг нь k-р стратегийг давамгайлж байна гэж үзнэ. Мөн үүнтэй ижилхэнээр, 2-р тоглогчийн хувьд
c) $c_{ij} \leq c_{ir}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$
d) $\forall p: \ c_{pj} < c_{pr}$
нөхцөл биелэгдэж байвал j-р стратеги нь r-р стратегийг давамгайлна гэж үзнэ.
Стратегуудийн давамгайлах чанар нь матрицан тоглоомын матрицын хэмжээсийг багасгах боломж олгоно.

Теорем 1.9 *$C = \{c_{ij}\}_{m\times n}$ матрицан тоглоомын хувьд 1-р тоглогчийн i-р стратеги нь k-р стратегийг давамгайлдаг байг. $C^1 = \{c_{ij}\}_{(m-1)\times n}$ нь C матрицийн k-р мөрийг зайлуулсны үр дүнд үүссэн тоглоом болог. Тэгвэл C ба C^1 тоглоомуудын хожил ижилхэн байх ба C^1 тоглоомын 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги нь C тоглоомын оновчтой холимог стратеги болно.*
Хэрэв $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_m)$ нь C^1 тоглоомын 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги бол $x = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, 0, \ u_{k+1}, \ldots, u_m)$ нь C тоглоомын оновчтой холимог стратеги болно.
Баталгаа. i-р стратеги нь k-р стратегийг давамгайлж байгаа тул j_0 дугаар олдох ба

$$\begin{aligned} &c_{ij} \geq c_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ &c_{ij_0} > c_{kj_0} \end{aligned} \tag{1.32}$$

нөхцөл биелэгдэнэ.
C^1 тоглоомын хожил v ба $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ нь түүний 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги болог. Тэгвэл Теоремын 1.7-ын Мөрдлөг ёсоор

$$\sum_{j=1}^{n} c_{lj} y_j \leq v, \quad l = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m \tag{1.33}$$

$$v \leq \sum_{l \neq k} c_{lj} u_l, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.34}$$

Одоо v-г C тоглоомын үнэ, y-г C тоглоомын 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги, $x = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \ldots, u_m)$-г 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги гэдгийг тус тус харуулъя.
Өөрөөр хэлбэл,

$$\sum_{j=1}^{n} c_{lj} y_j \leq v, \quad l = 1, 2, \ldots, m \tag{1.35}$$

$$v \leq \sum_{i=1}^{m} c_{ij} u_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.36}$$

нөхцөл биелэгдэхийг харуулна гэсэн үг.
(1.33) ба (1.35)-г харьцуулбал $l \neq k$ үед эдгээр нь давхцаж байна. Тэгвэл (1.33)-г $l = k$ үед харуулъя. Үүний тулд (1.32) тэнцэл бишүүдийн баруун зүүн талуудыг y_j-ээр үржүүлж нийлбэр зохиовол

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_j \tag{1.37}$$

нөгөө талаар (1.33) нь $l = i$ үед мөн биелэгдэнэ. Иймд

$$v \geq \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_j$$

болж (1.33) нь $l = k$ үед биелэгдэнэ.
(1.35)-г дараах хэлбэрт бичье.

$$v \leq \sum_{i \neq k} c_{ij} u_i + c_{kj} u_k$$

Нөгөө талаас $u_k = 0$ тул

$$v \leq \sum_{i \neq k} c_{ij} u_i$$

болж (1.35) ба (1.36) биелэгдэж байна. Теорем бүрэн батлагдав.

Теорем 1.10 *$C = \{c_{ij}\}_{m \times n}$ матрицан тоглоомын хувьд 2-р тоглогчийн q-р цэвэр стратеги нь r-р стратегийг давамгайлдаг болог.*
$\overline{C} = \{c_{ij}\}_{m \times (n-1)}$ нь C матрицээс r-р баганыг зайлуулсны үр дүнд үүссэн тоглоом болог. Тэгвэл C ба $\overline{C}$ тоглоомуудын хожил ижилхэн ба $\overline{C}$ тоглоомын 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги нь C тоглоомын оновчтой холимог стратеги болно.
Хэрэв $w = (w_1, w_2, \ldots, w_{r-1},\ w_{r+1}, \ldots, w_n)$ нь $\overline{C}$ тоглоомын 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги бол $y = (w_1, w_2, \ldots, w_{r-1}, 0, w_{r+1}, \ldots, w_n)$ нь C тоглоомын оновчтой холимог стратеги болно.

Баталгаа. Теорем 1.9-ын баталгаатай ижилхэн байна.

Жишээ 1.12. Дараах матрицан тоглоом авч үзье.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Энэ матрицын 1-р тоглогчийн 3-р стратеги нь 1-р стратегийг давамгайлж байна. Иймд матрицийн 1-р мөрийг хасаж $x_1 = 0$ гэж үзээд шинэ матрицан тоглоом үүсгэнэ.

$$C^1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Энэ тоглоомын матрицад 2-р тоглогчийн 2-р стратеги нь 4-р стратегийг давамгайлж байна. Иймд энэ матрицаас 4-р баганыг хасаж $y_4 = 0$ гэж үзээд шинэ матрицан тоглоом C^2-г үүсгэнэ.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Энэ матрицад аль ч стратеги давамгайлахгүй байна. Иймд анхны матрицан тоглоом $C_{4\times 4}$ нь $C^2_{3\times 3}$ гэсэн тэнцүү чанартай тоглоом руу шилжиж байна.

Теорем 1.11 *$C = \{c_{ij}\}_{m\times n}$ матрицан тоглоомын хожил нь v болог. Тэгвэл $B = \{b_{ij}\} = \{bc_{ij} + a\}$, $(b > 0)$ ба C матрицан тоглоомын оновчтой холимог стратегууд давхцах ба B тоглоомын хожил v_B-ын хувьд*

$$v_B = bv + a$$

биелэгдэнэ.

Баталгаа. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ба $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ нь C тоглоомын 1 ба 2-р тоглогч нарын оновчтой холимог стратегүүд болог. Харин $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ нь B тоглоомын оновчтой холимог стратегүүд. Тэгвэл теорем ёсоор x, y, p, q-ийн хувьд дараах нөхцлүүд биелэгдэнэ.

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_i \geq v, \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_j \leq v \tag{1.38}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}p_i \geq v_B, \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij}q_j \leq v_B \tag{1.39}$$

(1.39)-д $b_{ij} = bc_{ij} + a$ гэж орлуулбал

$$\sum_{i=1}^{m} (bc_{ij} + a)p_i \geq v_B, \quad \sum_{j=1}^{n} (bc_{ij} + a)q_j \leq v_B$$

Эдгээр тэнцэтгэл бишүүдийг хялбарчилбал:

$$b\sum_{i=1}^{m} c_{ij}p_i + a \geq v_B, \quad b\sum_{j=1}^{n} c_{ij}q_j + a \leq v_B$$

$b > 0$ тул

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} p_i \geq \frac{v_B - a}{b}, \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_j \leq \frac{v_B - a}{b}$$

$\dfrac{v_B - a}{b} = v$ гэж үзвэл

$$\sum c_{ij} p_i \geq v, \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_j \leq v$$

болж (1.38)-тэй давхцах ба

$$x = p, \quad y = q, \quad v_B = bv + a$$

болж теорем батлагдав.

Мөрдлөг. Хүрэлцээтэй их эерэг тоо a-г сонгох замаар B матрицын хожлыг үргэлж эерэг болгож болно. Өөрөөр хэлбэл, $v_B > 0$ гэж үргэлж үзэж болно.

Жишээ 1.13

$$C = \begin{pmatrix} 200 & 300 \\ 600 & 100 \end{pmatrix}$$

Энэ тоглоомтой тэнцүү чанартай тоглоом үүсгэхийн тулд матрицан элемент бүрийг 100-д хувааж, үүссэн элементүүдээс 1-г тус тус хасвал

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицан тоглоом үүснэ. Энэ хувиргалтыг бичвэл

$$b_{ij} = 0.01 \cdot c_{ij} - 1, \quad (b = 0,001, \quad a = -1)$$

Энэ тоглоомд цэвэр стратегийн хувьд эмээлийн цэг оршихгүй байна. B тоглоомын 1 ба 2 тоглогч нарын оновчтой холимог стратегууд $x = (x_1, x_2)$ ба $y = (y_1, y_2)$ ба хожлын утга нь v_B болог. Теорем 1.7. ёсоор x ба y-ын хувьд

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq v_B \\ 2x_1 \geq v_B \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq v_B \\ 5y_1 \leq v_B \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

биелэгдэнэ. Бүх тэнцэлбишүүдийг тэнцэтгэл болгож систем тэгшитгэлүүдийг бодъё.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = v_B \\ 2x_1 = v_B \\ x_2 = 1 - x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = v_B \\ 5y_1 = v_B \\ y_2 = 1 - y_1 \end{cases}$$

Эндээс $x_1 = \frac{1}{2}v_B, \quad y_1 = \frac{1}{5}v_B, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{2}v_B, \quad y_2 = 1 - \frac{1}{5}v_B.$
Эдгээрийг 1-р тэгшитгэлд орлуулбал $\frac{1}{2}v_B + 5 - \frac{5}{2}v_B = v_B.$
Иймд $v_B = \frac{5}{3}, \quad x_1 = \frac{5}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{6}, \quad y_1 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = \frac{2}{3}.$
C матрицан тоглоомын шийд нь

$$v = \frac{v_B - a}{b} = \frac{0.6 + 1}{0.01} = 160,$$

$$x = \Big(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\Big), \quad y = \Big(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\Big).$$

1.7 2×2 хэмжээст матрицан тоглоом

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

гэсэн матрицан тоглоомыг 2×2 хэмжээст матрицан тоглоом буюу эсвэл 2×2 тоглоом гэж нэрлэнэ. Хэрэв энэ тоглоомд эмээлийн цэг нь цэвэр стратегийн хувьд оршихгүй бол холимог стратегитэй үеийн эмээлийн цэгийг олно. 1 ба 2-р тоглогчуудын холимог стратегүүд нь $x = (x_1, x_2)$ ба $y = (y_1, y_2)$ болог. Үүнд x_i нь 1-р тоглогчийн i-р $(i = 1, 2)$ стратегийг сонгох магадлал ба $x_1 + x_2 = 1$.
Мөн y_j нь 2-р тоглогчийн j-р $(j = 1, 2)$ стратегийг сонгох магадлал ба $y_1 + y_2 = 1$ байна. x ба y-ын хувьд дараах оновчтой нөхцөл биелэгдэнэ.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 \geq v \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 \geq v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1.40}$$

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{21}y_2 \leq v \\ c_{12}y_1 + c_{22}y_2 \leq v \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1.41}$$

Одоо хэрэв C матрицан тоглоом цэвэр стратегитэй үед эмээлийн цэггүй бол

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 = v \\ c_{11}y_1 + c_{21}y_2 = v \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 = v \\ c_{12}y_1 + c_{22}y_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \tag{1.42}$$

нөхцөл биелэгдэнэ гэдгийг харуулъя.
Тоглоом нь эмээлийн цэггүй гэж үзье. Тэгвэл оновчтой холимог стратегүүдийн хувьд

$$\begin{array}{l} 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1 \\ 0 < y_1 < 1, \quad 0 < y_2 < 1 \end{array} \tag{1.43}$$

биелэгдэнэ.
(1.40)-ын эхний 2 тэнцэтгэл биш эрс биелэгддэг болог. Өөрөөр хэлбэл,

$$\begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 > v \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 > v \end{array}$$

бол Теорем 1.8. ёсоор $y_1 = y_2 = 0$ болж (1.43) нөхцөлд харшилж байна. Үүнтэй ижилхэнээр

$$c_{11}y_1 + c_{12}y_2 < v, \quad c_{21}y_1 + c_{22}y_2 < v$$

нөхцөл биелэгдэх боломжгүй юм. Энэ үед $x_1 = x_2 = 0$ болж (1.43)-д дахин харшилна.
Одоо (1.40)-ын эхний 2 тэнцэтгэл бишийн аль нэг нь эрс биелэгддэг гэж үзье. Жишээлбэл;

$$c_{11}x_1 + c_{21}x_2 > v$$

тэгвэл Теорем 1.8 ёсоор $y_1 = 0, \quad y_2 = 1$ болно. Иймд (1.41)-ээс

$$c_{12} \leq v, \quad c_{22} \leq v \tag{1.44}$$

гэж мөрдөн гарна. Хэрэв $c_{12} < v, \ c_{22} < v$ бол Теорем 1.8 ёсоор $x_1 = x_2 = 0$ болж (1.43)-тэй харшилна. Хэрэв $c_{12} \neq c_{22}$ бол (1.44)-ын аль нэг нь тэнцэтгэл, нөгөө нь тэнцэтгэл биш байна. $c_{12} < c_{22}$ гэж үзье. Тэгвэл $c_{12} < v, \ c_{22} = v$ болно. Эндээс Теорем 1.8. ёсоор дахин $x_1 = 0$ болж (1.43)-д харшилна. Хэрэв $c_{12} = c_{22}$ бол $c_{12} = v, \ c_{22} = v$ болох ба энэ нь (1.40), (1.41)-ын зөвхөн $x_1 = 0$ үед биелж дахин (1.43)-д харшилна. Иймд (1.40)-ын эхний тэнцэтгэл биш эрс биелэгдэж чадахгүй байна. Үүнтэй ижилхэнээр (1.40)-ын 2-р тэнцэтгэл биш эрс биелэгдэх боломжгүйг харуулж болно. Мөн (1.41)-ын хувьд 1 эсвэл 2-р тэнцэтгэл бишүүд эрс биелэгдэх боломжгүйг харуулж болно. Иймд 2×2 тоглоомын оновчтой холимог стратегууд дараах тэгшитгэлүүдийн системийг хангана.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 = v \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ c_{11}y_1 + c_{21}y_2 = v \\ c_{12}y_1 + c_{22}y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \tag{1.45}$$

Энэхүү системийг бодвол

$$\begin{cases} (c_{11} - c_{12})x_1 + (c_{21} - c_{22})x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ (c_{11} - c_{21})y_1 + (c_{12} - c_{22})y_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \tag{1.46}$$

$x_2 = 1 - x_1, \quad y_2 = 1 - y_1$-г орлуулбал

$$\begin{cases} (c_{11} - c_{12})x_1 + (c_{21} - c_{22})(1 - x_1) = 0 \\ (c_{11} - c_{21})y_1 + (c_{12} - c_{22})(1 - y_1) = 0 \end{cases}$$

Энэ системийг хувиргаж бичвэл

$$\begin{cases} (c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22})x_1 = c_{22} - c_{21} \\ (c_{11} - c_{21} - c_{12} + c_{22})y_1 = c_{22} - c_{12} \end{cases}$$

Эндээс x_1, y_1-ийг олбол

$$x_1 = \frac{c_{22} - c_{21}}{(c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22})} \tag{1.47}$$

$$y_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{(c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22})} \tag{1.48}$$

Одоо x_2, y_2 ба v-г олбол

$$x_2 = 1 - x_1 = \frac{c_{11} - c_{12}}{(c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22})} \tag{1.49}$$

$$y_2 = 1 - y_1 = \frac{c_{11} - c_{21}}{(c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22})} \tag{1.50}$$

$$\begin{gathered} v = c_{11}x_1 + c_{21}x_2 = c_{11} \cdot \left(\frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22}}\right) + \\ + c_{21} \cdot \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22}}\right) = \frac{c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}}{c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22}} \end{gathered} \tag{1.51}$$

Жишээ 1.14. Жишээ 1.1-ын шийдийг олъё.

$$\begin{pmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{pmatrix}$$

Энэ тоглоомын хувьд $c_{11} = 100, \quad c_{12} = -100, \quad c_{21} = -100, \quad c_{22} = 100$

$$x_1 = \frac{100 + 100}{100 + 100 + 100 + 100} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

$v = 0$. Иймд 2 тоглогч өөрсдийнхөө стратегүүдийг ижилхэн магадлалтай хэрэгжүүлэх нь чухал бөгөөд хожлын утга 0 байна.

Жишээ 1.15. Жишээ 1.7-ын бодолтыг гүйцэтгэе. Тоглоомын матриц нь

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = \alpha, \quad c_{12} = -\beta, \quad c_{21} = -\gamma, \quad c_{22} = 0$ тул
$x_1 = \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad x_2 = \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + \gamma}$
Хэрэв бурхны шийтгэл болох төлбөрийн хэмжээ γ нь хангалттай их тоо бол

$$x_1 = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \to 1$$

болох тул уг хүн маш өндөр магадлалтайгаар бурханд итгэнэ.
Жишээлбэл, $\alpha = 10, \quad \beta = 5, \quad \gamma = 100$ тэгвэл $x_1 = 0.87$.

Жишээ 1.16. Одоо Жишээ 1.9-ын бодолтыг гүйцэтгэе.

$$\begin{pmatrix} 200.000 & -880.000 \\ -940.000 & 1760.000 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 200.000, \quad c_{12} = -880.000, \quad c_{21} = -940.000, \quad c_{22} = 1760.000$ (1.47)-(1.50) томъёонуудаар бодож оновчтой холимог стратегийг олбол

$$\begin{aligned} &x_1 = 0.483, \quad x_2 = 0.517 \\ &y_1 = 0.473 \quad\ \ y_2 = 0.527 \quad v = 482.000 \text{ төг.} \end{aligned}$$

Эдгээр магадлалуудыг эдийн засгийн утгыг тайлбарлая. Цаг агаарын таатамжтай үед P_1 ба P_2 бүтээгдэхүүн 1000 ш ба 6000 ш тус тус борлогдоно. Цаг агаар тааламжгүй үед P_1 нь 4000 ш, P_2 нь 1200 ш тус тус борлогдох тул өдөрт дунджаар P_1-бүтээгдэхүүнээс

$$1000x_1 + 4000x_2 = 1000 \times 0.483 + 4000 \times 0.517 = 2551 \text{ ш}$$

P_2-бүтээгдэхүүнээс

$$6000x_1 + 1200x_2 = 6000 \times 0.483 + 1200 \times 0.517 = 3518 \text{ ш}$$

тус тус үйлдвэрлэх ба энэ үед цаг агаараас үл хамааран олох өдрийн баталгаат ашгийн хэмжээ $v = 482.00$ төг. болно.

1.8 $2 \times n$, $m \times 2$ тоглоомуудыг график аргаар бодох

$2 \times n$ гэсэн матрицан тоглоом авч үзье.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Хэрэв тоглоом нь эмээлийн цэгтэй бол энэ нь бодлогын шийд болдог. Энэ тоглоом нь эмээлийн цэггүй байг.
x=(x_1, x_2) нь 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги ба y=$(y_1, y_2, \dots, y_n)$ нь 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги. v нь тоглоомын хожил болог. Тэгвэл (x, y, v) нь Теорем 1.7. ёсоор дараах нөхцлүүдийг хангана.

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \geq v, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{1.52}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_1 \leq v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad y_j \geq 0, \; j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \tag{1.53}$$

Тоглоом цэвэр стратегитэй үед эмээлийн цэггүй тул

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n = v \\ a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_1 = v \end{cases}$$

нөхцөл биелэгдэнэ.
Одоо 2-р тоглогч j-р цэвэр стратегээ сонгосон гэж үзье.
Тэгвэл 1-р тоглогчийн дундаж хожлын утга нь

$$M_j = x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Хэрэв $x_2 = 1 - x_1$ гэдгийг орлуулбал

$$M_j(x_1) = x_1 a_{1j} + (1 - x_1) a_{2j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

буюу

$$M_j(x_1) = (a_{1j} - a_{2j}) x_1 + a_{2j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

2-р тоглогч өөрийнхөө стратегийг сонгох замаар 1-р тоглогчийн дундаж хожил $M_j(x_1)$-г багасгахыг эрмэлзэнэ. Өөрөөр хэлбэл,

$$\min_{1 \leq j \leq n} M_j(x_1) = \varphi(x_1)$$

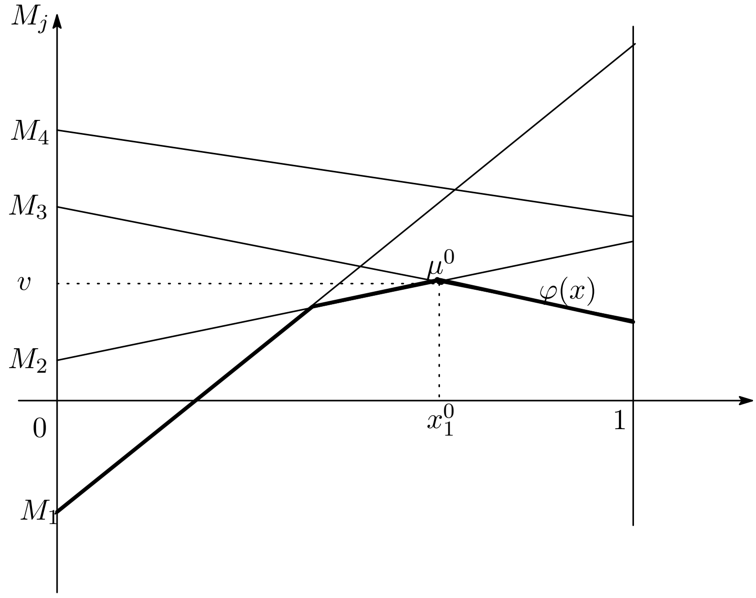
1-р тоглогч нь өөрийнхөө x_1 стратегийг сонгох замаар $\varphi(x_1)$-г ихэсгэхийг эрмэлзэнэ.

$$\max_{0 \leq x_1 \leq 1} \varphi(x_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq 1} \min_{1 \leq j \leq n} M_j(x_1) = \varphi(x_1^0)$$

Тоглоомын хожил $v = \varphi(x_1^0)$ болох ба

$$v = \max_{0 \le x_1 \le 1} \min_{1 \le j \le n} M_j(x_1)$$

$\varphi(x_1)$ функцийн график нь дифференциалчлагдахгүй функц гэдгийг графикаас харж болно.



$\varphi(x_1)$ функцийн график M_j шулуунуудын хамгийн доод орших хэсгүүд болох буюу доод "эмжээр" болно.
$\varphi(x)$ функцид максимум олгож байгаа $M^0(x_1^0, v)$ цэгүүд нь M_j шулуунуудын огтлолцлоор тодорхойлогдоно. Жишээлбэл, 1.1 зурган дээрээс харахад M^0 цэг нь M_2 ба M_3 шулуунуудын огтлолцол дээр байна. Иймд

$$\begin{cases} M_2(x_1) = (a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22} = v \\ M_3(x_1) = (a_{13} - a_{23})x_1 + a_{23} = v \end{cases}$$

буюу $M_2(x_1) = M_3(x_1)$ тэгшитгэлийг бодож x_1^0 ба $x_2^0 = 1 - x_1$-г олно. Тоглоомын хожил v-г олохдоо

$$v = (a_{12} - a_{22})x_1^0 + a_{22}.$$

$M_1(x_1), M_4(x_1)$ шулуунуудын хувьд

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{21})x_1^0 + a_{21} > v \\ (a_{14} - a_{24})x_1^0 + a_{24} > v \end{cases}$$

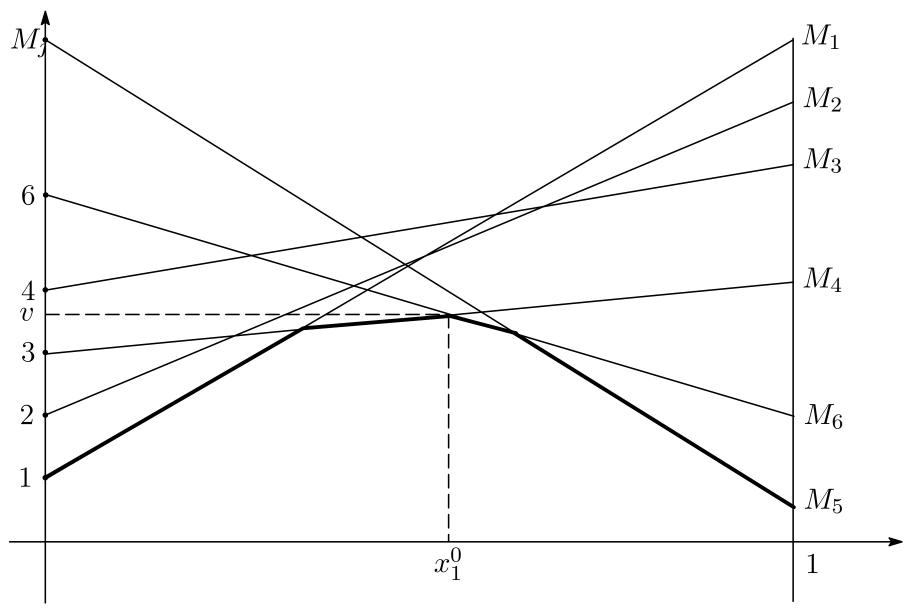
биелэгдэж байгаа тул Теорем 1.7. ёсоор $y_1 = 0, \quad y_4 = 0$ болох ба $y_2, \ y_3$ олохдоо

$$\begin{cases} a_{12}y_2 + a_{13}y_4 = v \\ a_{22}y_2 + a_{23}y_4 = v \\ y_2 + y_4 = 1 \end{cases}$$

системийг бодно.
Жишээ 1.17. Хөдөө аж ахуйн үйлдвэр 2 төрлийн үр тариа ургуулна. Хураах авсан ургацаас хамаарч орлого тодорхойлогдоно. Үр тариа ургуулах нь зуны улирлаас хамаарна. Зуны улиралд дараах 6 боломж (стратеги) байна.
1. Хуурай халуун зун
2. Чийгтэй халуун зун
3. Чийгтэй дулаан
4. Хуурай дулаан
5. Хуурай сэрүүн
6. Чийглэг сэрүүн
Үйлдвэр нь 2 төрлийн үр тариа ургуулах стратегитэй ба улирлаас хамаарсан орлогын хэмжээ нь дараах матрицээр өгөгдсөн (орлого сая төгрөгөөр)

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Тэгвэл үйлдвэрийн баталгаат орлогын хэмжээг тодорхойлъё. Энэ тоглоомыг график аргаар бодъё. Үүний тулд M_j шулуунуудыг байгуулна.



Энэ тоглоомыг "2×6" тоглоом гэж үзэж болно

$$\begin{aligned} M_1(x_1) &= (10-1)x_1 + 1 = 9x_1 + 1 \\ M_2(x_1) &= (8-2)x_1 + 2 = 6x_1 + 2 \\ M_3(x_1) &= (6-4)x_1 + 4 = 2x_1 + 4 \\ M_4(x_1) &= (4-3)x_1 + 3 = x_1 + 3 \\ M_5(x_1) &= (2-12)x_1 + 12 = -10x_1 + 12 \\ M_6(x_1) &= (3-6)x_1 + 6 = -3x_1 + 6 \end{aligned}$$

$\varphi(x_1)$ функцийн максимум нь M^0 цэг дээр хүрч байна. M^0 цэг нь M_4 ба M_6 шулуунуудын огтлолцол дээр оршиж байгаа тул

$$\begin{cases} x_1 + 3 = v, & j = 4 \quad \text{үед} \\ -3x_1 + 6 = v, & j = 6 \quad \text{үед} \end{cases}$$

болох ба эндээс $x_1^0 = \dfrac{3}{4}, \quad x_2^0 = \dfrac{1}{4}, \quad v = \dfrac{15}{4} = 3.75$ сая төг. $j = 4$ ба $j = 6$-аас бусад дугааруудын хувьд
$M_j = (a_{1j} - a_{2j})x_i^0 + a_{2j} > v, \quad j = 1, 2, 3, 5$ үед биелэгдэж байгаа тул

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_5 = 0, \quad y_4 + y_6 = 1$$

Нөгөө талаас

$$\begin{cases} 4y_4 + 3y_6 = v \\ 3y_4 + 6y_6 = v \end{cases}$$

болох дээрх системүүдийг бодвол

$$y_4 = \frac{3}{4}, \quad y_6 = \frac{1}{4}.$$

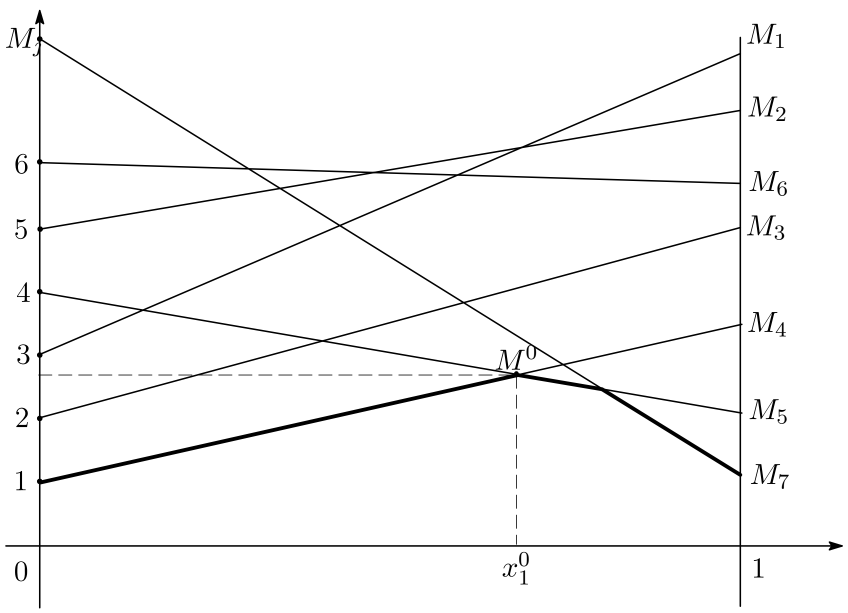
Иймд үйлдвэрийн оновчтой холимог стратеги ба хожил нь
$x = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}\right), \quad v = \dfrac{15}{4}$ байна.
Энэ шийдийн эдийн засгийн утгыг тайлбарлая. Үйлдвэр бүх тариан талбайн $\dfrac{3}{4}$ буюу 75%-д 1-р үр тариаг, $\dfrac{1}{4}$ буюу 25%-д 2-р үр тариаг ургуулбал зуны улирлаас хамаарахгүй олох баталгаат орлогын хэмжээ нь $v = \dfrac{15}{4} = 3.75$ сая төгрөг болно.

Жишээ 1.18.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

тоглоомыг график аргаар бодъё.
$M_j(x_1)$ шулуунуудыг байгуулбал

$$\begin{aligned} &M_1(x_1) = 6x_1 + 3, \quad M_2(x_1) = 2x_1 + 5, \quad M_3(x_1) = 2x_1 + 2, \\ &M_4(x_1) = 2x_1 + 1, \quad M_5(x_1) = -2x + 4, \\ &M_6(x_1) = -x_1 + 6, \quad M_7 = -8x_1 + 9. \end{aligned}$$



$M^0(x_1^0, v)$ цэг нь M_4 ба M_5 шулуунуудын огтлолцол байна.
Иймд

$$\begin{cases} 2x_1 + 1 = v \\ -2x_1 + 4 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

системийг бодвол $v = \dfrac{5}{2}, \quad x_2^0 = \dfrac{3}{4}, \quad x_2^0 = \dfrac{1}{4}.$
Нөгөө талаас $y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_6 = 0, \quad y_7 = 0$ байна.

$$\begin{cases} 3y_4 + 2y_5 = v \\ y_4 + 4y_5 = v \\ y_4 + y_5 = v \end{cases}$$

системийг бодож шийдийг олбол $y_4 = \dfrac{1}{2}, \quad y_5 = \dfrac{1}{2}.$

Одоо "$m \times 2$" тоглоомыг график аргаар бодохыг авч үзье.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$$

Энэ тоглоом нь цэвэр стратегитэй үед шийдгүй гэж үзье.
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нь 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги,

$y = (y_1, y_2)$ нь 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги, v нь тоглоомын хожил
Тэгвэл (x, y, v) нь дараах системийг хангана.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq v \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leq v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 \leq v \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Холимог стратеги y_j-ийн хувьд $0 < y_j < 1, \quad j = 1, 2$ тул

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = v \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0 \end{cases}$$

1-р тоглогчийн i-р стратеги өгөгдсөн гэж үзье. Энэ үед 2-р тоглогч 1-р стратегийг y_1 магадлалтайгаар, 2-р стратегийг y_2 магадлалтайгаар сонгох тул 1-р тоглогчийн дундаж хожил $E_i = E_i(y_1)$ нь:

$$E_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

1-р тоглогч өөрийнхөө стратеги i-г сонгох замаар E_i хожлыг ихэсгэхийг эрмэлзэнэ.

$$\max_{1 \leq i \leq m} E_i(y_1) = \psi(y_1)$$

$y_2 = 1 - y_1$ тул $E_i(y_1)$ функц дараах хэлбэртэй болно.

$$E_i(y_1) = a_{i1}y_1 + a_{i2}(1 - y_1) = (a_{i1} - a_{i2})y_1 + a_{i2}, \quad i = \overline{1, m}.$$

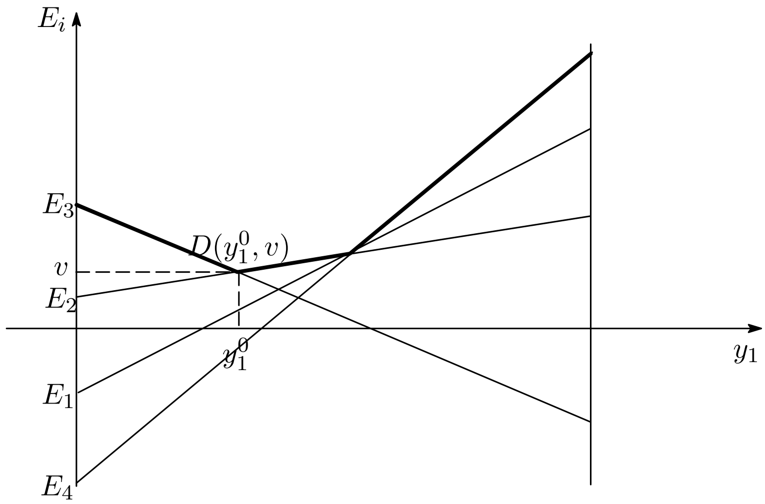
$\psi(y_1)$ функц нь дифференциалчлагдахгүй функц бөгөөд $E_i(y_1)$ шулуунуудын графикуудын максимум дээд хилээр тодорхойлогдоно.
2-р тоглогч өөрийнхээ холимог стратеги y_1-г сонгох замаар $\psi(y_1)$ функцийг багасгахыг эрмэлзэнэ

$$\min_{0 \leq y_1 \leq 1} \max_{1 \leq i \leq m} E_i(y_1) = \min_{0 \leq y_1 \leq 1} \psi(y_1) = \psi(y_1^0).$$

Нөгөө талаас тоглоомын хожил v-ын хувьд

$$v = \psi(y_1^0).$$

"$m \times 2$" тоглоомыг графикаар бодохын тулд дараах алхамуудыг гүйцэтгэнэ.
1. $E_i(y_1) = (a_{i1} - a_{i2})y_1 + a_{i2}$ шулуунуудыг байгуулна.
2. $\psi(y_1) = \max\limits_{1 \le i \le m} E_i(y_1)$ функцийн график байгуулна.
3. $\psi(y_1)$ функцийн минимум утгыг $D(y_1^0, v)$ цэг дээр олно.
4. $D(y_1^0, v)$ цэг нь аль нэг 2 шулууны огтлолцол байна.
5. Систем тэгшитгэл бодож D цэгийг тодорхойлно.
Тэнцэтгэл биш биелэгдэж байгаа шулуунуудын хувьд $x_i = 0$ байна.



Зураг 1.4 дээр D цэг нь E_2 ба E_3 шулуунуудын огтлолцол байна. $D(y_2^0, v)$ цэг нь дараах системийг хангана.

$$\begin{cases} (a_{21} - a_{22})y_1 + a_{22} = v \\ (a_{31} - a_{32})y_1 + a_{32} = v \end{cases}$$

D цэг нь $E_1,\ E_4$ шулуунууд дээр оршихгүй буюу

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{12})y_1 + a_{12} < v \\ (a_{41} - a_{42})y_1 + a_{42} < v \end{cases}$$

биелэгдэж байгаа тул $x_1 = 0, \quad x_4 = 0$ байна.
$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$-г олохдоо

$$\begin{cases} a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = v \\ a_{12}x_2 + a_{32}x_3 = v \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

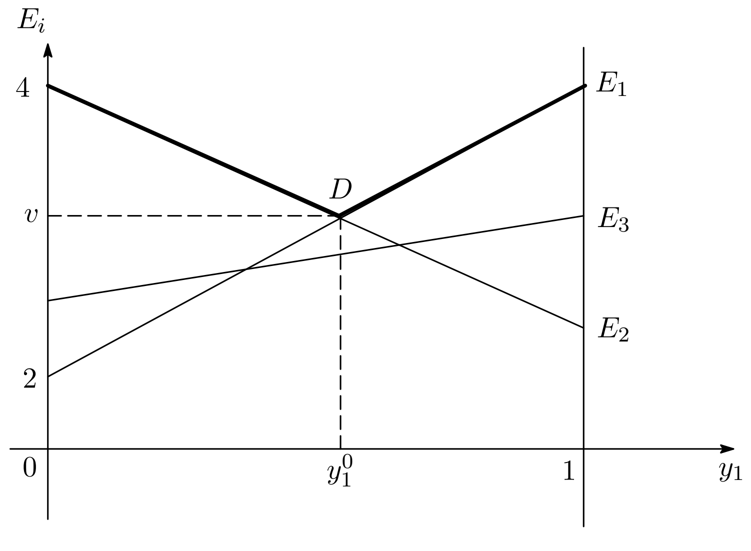
системийг бодно.

Жишээ 1.19. Хөдөө аж ахуйн үйлдвэр төмс тарих төлөвлөгөөтэй ба ургацын хэмжээ цаг агаар болон хөрсний бордолтын хэмжээнээс хамаарна. Байгальд хуурай зун ба чийглэг зун гэсэн 2 боломж байна гэж

үзье. Бордоог дараах боломжуудаар гүйцэтгэнэ. Үүнд:
1. 1 га-д ноогдох бордооны хэмжээ тодорхой стандартын шаардлагыг хангаж байхаар бордох
2. 1 га-д ноогдох бордооны хэмжээ стандартын нормоос 30%-иар илүү байх
3. 1 га-д ноогдох бордооны хэмжээ стандартын нормоос 40%-иар бага байх
ХАА-н үйлдвэрийг 1-р тоглогч, байгалийг 2-р тоглогч гэж үзье. 1-р тоглогч төмс бордох 3 стратегитэй, 2-р тоглогч цаг агаарын нөхцлийг тусгасан 2 стратегитэй байна. 1 тонн төмсний үнэ ургацны хэмжээнээс хамаарахгүй тогтмол гэж үзье. Иймд үйлдвэрийн ашиг нь ургацын хэмжээнээс хамааран тодорхойлогдоно. Үйлдвэрийн төмс бордох стратеги ба байгалиас хамаарсан ашгийн хэмжээг (сая төг) дараах матрицаар тодорхойлъё.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Матрицын элементүүд 1-р тоглогчийн ашгийг тодорхойлно.
Тэгвэл үйлдвэрийн баталгаат ашигтай байх оновчтой бордолтын хэмжээг тодорхойлъё. Энэ тоглоомыг "3×2" тоглоом гэж үзээд график аргаар бодъё. Энэ тоглоомын шийд нь цэвэр стратегитэй үед оршихгүй байх нь илэрхий байна. $E_i(y_1)$ шулуунуудыг байгуулъя.
$E_1(y_1) = (4-2)y_1 + 2 = 2y_1 + 2,$
$E_2(y_1) = (2-4)y_1 + 4 = -2y_1 + 4,$
$E_3(y_1) = (3-2.5)y_1 + 2.5 = 0.5y_1 + 2.5.$



Зураг 1.6 дээрээс харахад $D(y_1^0, v)$ цэг нь E_1 ба E_2 шулуунуудын огт-

лолцол болж байна.

$$\begin{cases} 2y_1 + 2 = v \\ -2y_1 + 4 = v \end{cases}$$

Эндээс $y_1 = \dfrac{1}{2}, \quad y_2 = \dfrac{1}{2}, \quad v = 3$ (сая төг.).
Нөгөө талаас $x_3 = 0$ болох нь илэрхий. x_1 ба x_2-г олохдоо доорх системийг бодно.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = v \\ 2x_1 + 4x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

системийн шийд $x_1 = 0.5, \quad x_2 = 0.5$.
Шийдийн эдийн засгийн утгыг тайлбарлая. 1 га-д оруулах бордооны стандарт хэмжээг 1 гэж үзье. 2-р стратегийг хэрэгжүүлнэ гэдэг нь 1 га-д 1.3 нэгж бордоо хийнэ гэсэн үг юм. Тэгвэл 1 га-г бордох оновчтой хэмжээ нь $1 \cdot 0.5 + 1.3 \cdot 0.5 = 1.15$ болно. Энэ үед үйлдвэрийн олох баталгаат ашиг $v = 3$ (сая төг.) байна.

1.9 Тоглоомын онолд шугаман програмчлалыг хэрэглэх

$A = \{a_{ij}\}$ гэсэн "$m \times n$" тоглоомыг авч үзье.
Энэ тоглоом нь цэвэр стратегитэй үед шийдгүй болог.
Теорем 1.11 ёсоор A тоглоомын хожлын утга v-г үргэлж эерэг гэж үзэж болно. Өөрөөр хэлбэл, $v > 0$ байна. Оновчтой холимог стратегууд $x = (x_1, \ldots, x_m), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ нь дараах нөхцлийг хангадаг.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq v, \quad j = 1, 2 \ldots, m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2 \ldots, m \end{cases} \tag{1.54}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq v, \quad i = 1, 2 \ldots, m \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_i \geq 0, \quad j = 1, 2 \ldots, n \end{cases} \tag{1.55}$$

Одоо $p_i, \ q_j$ хувьсагчуудыг тодорхойлъё.

$$p_i = \frac{x_i}{v}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.56}$$

$$q_j = \frac{y_i}{v}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.57}$$

(1.54) ба (1.55) нь дараах хэлбэрт шилжинэ.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geq 1, \quad i = 1, 2 \ldots, m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = \dfrac{1}{v}, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, 2 \ldots, m \end{cases} \tag{1.58}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \le 1, \quad j = 1, 2 \ldots, n \\ \sum\limits_{j=1}^{m} q_j = \dfrac{1}{v}, \quad q_j \ge 0, \ \ j = 1, 2 \ldots, n \end{cases}$$

1-р тоглогч хожлын утга v-г ихэсгэх зорилготой буюу $\dfrac{1}{v}$-г багасгах тул дараах шугаман програмчлалын бодлого үүснэ.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} p_i \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \ge 1, \quad p_i \ge 0, \ \ i = 1, 2 \ldots, m. \end{cases} \tag{1.59}$$

2-р тоглогч v-г багасгах зорилготой буюу $\dfrac{1}{v}$-г ихэсгэх оновчтой холимог стратеги y_j-г олох шаардлагатай.
Үүнийг томъёолбол:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} q_j \to \max \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \le 1, \quad q_j \ge 0, \ \ j = 1, 2 \ldots, n \end{cases} \tag{1.60}$$

(1.59) ба (1.60) бодлогууд нь харилцан хосмог шугаман програмчлалын бодлогууд юм.
Хэрэв $p_i, \ q_j$ нь эдгээр харилцан хосмог шугаман програмчлалын бодлогуудын шийдүүд бол оновчтой холимог стратегүүд нь

$$\begin{aligned} x_i &= v \cdot p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ y_j &= v \cdot q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{1.61}$$

гэж олдоно.

Жишээ 1.20

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

тоглоомын шийдийг олъё.
Тоглоомын хожлыг эерэг байлгах үүднээс $c_{ij} = a_{ij} + 2$ гэсэн тоглоом авч үзье.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

C тоглоомын элементүүд эерэг тул түүний хожил $v_c > 0$ байна. Теорем 1.11 ёсоор A ба C тоглоомын оновчтой холимог стратегүүд давхцах ба

$v_c = v_a + 2$ тул C тоглоомын шийдийг олоход хангалттай юм. (1.59) бодлогыг бичье.

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \to \min \\ 2p_1 + p_2 + 2p_3 + 4p_4 \geq 1 \\ 3p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 \geq 1 \\ p_1 + 5p_2 + 4p_3 + 2p_4 \geq 1 \\ 4p_1 + 4p_2 + p_3 + 2p_4 \geq 1 \\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_3 \geq 0,\ p_4 \geq 0 \end{cases}$$

Энэ бодлогыг симплекс аргаар эсвэл Matlab (бүлэг 4-г үз.) програм ашиглан бодож шийдийг олбол:

$$p_1 = \frac{8}{69},\quad p_2 = \frac{3}{69},\quad p_3 = \frac{7}{69},\quad p_4 = \frac{9}{69}.$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{v_c}$$

Иймд

$$v_c = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{69}{27} = \frac{23}{9}.$$

Одоо (1.61) ашиглан x_i-г олбол:

$$\begin{aligned} x_1 = v_c \cdot p_1 &= \frac{23}{9} \cdot \frac{8}{69} = \frac{8}{27} \\ x_2 = v_c \cdot p_2 &= \frac{23}{9} \cdot \frac{3}{69} = \frac{3}{27} \\ x_3 = v_c \cdot p_3 &= \frac{23}{9} \cdot \frac{7}{69} = \frac{7}{27} \\ x_4 = v_c \cdot p_4 &= \frac{23}{9} \cdot \frac{9}{69} = \frac{9}{27} \end{aligned}$$

(1.60)-г бодлогыг бичвэл

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \to \max \\ 2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 \leq 1 \\ q_1 + 2q_2 + 5q_3 + 4q_4 \leq 1 \\ 2q_1 + 3q_2 + 4q_3 + q_4 \leq 1 \\ 4q_1 + 2q_2 + 2q_3 + 2q_4 \leq 1 \\ q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0,\ q_3 \geq 0,\ q_4 \geq 0 \end{cases}$$

Симплекс аргаар эсвэл "Matlab" програм ашиглан бодлогын шийдийг олбол

$$q_1 = \frac{5}{46},\quad q_2 = \frac{7}{46},\quad q_3 = \frac{3}{46},\quad q_4 = \frac{3}{46}.$$

(1.61)-ээс y_j-г олно.

$$y_1 = v \cdot q_1 = \frac{23}{9} \cdot \frac{5}{46} = \frac{5}{18}$$
$$y_2 = v \cdot q_2 = \frac{23}{9} \cdot \frac{7}{46} = \frac{7}{18}$$
$$y_3 = v \cdot q_3 = \frac{23}{9} \cdot \frac{3}{46} = \frac{3}{18}$$
$$y_4 = v \cdot q_4 = \frac{23}{9} \cdot \frac{3}{46} = \frac{3}{18}$$

Иймд A тоглоомын оновчтой холимог стратегүүд ба хожил нь

$$x = \left(\frac{8}{27}, \frac{3}{27}, \frac{7}{27}, \frac{9}{27}\right), \quad y = \left(\frac{5}{18}, \frac{7}{18}, \frac{3}{18}, \frac{3}{18}\right),$$

$$v_a = v_c - 2 = \frac{23}{9} - 2 = \frac{5}{9}.$$

Жишээ 1.21

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

тоглоомын шийдийг олъё.
A тоглоомын хожлын утга сөрөг байж болох тул эерэг элементтэй болгох үүднээс элемент тус бүр дээр 4-г нэмж шинэ тоглоом C-г үүсгэе.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_c = v_a + 4$ болно.(1.59) ба (1.60) бодлогуудыг бичье.

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 \to \min \\ 2p_1 + 6p_2 + 4p_3 \geq 1 \\ 5p_1 + p_2 + 6p_3 \geq 1 \\ 4p_1 + 3p_2 + p_3 \geq 1 \\ p_1 \geq 0, \; p_2 \geq 0, \; p_3 \geq 0 \end{cases}$$

Симплекс аргаар бодож шийдүүдийг олбол:

$$p_1 = \frac{21}{124}, \quad p_2 = \frac{13}{124}, \quad p_3 = \frac{1}{124},$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{35}{124}, \quad v_c = \frac{124}{35}.$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 \to \max \\ 2q_1 + 5q_2 + 4q_3 \leq 1 \\ 6q_1 + q_2 + 3q_3 \leq 1 \\ 4q_1 + 6q_2 + q_3 \leq 1 \\ q_1 \geq 0, \; q_2 \geq 0, \; q_3 \geq 0 \end{cases}$$

Шийдүүдийг Matlab програмаар олбол:

$$q_1 = \frac{13}{124}, \quad q_2 = \frac{10}{124}, \quad q_3 = \frac{12}{124},$$

$$v_a = v_c - 4 = \frac{124}{35} - 4 = -\frac{16}{35}.$$

Жишээ 1.22. 1-р бүлгийн жишээ 1.8-г бодъё.
Тоглоомын матриц нь

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

болох ба харгалзах бодлогын математик загварыг бичвэл:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 \to \min \\ 2p_1 + 4p_2 + 5p_3 \geq 1 \\ 8p_1 + 4p_2 + 5p_3 \geq 1 \\ -5p_1 + 6p_2 + 5p_3 \geq 1 \\ p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0, \quad p_3 \geq 0 \end{cases}$$

Бодлогыг "Matlab"-аар бодож шийдийг олбол:
$p_1^* = 0.0397, \quad p_2 = 0.4648, \quad p_3 = 0.4965$
Хожлын утга нь $v = 5.0728$ болно.

2 Тэг биш нийлбэртэй тоглоом

2.1 Нэшийн тэнцвэр

Олон этгээдтэй тоглоом авч үзье.
i-р тоглогчийн хожлын функц нь $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ гэсэн скаляр функцээр өгөгдсөн болог. X_i нь i-р тоглогчийн стратегийн олонлог ба $X_i \subset R^{m_i}$ байг.
f_i нь $X_1 \times X_2 \ldots X_n$ олонлог дээр тодорхойлогдсон скаляр функц

$$f_i : X_1 \times X_2 \ldots X_i \times X_n \to R, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Тодорхойлолт 2.1. Хэрэв n этгээдтэй тоглоомын тоглогч тус бүрийн хожлын функцүүдийн нийлбэр нь дурын стратеги $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset X_1 \times X_2 \ldots X_n$-ын хувьд тэгээс ялгаатай бол энэ тоглоомыг "n" этгээдийн тэг биш нийлбэртэй тоглоом гэж нэрлэнэ.
Өөрөөр хэлбэл тэг биш нийлбэртэй тоглоомын хувьд

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv 0, \ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1 \times X_2 \ldots X_n \tag{2.1}$$

биелнэ гэсэн үг юм.

Тодорхойлолт 2.2 Хэрэв $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots x_n^0) \in X_1 \times X_2 \cdots \times X_n$ стратегийн хувьд

$$\begin{aligned} & f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0) \geq \ f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), \\ & \forall x_i \in X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{2.2}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал энэ стратегийг n-этгээдийн тэг биш нийлбэртэй тоглоомын шийд буюу Нэшийн тэнцвэр гэж нэрлэнэ.
Өөрөөр хэлбэл, Нэшийн тэнцвэрт орохын тулд тоглогч тус бүр өөр өөрсдийнхээ стратегийг оновчтой сонгох замаар хожлынхоо функцийг хамгийн их байлгахыг эрмэлзэж байна. Иймд Нэшийн тэнцвэрийн тодорхойлолтыг f_i функцийн x_i хувьсагчаар авсан глобаль максимумын тусламжтайгаар бичиж болно.

$$\begin{aligned} & f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) = \\ & \max_{x_i \in X_i} f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), \ i{=}1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Одоо 2 этгээдийн тэг биш нийлбэртэй тоглоомыг авч үзье. $x \in A \subset R^n, \quad y \in B \subset R^m$ нь 2 тоглогчийн стратегүүд ба $f_1(x, y), f_2(x, y)$ нь харгалзах хожлын функцүүд болог. Хэрэв $(x^0, y^0) \subset A \times B$ нь Нэшийн тэнцвэр бол

$$\begin{cases} f_1(x^0, y^0) \geq f_1(x, y^0), & \forall x \in A \\ f_2(x^0, y^0) \geq f_2(x^0, y), & \forall y \in B \end{cases} \tag{2.4}$$

болох ба максимумаар бичвэл

$$\begin{cases} f_1(x^0, y^0) = \max\limits_{x \in A} f_1(x, y^0) \\ f_2(x^0, y^0) = \max\limits_{y \in B} f_2(x^0, y) \end{cases} \tag{2.5}$$

болно. Ерөнхий тохиолдолд, Нэшийн тэнцвэрийг олох нь (1.65) ба (1.66) гэсэн глобаль максимумын бодлогыг бодохыг шаардах бөгөөд энэ нь туйлын хүнд байдаг. Зарим хялбар тохиолдолд, эдгээр бодлогуудын оновчтой нөхцлийг бичих замаар Нэшийн тэнцвэрийг олж болно. Тухайлбал, $A = R^n, \quad B = R^m$ бөгөөд $f_1(x, y)$ ба $f_2(x, y)$ функцүүд нь дифференциалчлагддаг бол Нэшийн тэнцвэр дараах экстремум байх зайлшгүй нөхцлийг хангана.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x^0, y^0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \dfrac{\partial f_2(x^0, y^0)}{\partial y_i} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{2.6}$$

Хэрэв $f_1(x, y)$ функц нь x хувьсагчаар (стратегээр) хотгор, $f_2(x, y)$ функц нь y хувьсагчаар хотгор бол (2.6) нөхцөл нь хүрэлцээтэй болно. Өөрөөр хэлбэл, Нэшийн тэнцвэрийг олохын тул

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial y_i} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

гэсэн $(n + m)$ үл мэдэгдэхтэй $(n + m)$ тэгшитгэлийн системийг бодоход хангалттай юм. Хэрэв $A = R, \quad B = R$ бол

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

гэсэн 2 хувьсагчтай тэгшитгэлийн систем бодно.

Ерөнхий тохиолдод $X_i = R, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ үед Нэшийн тэнцвэрийг олохын тулд дараах алхамуудыг гүйцэтгэнэ.

a. $\dfrac{\partial f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ системийг бодож $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ сэжигтэй цэгийг олно.

b. f_i функцийн x_i хувьсагчаар хотгор эсэхийг шалгах.

Хэрэв $\dfrac{\partial^2 f_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ биелэгдэж байвал $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ цэг нь Нэшийн тэнцвэр болно.

a) ба b) нөхцлүүд нь Нэшийн тэнцвэр байх зөвхөн хүрэлцээтэй нөхцлийг тодорхойлно.

Жишээ 2.1 $A = B = R$, хожлын функцууд

$$
\begin{aligned}
&f_1(x,y) = -xy - x^2 + x + y,\\
&f_2(x,y) = -3y^2 - 3x + 7y,\\
&\frac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial x^2} = -2 < 0,\\
&\frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial y^2} = -6 < 0.
\end{aligned}
$$

тул $f_1(x,y)$ ба $f_2(x,y)$ функцууд x ба y хувьсагчуудын хувьд харгалзан хотгор байна. Нэшийн тэнцвэр байх сэжигтэй цэгийг олъё.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = -y - 2x + 1 = 0\\
\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = -6y + 7 = 0
\end{cases}
$$

Иймд Нэшийн тэнцвэр нь

$$(x^*, y^*) = \left(-\frac{1}{12},\ \frac{7}{6}\right).$$

Жишээ 2.2. Хожлын функцууд

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2x_3 - x_1\\
&f_2(x_1,x_2,x_3) = -x_2^2 - x_1^2 + 4x_1x_3 - 5x_1x_2 + 2x_2\\
&f_3(x_1,x_2,x_3) = -4x_3^2 - (x_1+x_3)^2 + x_1x_3 - 3x_2x_3 + x_1x_2x_3
\end{aligned}
$$

ба $X_1 = X_2 = X_3 = R$ бол Нэшийн тэнцвэрийг олъё.
Эхлээд f_1, f_2, f_3 функцуудийн хотгор эсэхийг шалгая.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} = -2x_1 + 3x_2 - 1,\\
&\frac{\partial f_2(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} = -2x_2 - 5x_1 + 2,\\
&\frac{\partial f_3(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} = -8x_3 - 2(x_1+x_3) + x_1 - 3x_2 + x_1x_2,\\
&\frac{\partial^2 f_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1^2} = -2 < 0,\\
&\frac{\partial^2 f_2(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2^2} = -2 < 0,\\
&\frac{\partial^2 f_3(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3^2} = -10 < 0
\end{aligned}
$$

тул f_1, f_2, f_3 функцууд хотгор байна.
Нэшийн тэнцвэр нь дараах системийн шийд болно.

$$
\begin{cases}
-2x_1 + 3x_2 - 1 = 0\\
-2x_2 - 5x_1 + 2 = 0\\
-x_1 - 3x_2 - 10x_3 + x_1x_2 = 0
\end{cases}
$$

Шийдийг олбол:

$$x_1^* = \frac{4}{19}, \quad x_2^* = \frac{9}{19}, \quad x_3^* = -\frac{363}{361}.$$

Нэшийн тэнцвэр нь

$$x^* = \Big(\frac{4}{19}, \quad \frac{9}{19}, \quad -\frac{363}{361}\Big).$$

Ерөнхий тохиолдолд Нэшийн тэнцвэр орших албагүй бөгөөд тэнцвэр орших асуудалд дараах теорем хариу өгнө.

Теорем2.1 *$X_1 \subset R^n$ ба $X_2 \subset R^m$ нь гүдгэр компакт олонлогууд болог. $f_i : X_1 \times X_2 \to R, \quad i = 1, 2$ хожлын функцууд дараах нөхцлийг хангадаг гэж үзье.*
1. f_1 ба f_2 нь тасралтгүй функцууд
2. x_2 бэхлэгдсэн үед $f_1(x_1, x_2)$ нь x_1-ээр хотгор функц
3. x_2 бэхлэгдсэн үед $f_2(x_1, x_2)$ нь x_2-оор хотгор функц
Тэгвэл Нэшийн тэнцвэр оршино.

2.2 Биматрицан тоглоом

Хоёр этгээдтэй тэг биш нийлбэртэй тоглоом авч үзье.
A, B нь тоглогч нарын стратегийн олонлогууд, f_1 ба f_2 нь хожлын функцүүд болог.

$$f_i : A_1 \times A_2 \to R, \quad i = 1, 2$$

Тодорхойлолт 2.3. Хэрэв хоёр этгээдтэй тэг биш нийлбэртэй тоглоомын стратегийн олонлогууд төгсгөлөг элементүүдээс тогтож байвал энэ тоглоомыг биматрицан тоглоом гэж нэрлэнэ.

$$A_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}, \quad A_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\},$$

α_i-нь 1-р тоглогчийн стратеги, $i = 1, 2, \ldots, m$
β_j-нь 2-р тоглогчийн стратеги, $j = 1, 2, \ldots, n$
(α_i, β_j) стратеги сонгогдсон үед 1-р тоглогчийн хожлын функц $f_1(\alpha_i, \beta_j)$, 2-р тоглогчийн хожлын функц $f_2(\alpha_i, \beta_j)$ болог. Дараах тэмдэглээг оруулъя.

$$f_1(\alpha_i, \beta_i) = a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$
$$f_2(\alpha_i, \beta_i) = b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

1-р тоглогчийн хожлын функцээр зохиогдсон A матриц зохиовол

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2-р тоглогчийн хувьд B матриц

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Тэгвэл биматрицан тоглоом дараах матрицээр тодорхойлогдоно.

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \dots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \dots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{i1}, b_{i1}) & (a_{i2}, b_{i2}) & \dots & (a_{in}, b_{in}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \dots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}$$

Хэрэв $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ нь тоглоомын Нэшийн тэнцвэр бол

$$\begin{array}{ll} f_1(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*}) \geq f_1(\alpha_i, \beta_{j^*}), & i = \overline{1, m}, \\ f_2(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*}) \geq f_2(\alpha_i, \beta_{j^*}), & j = \overline{1, n} \end{array}$$

болох ба

$$\begin{cases} a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*}, & i = \overline{1, m}, \\ b_{i^*j^*} \geq b_{i^*j}, & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

(i^*, j^*) стратегийг цэвэр стратегитэй үеийн Нэшийн тэнцвэр гэж нэрлэнэ. Матрицын мөр, багануудыг тоглогч нарын цэвэр стратегүүд гэж нэрлэе.

Эндээс үзэхэд Нэшийн тэнцвэр $(a_{i^*j^*}, b_{i^*j^*})$-ийн хувьд $a_{i^*j^*}$-элемент нь A матрицын j^*-р баганын хамгийн их элемент болж байгаа бол $b_{i^*j^*}$ нь B матрицын i^* мөрний хамгийн их элемент болж байна. Биматрицан тоглоомд цэвэр стратегитэй үеийн Нэшийн тэнцвэр хэд хэд орших болох ба огт оршихгүй байж болно.

Жишээ 2.3. Дараах биматрицан тоглоомын Нэшийн тэнцвэрийг олъё.

$$\begin{pmatrix} (6, 5) & (12, 8) \\ (3, 4) & (9, 7) \end{pmatrix}$$

(1,2) стратегийг Нэшийн тэнцвэр болох эсэхийг шалгая.

$$\begin{cases} a_{12} \geq a_{22} & \text{буюу} \quad 12 > 9 \\ b_{12} \geq b_{11} & \text{буюу} \quad 8 > 5 \end{cases}$$

тул (1,2) стратеги нь Нэшийн тэнцвэр болно. Өөрөөр хэлбэл, 1-р тоглогч 1-р стратегийг, 2-р тоглогч 2-р стратегийг сонговол Нэшийн тэнцвэрт хүрнэ.

Жишээ 2.4

$$\begin{pmatrix} (6,5) & (13,8) \\ (10,11) & (9,7) \end{pmatrix}$$

Энэ тоглоомд (1,2) ба (2,1) гэсэн 2 Нэшийн тэнцвэр цэвэр стратегитэй үед оршино гэдгийг харуулъя.

$$\begin{cases} a_{12} > a_{22} & \Rightarrow \quad 13 > 9 \\ b_{12} > b_{11} & \Rightarrow \quad 8 > 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} > a_{11} & \Rightarrow \quad 10 > 6 \\ b_{21} > b_{22} & \Rightarrow \quad 11 > 7 \end{cases}$$

тул (1,2) ба (2,1) стратегүүд Нэшийн тэнцвэрүүд болж байна.

Жишээ 2.5

$$\begin{pmatrix} (3,1) & (6,4) \\ (2,7) & (10,3) \end{pmatrix}$$

тоглоомын хувь аль ч стратеги (i, j)-ын хувьд (2.2) нөхцөл биелэгдэхгүй байгаа тул Нэшийн тэнцвэр цэвэр стратегитэй үед оршихгүй байна.

Жишээ 2.6

$$\begin{pmatrix} (0,3) & (4,2) & (9,8) & (2,1) \\ (7,5) & (8,4) & (13,11) & (6,7) \\ (3,2) & (9,5) & (10,5) & (4,3) \end{pmatrix}$$

тоглоомын хувьд (2,3) ба (3,2) стратегүүд Нэшийн тэнцвэр болно гэдгийг харуулъя.
(2,3) стратегийн хувьд

$$\begin{cases} a_{23} > a_{13} & \Rightarrow \quad 13 > 9 \\ a_{23} > a_{33} & \Rightarrow \quad 13 > 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{23} > b_{21} & \Rightarrow \quad 11 > 5 \\ b_{23} > b_{22} & \Rightarrow \quad 11 > 4 \\ b_{23} > b_{24} & \Rightarrow \quad 11 > 7 \end{cases}$$

биелэгдэж байгаа тул (2,3) нь Нэшийн тэнцвэр
Одоо (3,2) стратегийг шалгавал

$$\begin{array}{lll} a_{32} > a_{22} & \Rightarrow & 9 > 8 \\ a_{32} > a_{12} & \Rightarrow & 9 > 4 \\ b_{32} > b_{31} & \Rightarrow & 5 > 2 \\ b_{32} > b_{33} & \Rightarrow & 5 > 5 \\ b_{32} > b_{34} & \Rightarrow & 5 > 3 \end{array}$$

тул (3,2) стратеги нь мөн Нэшийн тэнцвэр болж байна.

Жишээ 2.7 (Гэр бүлийн маргааны бодлого) Эхнэр, нөхөр 2 амралтын өдрөөр сумо, концерт үзэхээр шийдсэн. Гэхдээ ганц ганцаараа явснаас хоёулаа хамт явахыг илүүд үзнэ. Эхнэр, нөхөр хоёр хоёулаа сумо эсвэл концерт үзэх гэсэн 2 стратегитэй байна. Сумо эсвэл концерт үзсэнээс авах ханамжаар хожлын функцүүдийн утгууд тодорхойлогдоно.
Нөхрийн стратеги $A = \{\text{сумо},\ \text{концерт}\}$.
Эхнэрийн стратеги $B = \{\text{сумо},\ \text{концерт}\}$.
Тоглоомын нөхцлийг биматрицан тоглоом хэлбэрээр тодорхойлбол:

$$\begin{array}{cc} & \text{эхнэр} \\ \text{нөхөр} & \begin{pmatrix} (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

(1,1) стратегийг тайлбарлая. Хамтдаа сумо үзвэл нөхөр нь 2, эхнэр нь 1 гэсэн хожил авч байна. Харин тус тусдаа явж үзвэр үзвэл -1 гэсэн хожилтой байна. Энэ тоглоомд (2,1) ба (1,2) гэсэн 2 Нэшийн тэнцвэр оршиж байна. Өөрөөр хэлбэл хамтдаа сумо үзэх эсвэл концерт үзэх нь тоглоомын шийд юм. Гэвч эдгээр тэнцвэрүүд нь харилцан адилгүй хожил өгч байна. Хамгийн оновчтой хувилбар нь тэдний хувьд бол зөвшилцлийн үндсэн дээр (2,1) ба (1,2)-ын аль нэгийг сонгох явдал юм. Эсвэл үүнийг санамсаргүй байдлаар, хуруу гаргаж тоглох, эсвэл зоос, шоо шидэх замаар шийдэж болно.

Жишээ 2.8 (Шоронгийн хоригдлын бодлого). Гэмт хэрэг хамтарч хийсэн хэргээр сэжиглэгдэж буй 2 этгээдийг тусгаарлаж хорьсон. Мөрдөн байцаагч тэдэнд хэргээ хүлээх эсвэл хүлээхгүй гэсэн 2 боломж байгааг хэлж өгөх ба боломж тус бүрд авах шийтгэлийг танилцуулна. Хоригдол тус бүрийн стратеги нь хэргээ хүлээх эсвэл үл хүлээх ба шийтгэлийн хэмжээ нөгөөдөхийн шийдвэрээс хамаарч тодорхойлогдоно. Хоригдлуудын шийдвэр гаргах асуудлыг тоглоомын онолоор тайлбарлая. Энэ тоглоом нь үл эвсэлдэх, тэг биш нийлбэртэй тоглоом болно. Тоглоомын нөхцлийг дараах хүснэгтээр өгөгдсөн гэж үзье.

II \ I	$2-$р хоригдол	
	хүлээх	үл хүлээх
хүлээх	$(2,2)$	$(11,1)$
үл хүлээх	$(1,10)$	$(7,8)$

Жишээлбэл, хоёр хоригдол хоёулаа хэргээ хүлээвэл тус бүр нь 2 жилийн хоригдох ял авна.
1-р хоригдол хэргээ хүлээгээд, 2-р хоригдол хэргээ хүлээхгүй бол 1-р

хоригдол 11 жилийн, 2-р хооригдол 1 жилийн ял тус тус авна. Энэ тоглоомын Нэшийн тэнцвэр нь (2,2) стратеги болно. Үүнийг шалгавал

$$\begin{cases} a_{22} < a_{12} & \Rightarrow \quad 7 < 11 \\ b_{22} < b_{21} & \Rightarrow \quad 8 < 10 \end{cases}$$

Өөрөр хэлбэл, хоёулаа хэргээ хүлээхгүй нь Нэшийн тэнцвэрт хүргэнэ. Нөгөө талаар энэ стратеги хоёуланд нь ашигггүй байгаа нь илэрхий байна.

Одоо энэ тоглоомд зөвшилцөх асуудлыг зөвшөөрсөн гэж үзье. Тэгвэл хоригдлууд (1,1) стратегийг сонгоё гэж хуйвалдаж болох юм. Энэ нь тогтворгүй шийд юм. Учир нь 1-р хоригдол хэргээ хүлээсэн байхад 2-р хоригдол гэрээгээ зөрчиж хэргээ хүлээхгүй бол 1-р хоригдлын ял улам нэмэгдэж 11 жил болно. Энэ тохиолдолд зөвшилцөх нь эрсдэлтэй байна.

Тоо хэмжээгээр өрсөлдөх үеийн Курногийн тэнцвэр

Жишээ 2.9 (Курно-Нэшийн тэнцвэр)
i-р пүүс зах зээлд x_i-тоо хэмжээтэй бүтээгдэхүүн нийлүүлнэ. 2 пүүсийн дундаж зардал c-тэй тэнцүү гэж үзье. 2 пүүсийн бүтээгдэхүүн бие биенээ төгс орлуулдаг ба зах зээлийн үнэ p-ээр борлуулна. p үнэ нь зах зээлийн эрэлтээр тодорхойлогдоно. Үүнд:

$$p = \begin{cases} 130 - \rho, & \text{хэрэв} \quad Q < 130 \quad \text{бол} \\ 0, & \text{хэрэв} \quad Q > 130 \quad \text{бол} \end{cases}$$

$Q = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2$, $u_i(x)$ нь i-р пүүсийн ашгийн функц, R_i-пүүсийн орлого, C_i-пүүсийн нийт зардал.
$u_i(x) = R_i - C_i = px_i - cx_i = (p - c)x_i, \quad i = 1, 2,$
$u_1(x) = (p - c)x_1, \quad u_2(x) = (p - c)x_2$
$c = 10$ гэж үзье. Пүүс тус бүр 30, 40, 60 гэсэн үйлдвэрлэл явуулах 3 стратегитэй гэж үзье. $x_1 = x_2 = 30$ үед зах зээлийн үнийг олбол $p = 130 - Q = 130 - 60 = 70$.
$u_i(x) = (p - c)x_i = 60 \cdot 30 = 1800, \quad i = 1, 2$
$x_1 = 60, \quad x_2 = 40$ үед $p = 130 - 100 = 30,$
$u_1(x) = (30 - 10) \cdot 60 = 20 \cdot 60 = 1200,$
$u_2(x) = (30 - 10) \cdot 40 = 20 \cdot 40 = 800.$

$$\begin{array}{llll}
x_1 = 40, & x_2 = 40 & \text{үед} & u_1(x) = u_2(x) = 1600 \\
x_1 = 30, & x_2 = 40 & \text{үед} & u_1 = 1500, \quad u_2 = 2000 \\
x_1 = 30, & x_2 = 60 & \text{үед} & u_1 = 900, \quad u_2 = 1800 \\
x_1 = 40, & x_2 = 30 & \text{үед} & u_1 = 2000, \quad u_2 = 1500 \\
x_1 = 40, & x_2 = 60 & \text{үед} & u_1 = 8000, \quad u_2 = 1200 \\
x_1 = 60, & x_2 = 30 & \text{үед} & u_1 = 800, \quad u_2 = 900
\end{array}$$

пүүс 1 \ пүүс 2	$x_2 = 30$	$x_2 = 40$	$x_2 = 60$
$x_1 = 30$	$(1800, 1800)$	$(u_1,\ u_2)$ $(1500, 2000)$	$(900, 1800)$
$x_1 = 40$	$(2000, 1500)$	$(1600, 1600)$	$(800, 1200)$
$x_1 = 60$	$(800, 900)$	$(1200, 800)$	$(0, 0)$

Нэшийн тэнцвэр нь $x^* = (40, 40)$ болно. Пүүсүүд бүтээгдэхүүний тоо хэмжээгээр зах зээлд өрсөлдөж байгаа үед энэ тэнцвэрийг бас Курно-Нэшийн тэнцвэр гэж нэрлэдэг.

$u_1(40, 40) = \max\limits_{x_1} u_1(x_1, 40) = \max\{1500, 1600, 1200\} = 1600,$

$u_2(40, 40) = \max\limits_{x_2} u_2(40, x_2) = \max\{1500, 1600, 1200\} = 1600$

Энэ тэнцвэр дээрх зах зээлийн үнэ нь $p = 130 - 80 = 50$. Энэ нь ахиу зардал 10-аас их байна. Пүүс тус бүрийн ашиг нь 1600 нэгж.

Жишээ 2.10 (Хоёр пүүсийн хоорондох үнийн өрсөлдөөн)
Хоёр пүүс нь үнийн сонголтуудаа стратеги болгон авч ашгийн хувьд өрсөлдвөл Бертрандын тэнцвэр үүснэ. Өөрөөр хэлбэл, үнүүдээр өрсөлдөж байгаа үеийн Нэш-Курногийн тэнцвэрийг Бетрандын тэнцвэр гэж нэрлэнэ.
Зах зээлийн эрэлтийн функ авч үзвэл $Q = 130 - p, \quad p = 130 - Q$.
1-р пүүсийн ашгийн функц $u_1(p) = (p_1 - c)x_1(p)$,
2-р пүүсийн ашгийн функц $u_2(p) = (p_2 - c)x_2(p)$.
2 пүүсийн бүтээгдэхүүнүүд төгс орлуулдаг ба ахиу зардал нь хоорондоо тэнцүү c болог. 1-р пүүсийн эрэлтийн функц $x_1(p)$ яаж тодорхойлох вэ? Хэрэв $p_1 < p_2$ бол 1-р пүүс нь бүх зах зээлийг эзэлж авна. Хэрэв $p_2 < p_1$ бол 2-р пүүс нь бүх зах зээлийг эзлэх ба 1-р пүүс юу ч зарахгүй болно. Өөрөөр хэлбэл $x_1(p) = 0$. $p_1 = p_2$ бол 2 пүүс зах зээлээ хуваана.

$$x_1(p) = \begin{cases} 130 - p_1, & p_1 < p_2 \\ \dfrac{130 - p_1}{2}, & p_1 = p_2 \\ 0, & p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$x_2(p) = \begin{cases} 130 - p_2, & p_2 < p_1 \\ \dfrac{130 - p_1}{2}, & p_1 = p_2 \\ 0, & p_1 < p_2 \end{cases}$$

Одоо пүүс тус бүрийг үнээ 70, 50, 10 гэж сонгох 3 стратегийн хувилбартай гэж үзье. $c = 10$ байг.

Жишээлбэл, $p_1 = p_2 = 30$ бол $Q = \dfrac{130-70}{2} = 30$ $u_1 = u_2 = (p-c)Q = (70-10)\cdot 30 = 1800$.

$p_1 = 70,\ \ p_2 = 50$ бол 2-р пүүс бүх зах зээлийг эзлэх ба 1-р пүүсийн ашиг 0 байна.

$u_2 = (130-50)\cdot(p-c) = 80\cdot(50-10) = 3200$.

Хэрэв $p_1 = 70,\ \ p_2 = 10$ бол $u_2 = (130-10)\cdot(p_2-c) = 120\cdot 0 = 0$. гэх мэт үргэлжилнэ.

Энэ бодлого нь 2 Бетрандын тэнцвэртэй байна. Эхнийх нь ердийн Нэш-Курногийн тэнцвэр байх $(p_1^*, p_2^*) = (50, 50)$ болно.

2-дахь тэнцвэр нь $(p_1^*, p_2^*) = (10, 10)$. Харин $\beta = p_1 = p_2 = 50 > c = 10$ үед аль нэг пүүс нь Нэшээс зугтааж үнээ ялимгүй ε-ээр багасгавал түүний ашиг эрс өснө.

$u_1 = (p-\varepsilon-10)\cdot(130-p+\varepsilon)$.

Жишээлбэл, $p-\varepsilon = 499.99$ бол $u_1 = (49.99-10)\cdot(130-49.99) \approx 3200$

Энэ нь 2-р пүүсийн хувьд тэнцвэр болж чадахгүй. Иймд ахиу зардал $|c|$-ээс их үнийг үргэлж багасгах замаар их ашиг олох боломжтой болно.

Хэрэв $p_1 = p_2 = c = 10$ үед 2 пүүс хоёулаа үнээ доошлуулбал $u_i = (p-10)Q < 0$ болж алдагдал хүлээнэ. Хэрэв цаашид пүүсүүд үнээ бууруулаад байвал пүүсүүд дампуурна. Хэрэв аль нэг пүүс нь үнээ $p > 10$ болговол зах зээлээ нөгөө пүүст алдаж борлуулалт байхгүй байна. Ашиг нь 0 байсаар л байна. Бетрандын шийд нь энэ үед $\boxed{\text{p=c}}$ болж 2 пүүс нь төгс өрсөлдөөнт зах зээлийн шинжийг агуулна. Учир нь үнэ нь ахиу зардалтай тэнцүү болно.

Үнийн өрсөлдөөн нь тоо хэмжээний өрсөлдөөнийг бодвол илүү хор уршигтай ба ашгийг эрс багасгана. Иймд үнийн өрсөлдөөнийг сүйрүүлдэг өрсөлдөөн гэж нэрлэдэг. Бүх ашгийг тэг болгоно.

Энэ байдлаас гарахын тулд бүтээгдэхүүнийг ялгавартай авч үзье. Ижил бүтээгдэхүүнийг ялгавартай авч үзэхийн тулд чанар, зэрэглэл, brand-нэр, зар сурталчилгаа зэргийг тооцож үзнэ.

Ингэж ялгавартай авч үзсэн бүтээгдэхүүний хувьд аль нэг пүүсийн үнэ зах зээлийн үнээс их байвал зах зээлээ алдахгүй боломж байдаг. Бетрандын өрсөлдөөнд орсон 2 пүүсийг авч үзье.

1-р пүүсийн эрэлтийн функц: $x_1(p) = a - b(p_1 - \overline{p_1})$, $\overline{p_1}$-дундаж үнэ. $\overline{p_1}$-дундаж үнэ нь зах зээлийн дундаж үнэ болно. $\overline{p_1} = \dfrac{p_1+p_2}{2}$

Жишээлбэл, $x_1(p) = 180 - p_1 - (p_1 - \overline{p_1}) = 180 - 2p_1 + \overline{p_1}$.

1-р пүүсийн үнэ 25, 2-р пүүсийн үнэ 15 болог. Тэгвэл зах зээлийн үнэ $\overline{p_1} = \dfrac{15+25}{2} = 20$

1-р пүүсийн борлуулах тоо хэмжээг олбол $x_1(25,15) = 180-25-(25-20) = 150$.

Бүтээгдэхүүнийг ялгаварласны үр дүнд худалдан авагч нар зах зээлийн үнээс дээгүүр худалдан авах боломжтой. Пүүсүүдийн ахиу зардал c болог. Пүүсүүдийн эрэлтийн функцүүдийг бичвэл

$x_1(p_1,p_2) = a - p_1 - (p_1 - \overline{p_1}) = a - 2p_1 + 0.5p_2$
$x_2(p_1,p_2) = b - p_2 - (p_2 - \overline{p_2}) = a - 2p_2 + 0.5p_2,\ \overline{p_1} = 0.5p_2,\quad \overline{p_2} = 0.5p_2$
Пүүсүүдийн ашгийг тооцвол:
$\pi_1(p_1,p_2) = (p_1 - c)(a - 2p_1 + 0.5p_2),$
$\pi_2(p_1,p_2) = (p_2 - c)(b - 2p_2 + 0.5p_2).$
Бетрандын буюу Нэшийн тэнцвэрийг олъё.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = a - 2p_1 + 0.5p_2 - 2(p_1 - c) = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = b - 2p_2 + 0.5p_2 - 2(p_2 - c) = 0 \end{cases}$$

Энэ системийг дараах хэлбэрт оруулбал

$$\begin{cases} 4p_1 - 0.5p_2 = a + 2c \\ 3.5p_2 = b + 2c \end{cases}$$

болох ба системийн шийд нь

$$p_2 = \frac{b + 2c}{3.5}, \quad p_1 = \frac{7a + 16c + b}{7}$$

Бетрандын тэнцвэр болно.

2.3 Холимог стратегитэй биматрицан тоглоом

1 ба 2-р тоглогч нарын стратегийн олонлогууд төгсгөлөг болог.

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$$
$$B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}.$$

Өмнө нь үзсэн жишээнүүдэд, биматрицан тоглоомд цэвэр стратегитэй үеийн Нэшийн тэнцвэр үргэлж орших албагүй байсан. Өөрөөр хэлбэл, Нэшийн тэнцвэр оршиж ч болно, оршихгүй ч байж болно. Тэгвэл тоглогч нар стратегүүдээ тодорхой магадлалтайгаар хэрэгжүүлбэл холимог стратегитэй биматрицан тоглоом үүснэ. Энэ тоглоомд шийд үргэлж оршдог.
1-р тоглогч α_i стратегийг x_i магадлалтайгаар,
2-р тоглогч β_j стратегийг y_j магадлалтайгаар тус тус хэрэгжүүлдэг гэж үзье.
$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ба $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ векторуудыг тоглогч нарын холимог стратегүүд гэж нэрлэе.
Тоглогч нарын хожлын уутгууд A ба B матрицээр өгөгдөнө.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Тоглогч нар (i, j) стратегүүдийг холимог стратегитэйгээр хэрэгжүүлсэн үед 1-р тоглогч $x_i y_j a_{ij}$, 2-р тоглогч $x_i y_j b_{ij}$ хожлуудыг тус тус авна.
1 ба 2-р тоглогч нарын дундаж хожлын утгуудыг тодорхойлбол:

$$f_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{2.7}$$

$$f_2(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \tag{2.8}$$

Үүнд:

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

X ба Y-ээр дараах олонлогуудыг тэмдэглэе.

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m | \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\},$$

$$Y = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n | \sum_{j=1}^{n} y_i = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Тодорхойлолт 2.4. Хэрэв $(x^*, y^*) \in X \times Y$ нь холимог стратегийн хувьд

$$f_1(x^*, y^*) \geq f_1(x, y^*), \quad \forall x \in X, \tag{2.9}$$

$$f_2(x^*, y^*) \geq f_2(x^*, y), \quad \forall y \in Y \tag{2.10}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал (x^*, y^*)-г биматрицан тоглоомын оновчтой холимог стратеги буюу холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр гэж нэрлэнэ.

Нэшийн тэнцвэр (x^*, y^*)-ын хувьд

$$\begin{array}{l} f_1(x^*, y^*) = \max\limits_{x \in X} f_1(x, y^*) \\ f_2(x^*, y^*) = \max\limits_{y \in Y} f_2(x^*, y) \end{array}$$

(2.9) ба (2.10) томъёонуудыг задалж бичвэл

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^*, \quad \forall x \in X, \tag{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i^*y_j^* \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i^*y_j, \quad \forall y \in Y. \tag{2.12}$$

Тухайн тохиолдолд (2.11)-д $x_i = 1, \quad x_j \neq 0, \quad i \neq j$, (2.12)-д $y_j = 1, \quad y_j = 0, \quad j \neq i$ гэж тус тус үзвэл

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^*y_j^* \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^*, \quad i = \overline{1,m} \tag{2.13}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^*y_j^* \geq \sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_i^*, \quad j = \overline{1,n} \tag{2.14}$$

Иймд Нэшийн тэнцвэр (x^*, y^*)-г олохын тулд дараах тэгшитгэл, тэнцэлбишүүдийн системийг бодож боломжит шийдийг олно гэсэн үг юм.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \geq \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j, \quad i = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j \geq \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_i, \quad j = \overline{1,n} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0 \end{cases}$$

Тодорхойлолт 2.5 Хэрэв 2-р тоглогчийн өгөгдсөн стратеги $y^0 \in Y$-ын хувьд

$$f_1(x^0, y^0) = \max_{x \in X} f_1(x, y^0) \tag{2.15}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал $x^0 \in X$-г 1-р тоглогчийн y^0-д харгалзах хариу үйлдлийн хамгийн сайн стратеги гэж нэрлэнэ.

Тодорхойлолт 2.6 Хэрэв 1-р тоглогчийн өгөгдсөн стартеги $\overline{x} \in X$-ын хувьд

$$f_2(\overline{x}, \overline{y}) = \max_{y \in Y} f_2(\overline{x}, y) \tag{2.16}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал $\overline{y} \in Y$-г 2-р тоглогчийн $\overline{x}$-д харгалзах хариу үйлдлийн хамгийн сайн стратеги гэж нэрлэнэ.

Иймд Нэшийн тэнцвэр (x^*, y^*)-ын хувьд $x^* \in X$ нь 1-р тоглогчийн y^*-д харгалзах хариу үйлдлийн хамгийн сайн стратеги, $y^* \in Y$ нь 2-р тоглогчийн x^*-д харгалзах хариу үйлдлийн хамгийн сайн стратеги болох нь илэрхий юм.

Тодорхойлолт 2.7

$$R_1 = \{(x,y) | \max_{z\in X} f_1(z,y) = f_1(x,y), \quad y \in Y\} \tag{2.17}$$

олонлогийг 1-р тоглогчийн оновчтой хариу үйлдлийн олонлог гэж нэрлэнэ.

Тодорхойлолт 2.8

$$R_2 = \{(x,y) | \max_{v\in Y} f_2(x,v) = f_2(x,y), \tag{2.18}$$

олонлогийг 2-р тоглогчийн оновчтой хариу үйлдлийн олонлог гэж нэрлэнэ.

$(x^0, y^0) \in R_1$ гэдгээс x^0 нь 1-р тоглогчийн y^0-д харгалзах хариу үйлдлийн хамгийн сайн стратеги болно. Мөн үүнтэй ижилхэнээр $(x^0, y^0) \in R_2$ гэдгээс y^0 нь 2-р тоглогчийн x^0-д харгалзах хариу үйлдлийн хамгийн сайн стратеги болох нь харагдаж байна. Иймд $(x^0, y^0) \in R_1 \cap R_2$ нь Нэшийн тэнцвэр гэдэг нь илэрхий. Одоо

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix}$$

биматрицан тоглоомыг оновчтой хариу үйлдлийн олонлогууд байгуулах замаар бодъё. Үүний тулд $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ функцүүдийг бичвэл:

$$f_1(x,y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_iy_j = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$
$$f_2(x,y) = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2.$$

Нөгөө талаас $x_2 = 1 - x_1, \quad y_2 = 1 - y_1$ тул эдгээрийг дээрх илэрхийлэлд орлуулбал:

$$\begin{aligned} &f_1(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1(1-y_1) + a_{21}(1-x_1)y_1 + \\ &+a_{22}(1-x_1)(1-y_1) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1 - a_{12}x_1y_1 + a_{21}y_1 - \\ &-a_{21}x_1y_1 + a_{22} - a_{22}x_1 - a_{22}y_1 + a_{22}x_1y_1 = \\ &(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})x_1y_1 + (a_{12} - a_{22})x_1 + (a_{21} - a_{22})y_1 + a_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f_2(x,y) = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1(1-y_1) + b_{21}(1-x_1)y_1 + b_{22}(1-x_1)(1-y_1) = \\ &(b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})x_1y_1 + (b_{12} - b_{22})x_1 + (b_{21} - b_{22})y_1 + b_{22} \end{aligned}$$

Нэшийн тэнцвэрийн хувьд (2.13)-(2.14) биелэгдэх тул

$$\begin{cases} f_1(x,y) \geq \sum\limits_{j=1}^{2} a_{1j}y_j = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = a_{11}y_1 + a_{12} - a_{12}y_1 \\ f_1(x,y) \geq \sum\limits_{j=1}^{2} a_{2j}y_j = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = a_{21}y_1 + a_{22}(1-y_1) \\ f_2(x,y) \geq \sum\limits_{j=1}^{2} b_{1j}y_j = b_{11}y_1 + b_{12} - b_{12}y_1 \\ f_2(x,y) \geq \sum\limits_{j=1}^{2} b_{2j}y_j = b_{21}y_1 + b_{22}(1-y_1) \\ x_1 \geq 0, \quad y_1 \geq 0 \\ x_1 \leq 1, \quad y_1 \leq 1 \end{cases} \tag{$*$}$$

Одоо дээрх илэрхийллийн эхний 2 илэрхийлэлд $f_1(x,y)$-ын утгыг орлуулан тавъя.

$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})x_1y_1 + (a_{12} - a_{22})x_1 + (a_{21} - a_{22})y_1 + a_{22} \geq$$
$$(a_{11} - a_{12})y_1 + a_{12},$$
$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})x_1y_1 + (a_{12} - a_{22})x_1 + (a_{21} - a_{22})y_1 + a_{22} \geq$$
$$(a_{21} - a_{22})y_1 + a_{22}.$$

$M = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \quad m = a_{22} - a_{12}$ гэж орлуулга хийж дээрх тэнцэлбишүүдийг хувиргавал

$$\begin{cases} M(1-x_1)y_1 - m(1-x_1) \leq 0 \\ Mx_1y_1 - mx_1 \geq 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

болох ба (x_1, y_1) нь $0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1$ нөхцлүүдийг бас хангана. Өөрөөр хэлбэл, Нэшийн тэнцвэр $(x,y) = (x_1, 1-x_1, y_1, 1-y_1)$ нь дараах системийг хангана.

$$\begin{cases} M(1-x_1)y_1 - m(1-x_1) \leq 0 \\ Mx_1y_1 - mx_1 \geq 0 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_1 \leq 1 \end{cases}$$

Энэхүү систем нь шугаман биш тул бодоход хүндрэлтэй ба шинжилгээ хийж бодъё.
Дараах тохиолдлуудыг авч үзье.
1^0. $M = m = 0$. Эндээс $a_{22} = a_{12}$ ба $a_{11} = a_{21}$.
Энэ үед 1-р тоглогч ямар ч стартеги $x_1 \in [0,1]$ сонгох нь түүний хувьд ялгаагүй байна.

2^0. $M = 0, \quad m > 0$. Тэгвэл $-m(1-x_1) \leq 0$ ба $-mx_1 \geq 0$ болох ба эндээс $x_1 = 0, \quad y_1 \in [0,1]$.

3^0. $M = 0, \quad m < 0$. Тэгвэл $(1 - x_1) \leq 0$ ба $x_1 \geq 0$.
Эндээс шийд нь $x_1 = 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1$.

4^0. $M > 0$. Тэгвэл $M(1 - x_1)y_1 - m(1 - x_1) \leq 0$ ба $M_1 x_1 y_1 - m x_1 \geq 0$.
Үүнийг шинжилье. Хэрэв $x_1 = 1$ бол

$$\begin{cases} M(1-x_1)y_1 - m(1-x_1) = 0 \\ My_1 - m \geq 0 \end{cases}$$

Иймд $y_1 \geq \dfrac{m}{M}$. Хэрэв $x_1 = 0$ бол

$$\begin{cases} M(1-x_1)y_1 - m(1-x_1) = My_1 - m \leq 0 \\ Mx_1y_1 - mx_1 = 0 \geq 0 \end{cases}$$

Эндээс $y_1 < \dfrac{m}{M}$. Хэрэв $0 < x_1 < 1$ бол

$$\begin{cases} M(1-x_1)y_1 - m(1-x_1) \leq 0 \\ Mx_1y_1 - mx_1 \geq 0 \end{cases}$$

Эндээс

$$\begin{cases} My_1 - m \leq 0 \\ My_1 - m \geq 0 \end{cases}$$

болох ба $y_1 = \dfrac{m}{M}$ байна.
Иймд дээрх тохиолдлуудыг нэгтгэн бичвэл:

$$\begin{array}{lll} \text{Хэрэв} \quad x_1 = 0 & \text{бол} & 0 \leq y_1 \leq \dfrac{m}{M} \\ \text{Хэрэв} \quad 0 < x_1 < 1 & \text{бол} & y_1 = \dfrac{m}{M} \\ \text{Хэрэв} \quad x_1 = 1 & \text{бол} & y_1 \geq \dfrac{m}{M} \end{array}$$

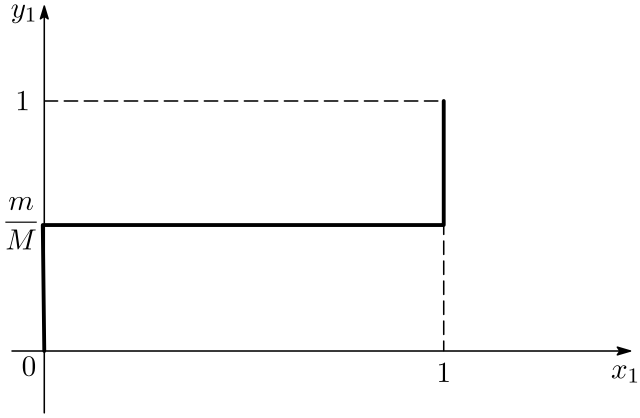
5^0. $M < 0$ үед

$$\begin{cases} M(1-x_1)y_1 - m(1-x_1) \leq 0 \\ Mx_1y_1 - mx_1 \geq 0 \end{cases}$$

гэдгийг дахин $x_1 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_1 < 1$ тохиолдолд шинжлэн шийдийг бичвэл

$$\begin{array}{lll} \text{Хэрэв} \quad x_1 = 0 & \text{бол} & y_1 \geq \dfrac{m}{M} \\ \text{Хэрэв} \quad 0 < x_1 < 1 & \text{бол} & y_1 = \dfrac{m}{M} \\ \text{Хэрэв} \quad x_1 = 1 & \text{бол} & 0 \leq y_1 \leq \dfrac{m}{M} \end{array}$$

Одоо Зураг 2.1 дээр (2.12) системийн шийдийг $M > 0$ үед дүрслэн харуулбал:



Зураг 2.1 ($M > 0$ үед)

Жишээлбэл, 2-р тоглогч нь $y = (y_1, y_2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ стратегийг ашиглахаар шийдсэн гэе. $M = 2$, $m = 1$ гэж үзье. $y_1 = \frac{1}{4} < \frac{m}{M} = \frac{1}{2}$ тул энэ нь 4^0 тохиолдол болох бөгөөд энэ үед 1-р тоглогчийн сонгох хамгийн сайн стратеги бол $x_1 = 0$. Өөрөөр хэлбэл, $x = (0, 1)$.

Зураг 2.1 дээр тодоор дүрсэлсэн шугам нь $y \in Y$ өгөгдсөн үеийн 1-р тоглогчийн оновчтой хариу үйлдлийн олонлог болно. Нэшийн тэнцвэр нь энэ шугам дээр байрлана.

$M > 0$ үед R_1 олонлогийг байгуулбал:

$$R_1 = \{(0, y)|0 \leq y \leq \frac{m}{M}\} \cup \{(x, \frac{m}{M})|0 < x < 1\} \cup \{(1, y)|\frac{m}{M} \leq y \leq 1\} \quad (2.20)$$

Одоо 2-р тоглогчийн хувьд түүний онновчтой хариу үйлдлийн олонлогийг байгуулъя. Үүний тулд (*) системийн сүүлийн 2 илэрхийллийг өмнөхтэй төсөөтэйгээр хувиргая.

Жишээлбэл, $R = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $r = b_{22} - b_{21}$ тэмдэглээ хийвэл (*) нь дараах хэлбэрт шилжинэ.

$$\begin{cases} Rx_1(1 - y_1) - r(1 - y_1) \leq 0 \\ Rx_1 y_1 - r y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Дахин дараах тохиолдлууд авч үзье.

1^0. $R = 0$, $r = 0$ үед шийд $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq y_1 \leq 1$ байна.

2^0. $R = 0$, $r > 0$ үед шийд $0 \leq x_1 \leq 1$, $y_1 = 0$

3^0. $R = 0$, $r < 0$ үед шийд $0 \leq x_1 \leq 1$, $y_1 = 1$

4^0. $R > 0$ үед шийд

Хэрэв $y_1 = 0$ бол $0 \leq x_1 \leq \frac{r}{R}$

Хэрэв $0 < y_1 < 1$ бол $x_1 = \frac{r}{R}$

Хэрэв $y_1 = 1$ бол $1 \geq x_1 \geq \frac{r}{R}$

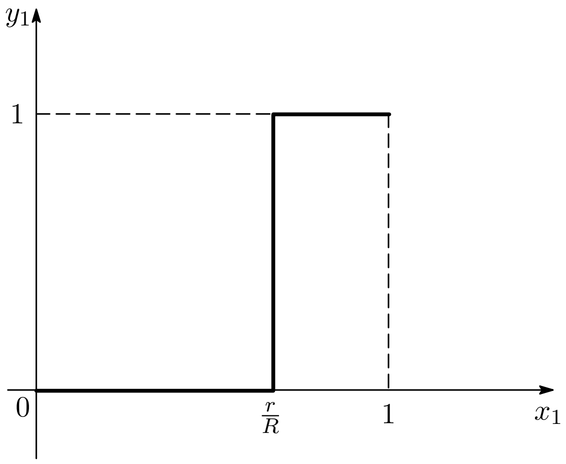
5^0. $R < 0$ үед шийд

Хэрэв $y_1 = 0$ бол $0 \leq x_1 \leq \frac{r}{R}$,

Хэрэв $0 < y_1 < 1$ бол $x_1 = \frac{r}{R}$,

Хэрэв $y_1 = 1$ бол $x_1 \geq \frac{r}{R}$.

Тэгвэл 1-р тоглогчийн $x \in X$ стратеги өгөгдсөн үед 2-р тоглогчийн оновчтой хариу үйлдлийн олонлогийг дүрслэн үзүүлбэл:



Зураг 2.2 ($R < 0$)

Иймд $R < 0$ үед 2-р тоглогчийн оновчтой хариу үйлдлийн олонлог дараах хэлбэртэй байна.

$$R_2 = \{(x,0)|0 \leq x \leq \frac{r}{R}\} \cup \{(\frac{r}{R}, y)|0 < y < 1\} \cup \{(x,1)|\frac{r}{R} \leq x \leq 1\} \quad (2.21)$$

Нэшийн тэнцвэр R_2 олонлогт харъяалагдах нь илэрхий юм. Нөгөө талаас Нэшийн тэнцвэр R_1 ба R_2 олонлогуудын огтлолцол дээр байх нь илэрхий байна. Иймд $M \neq 0$, $R \neq 0$ үед холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр $(x, y) \subset R_1 \cap R_2$ болох ба

$$x_1 = \frac{r}{R} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \quad x_2 = 1 - x_1,$$

$$y_1 = \frac{m}{M} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}, \quad y_2 = 1 - y_1,$$

Жишээ 2.11.

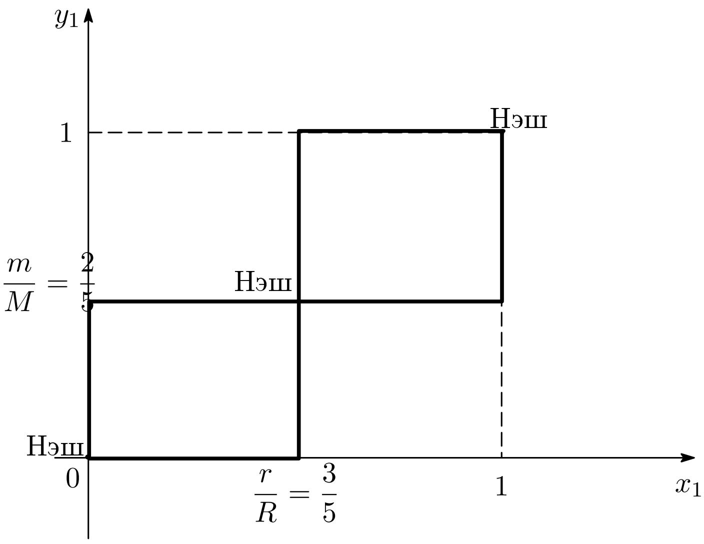
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

тоглоомын Нэшийн тэнцвэрийг олъё.

Өмнөх үр дүнгүүдийг ашиглавал:

$M = 2 - (-1) - (-1) + 1 = 5 > 0$
$m = 1 - (-1) = 2, \quad \dfrac{m}{M} = \dfrac{2}{5},$
$R = 5, \quad r = 3, \quad \dfrac{r}{R} = \dfrac{3}{5}$
R_1 ба R_2 олонлогуудыг байгуулж харвал энэ тоглоомд 3 Нэшийн тэнцвэр оршино. Үүнд $(x^1, y^1), \quad (x^2, y^2)$ ба (x^3, y^3).
$x^1 = (0,1), \quad y^1 = (0,1), \; x^2 = (1,0), \; y^2 = (1,0), \; x^3 = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{5}\right),$
$y^3 = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}\right).$
Эндээс цорын ганц холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр нь (x^3, y^3) юм. Үүнийг зурган дээр дүрсэлбэл:



Зураг 2.3

Тоглогч нарын дундаж хожлын утгуудыг олбол:
$f_1(x^3, y^3) = \sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2} a_{ij}x_i^3 y_j^3 = a_{11}x_1^3y_1^3 + a_{12}x_1^3y_2^3 + a_{21}x_2^3y_1^3 + a_{22}x_2^3y_2^3 =$
$2 \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{5} + (-1) \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3}{5} + (-1) \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}$
$f_2(x^3, y^3) = \sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2} b_{ij}x_i^3 y_j^3 = \dfrac{1}{5}.$

Жишээ 2.12. Хоёр этгээд T_1 ба T_2 хэмжээтэй хөрөнгийг тодорхой салбарт хөрөнгө оруулах 2 стратегитэй. Хэрэв тэд хамтарч ижилхэн хувиар хөрөнгө оруулахгүй бол аль аль нь ашиггүй. Тоглоом дараах биматрицан тоглоомоор өгөгдөнө.

$I \backslash II$	T_1	T_2
T_1	$(1,2)$	$(0,0)$
T_2	$(0,0)$	$(2,1)$

Жишээлбэл, 2 этгээд хоёулаа T_1 хөрөнгө оруулалт хийвэл 1 ба 2-р этгээдүүд харгалзан 1 ба 2 гэсэн хожил буюу ашиг олдог гэж үзье. Энэ бодлогын хувьд (T_1, T_1) ба (T_2, T_2) стратегүүд нь цэвэр стратегитэй Нэшийн тэнцвэр болох нь илэрхий байна. Одоо энэ тоглоомын холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэрийг олъё.
Бодлогын нөхцлийг бичвэл:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоглогч нарын холимог стратегүүд $x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$.
Тоглогч нарын хожлын функцүүдийг тодорхойлъё.
$f_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2} a_{ij}x_iy_j = x_1y_1 + x_2y_2 = x_1y_1 + 2(1-x_1)(1-y_1) = 3x_1y_1 - 2x_1 - 2y_1 + 2 = x_1(3y_1 - 2) - 2y_1 + 2.$
1-р этгээдийн оновчтой холимог стратегийн олонлог R_1-г байгуулахын тулд $f_1(x,y)$ функцийн максимум утгыг олох шаардлагатай.
Өөрөөр хэлбэл, y өгөдсөн үед

$$\max_{0\le x_1\le 1} f_1(x,y) = \max_{0\le x_1\le 1}[x_1(3y_1-2) - 2y_1 + 2]$$

бодлогыг бодно гэсэн үг юм.
Хэрэв $3y_1 - 2 > 0$ бол $f_1(x,y)$ функц нь $x_1 = 1$ дээр, $3y_1 - 2 < 0$ бол $x_1 = 0$ дээр тус тус максимум утгаа авна. Хэрэв $3y_1 - 2 = 0$ бол $y_1 = \dfrac{2}{3}$ болох ба $f_1(x,y) = \dfrac{2}{3}$.
Иймд

$$\max_{0\le x_1\le 1} f_1(x,y) =$$

$$= \begin{cases} y_1, & \text{Хэрэв } 3y_1 - 2 > 0 \Rightarrow \quad y_1 > \dfrac{2}{3}, \quad x_1 = 1 \\ \dfrac{2}{3}, & \text{Хэрэв } y_1 = \dfrac{2}{3}, \quad x_1 \in [0,1] \\ -2y_1 + 2 & \text{Хэрэв } 3y_1 - 2 < 0 \Rightarrow 4y_1 < \dfrac{2}{3}, \quad x_1 = 0 \end{cases}$$

R_1 олонлогийн тодорхойлолтыг дахин санавал

$$R_1 = \{(x_1^*, y_1) \in [0,1]\times[0,1] | \max_{x\in X} f_1(x,y) = f_1(x^*, y)\}$$

Тэгвэл

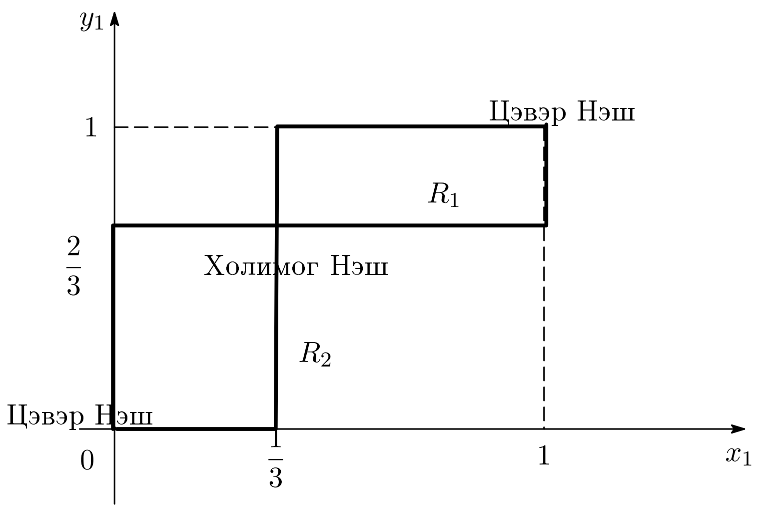
$$R_1=\{(1,y_1),\ \ \frac{2}{3}<y_1\le 1\}\cup\{(x_1,\frac{2}{3}),\ 0\le x_1\le 1\}\cup\{(0,y_1),0\le y_1\le\frac{2}{3}\}.$$

Энэ олонлог нь 1-р тоглогчийн хариу үйлдлийн оновчтой олонлог юм. Хэрэв $y_1=\dfrac{1}{2}$ бол $x_1=0$ болох ба $f_1(0,\dfrac{1}{2})=1$.
Дээрхтэй төсөөтэйгээр $f_2(x,y)$-ыг байгуулбал
$f_2(x,y)=2x_1y_1+(1-x_1)(1-y_1)=y_1(3x_1-1)-x_1+1$.

$$\max_{y\in Y}f_2(x,y)=\max_{0\le y_1\le 1}f_2(x_1,y_1)=$$

$$=\begin{cases}-x_1+1, & \text{Хэрэв}\quad 0\le x_1\le\dfrac{1}{3},\quad y_1=0\\ \dfrac{2}{3}, & \text{Хэрэв}\quad x_1=\dfrac{1}{3},\quad y_1\in[0,1]\\ 2x_1 & \text{Хэрэв}\quad \dfrac{1}{3}\le x_1\le 1,\quad y_1=1\end{cases}$$

R_2-ийн тодорхойлолтыг бичвэл:
$R_2=\{(x,y^*)\in X\times Y|\max\limits_{y\in Y}f_2(x,y)=f_2(x,y^*)\}$
эсвэл $R_2=\{(x_1,y_1^*)\in[0,1]\times[0,1]|\max\limits_{0\le y_1\le 1}f_2(x,y)=f_2(x,y^*)\}$
Тэгвэл
$R_2=\{(x_1,0)|0\le x_1<\dfrac{1}{3}\}\cup\{(\dfrac{1}{3},y_1),\ 0\le y_1\le 1\}\cup\{(x_1,1),\dfrac{1}{3}<x_1\le 1\}$
болох ба R_1,R_2-ийг зураг 2.3 дээр дүрсэлбэл



Нэшийн тэнцвэрүүд нь R_1 ба R_2 олонлогийн огтолцол дээр оршино.
Жишээлбэл, $(x^1,y^1)\in R_1\cap R_2$, $(x^2,y^2)=\Big((\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}),\ (\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3})\Big)\in R_1\cap R_2$, $(x^3,y^3)=((1,0),(1,0))\in R_1\cap R_2$ цэгүүд нь Нэшийн тэнцвэрийн цэгүүд юм.
Хэрэв 1-р тоглогч T_1 стратегийг $x_1=\dfrac{1}{2}$ магадлалтайгаар хэрэгжүүлэхээр

бол 2-р тоглогч T_1 стратегийг $y_1 = 1$ магадлалтайгаар хэрэгжүүлэх нь оновчтой юм.

$$f_1(x^1, y^1) = 2, \quad f_2(x^1, y^1) = 1,$$
$$f_1(x^2, y^2) = 1, \quad f_2(x^2, y^2) = 2,$$
$$f_1(x^3, y^3) = \frac{2}{3} = f_2(x^3, y^3).$$

гэдгийг хялбархан шалгаж болно. Холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр нь

$$(x^3, y^3) = \Big((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \quad (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\Big).$$

Холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэрийн үед 2 тоглогчийн дундаж хожлын утгууд хоорондоо тэнцүү $(= \frac{2}{3})$ байгаа боловч энэ нь тэдгээрийн цэвэр стратегитэй Нэшийн тэнцвэр дэх хожлын утгуудаас бага байгаа нь харагдаж байна. Гэхдээ холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр хоёр тоглогч хоёуланд нь боломжийн их хожлын утгууд олгож байна. Хэрэв аль нэг тоглогч цэвэр стратегитэй Нэшийн тэнцвэр сонговол 2 тоглогчийн хожлын утгууд хоёулаа $\frac{2}{3}$-ээс их болж сайжирж байна. Хэрэв 2 тоглогч тоглоомын үр дүнг "шударга" байлгахыг эрмэлзвэл тэд холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэрийг сонгох ба тус бүр нь цэвэр стратегитэй Нэшийн тэнцвэр дэх хожлын утгуудаас бага хожлын утгууд авч байна.

Холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр оршин байх асуудалд дараах теорем хариу өгнө.

Теорем 2.2. (Нэш) Холимог стратегитэй дурын биматрицан тоглоомд Нэшийн тэнцвэр үргэлж оршино.

Баталгаа. Хожлын функцүүдийг тодорхойлъё.

$$f_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \quad x \in X,$$
$$f_2(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j, \quad y \in Y,$$

үүнд $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}, \quad B = \{b_{ij}\}_{m \times n}$ тоглогч нарын хожлын утгуудаар зохиогдсон матриц, f_1, f_2 нь дундаж хожлын утгууд,

$$X = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m | \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m\},$$
$$Y = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n | \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

X ба Y олонлогууд нь гүдгэр компакт олонлогууд нь илэрхий юм. Тоглогч нарын хариу үйлдлийн олонлогуудыг дараах хэлбэрээр тодорхойлъё.

$$\overline{R_1}(y) = \{x \in X | f_1(x,y) = \max_{\overline{x} \in X} f_1(\overline{x}, y)\}$$
$$\overline{R_2}(x) = \{y \in Y | f_2(x,y) = \max_{\overline{y} \in Y} f_2(x, \overline{y})\}$$

f_1 ба f_2 функцүүд тасралтгүй бөгөөд X ба Y нь компакт тул $\max_{\overline{x} \in X} f_1(\overline{x}, y)$, $\max_{\overline{y} \in Y} f_2(x, \overline{y})$ утгууд оршино. Иймд $\overline{R_1}(y) \neq \emptyset$, $\overline{R_2}(x) \neq \emptyset$.
Одоо дараах олонлог утгатай буулгалтыг тодорхойлъё.
$\varphi : (x,y) \in X \times Y \to \overline{R_1}(y) \times \overline{R_2}(x) \subset X \times Y$.
$(x', y') \in \varphi(x,y)$ гэдгээс $x' \in \overline{R_1}(y)$ ба $y' \in \overline{R_2}(x)$.
Нэшийн тэнцвэр (x^*, y^*)-ийн хувьд $(x^*, y^*) \in \varphi(x^*, y^*)$ байх нь илэрхий юм.
$x \to f_1(x,y)$, $y \to f_2(x,y)$, $y \to f_1(x,y)$, $x \to f_2(x,y)$ буулгалтууд нь шугаман гэдэг нь илэрхий. Түүнчлэн $\varphi(x,y)$ олонлог нь гүдгэр, зааглагдсан битүү олонлог гэдгийг хялбархан харуулж болно. Мөн $\varphi(x,y)$ нь дээрээсээ хагас тасралтгүй буулгалт гэдгийг харуулж болно. Иймд $\varphi(x,y)$ буулгалтын хувьд Какутаний ([12]) үл хөдлөх цэгийн тухай теоремын нөхцөл биелэгдэж байна. Иймд Какутаний теорем ёсоор $(x^*, y^*) \in \varphi(x^*, y^*)$ байх $x^* \in \overline{R_1}(y^*)$ ба $y^* \in \overline{R_2}(x^*)$ цэгүүд оршино. Өөрөөр хэлбэл,

$$f_1(x^*, y^*) = \max_{x \in X} f_1(x, y^*) \geq f_1(x, y^*), \quad \forall x \in X,$$
$$f_2(x^*, y^*) = \max_{y \in Y} f_2(x^*, y) \geq f_2(x^*, y), \quad \forall y \in Y.$$

Эндээс (x^*, y^*) цэг нь Нэшийн тэнцвэр болох нь харагдаж байна. Теорем батлагдав.

2.4 Нэшийн тэнцвэрийг дотоод цэгийн аргаар олох

Нэшийн тэнцвэр олох асуудлыг дараах оптимизацийн бодлого болгон томъёолъё.

$$f_1(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \to \max_{x \in X} \tag{2.22}$$

$$f_2(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \to \max_{y \in Y} \tag{2.23}$$

(2.22) ба (2.23) бодлогуудад f_1 функц нь x-ээр хотгор, f_2 функц нь y-ээр хотгор тул экстремум байх зайлшгүй нөхцөл нь хүрэлцээтэй болно. Зайлшгүй нөхцлийг бичихийн тулд

$$x_m = 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}) = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} x_i,$$
$$y_n = 1 - (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_j$$

гэдгийг харгалзан үзэж f_1 ба f_2-д орлуулна.

$$f_1(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m-1} x_i a_{ij} y_j + \Big(1 - \sum_{k=1}^{m-1} x_k\Big) a_{mj} y_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(a_{mj} y_j + \sum_{i=1}^{m-1} x_i a_{ij} y_j - \sum_{k=1}^{m-1} x_k (a_{mj} y_j)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(a_{mj} y_j + \sum_{i=1}^{m-1} [a_{ij} - a_{mj}] x_i y_j\Big) = E_1(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_n);$$

$$f_2(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} x_i y_j + b_{in} x_i y_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} x_i y_j + \Big(1 - \sum_{k=1}^{n-1} y_k\Big) b_{in} x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} x_i y_j - \sum_{k=1}^{n-1} y_k b_{in} x_i + b_{in} x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\Big(b_{in} x_i + \sum_{j=1}^{n-1} [b_{ij} - b_{in}] y_j x_i\Big) = E_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}).$$

Иймд (2.22) ба (2.23) бодлого нь дараах бодлого руу шилжинэ.

$$\begin{cases} E_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_1, y_2, \ldots, y_n) \to \max\limits_{x} \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_{m-1} \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{m-1} x_i \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \to \max\limits_{y} \\ y_1 \geq 0, \ldots, y_{n-1} \geq 0, \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j \leq 1 \end{cases}$$

Зайлшгүй нөхцлийг бичвэл:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_n)}{\partial x_k} = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j [a_{kj} - a_{mj}] = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \dfrac{\partial E_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2 \ldots, y_{n-1})}{\partial y_s} = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i [b_{is} - b_{im}] = 0, \\ s = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{2.24}$$

Холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр нь дараах системийн шийд болно.

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} y_j[a_{kj}-a_{mj}]=0, \qquad k=1,2,\dots,m-1, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i[b_{is}-b_{im}]=0, \qquad s=1,2,\dots,n-1, \\ x_m=1-\sum\limits_{i=1}^{m-1} x_i, \quad y_n=1-\sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j. \end{cases} \tag{2.25}$$

Хэрэв (2.25) системийн шийдүүд (x,y) нь $x_i \geq 0,\ i=\overline{1,m}$ ба $y_j \geq 0,\ \ j=\overline{1,n}$ нөхцлийг хангаж байвал энэ нь холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр болно.

Жишээ 2.13. Жишээ 2.12-д авч үзсэн тоглоомын шийдийг дотоод цэгийн аргаар очъё. Тоглоомын нөхцөл ёсоор тоглогч нарын хожлын функцүүд
$f_1(x,y)=x_1y_1+2x_2y_2$ ба
$E_1(x_1,y_1)=x_1(3y_1-2)-2y_1+2.$
$f_2(x,y)=2x_1y_1+x_2y_2=2x_1y_1+(1-x_1)(1-y_1)=2x_1y_1+1-x_1-y_1+x_1y_1=3x_1y_1-y_1-x_1+1,$
$E_2(x_1,y_1)=y_1(3x_1-1)-x_1+1.$
тул

$$\frac{\partial E_1(x_1,y_1)}{\partial x_1}=3y_1-2=0 \Rightarrow y_1=\frac{2}{3},\ y_2=1-y_1=\frac{1}{3}$$
$$\frac{\partial E_2(x_1,y_1)}{\partial y_1}=3x_1-1=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3},\ \ x_2=1-x_1=\frac{2}{3}$$

Иймд холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр нь $x^*=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $y^*=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ байна.

Жишээ 2.14

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

биматрицан тоглоомын Нэшийн тэнцвэрийг олъё.
Хожлын функцүүдийг зохиоё.
$f_1(x,y)=2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2=2x_1y_1-x_1(1-y_1)-(1-x_1)y_1+(1-x_1)(1-y_1)=5x_1y_1-2x_1-2y_1+1,$
$f_2(x,y)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2=x_1y_1-x_1(1-y_1)-(1-x_1)y_1+2(1-x_1)(1-y_1)=5x_1y_1-3x_1-3y_1+2,$
$f_1(x,y)=E_1(x_1,y_1)=5x_1y_1-2x_1-2y_1+1,$
$f_2(x,y)=E_2(x_1,y_1)=5x_1y_1-3x_1-3y_1+2.$
Тухайн уламжлалуудыг олж тэгтэй тэнцүүлбэл:

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1}=5y_1-2=0 \Rightarrow y_1=\frac{2}{5},\ y_2=\frac{3}{5}$$
$$\frac{\partial E_2}{\partial y_1}=5x_1-3=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{5},\ \ x_2=\frac{2}{5}$$

Холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр нь:

$$x^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) \text{ ба } y^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Жишээ 2.15

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

биматрицан тоглоомын холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэрийг олъё.

$$f_1(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j = -2x_1y_1 + 5x_1y_2 + x_1y_3 - 3x_2y_1 +$$
$$+2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

$x_3 = 1 - x_1 - x_2$ тул үүнийг энэ илэрхийлэлд орлуулбал:

$$E_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = -2x_1y_1 + 5x_1y_2 + x_1y_3 - 3x_2y_1 + 2x_2y_2 +$$
$$+3x_2y_3 + 2y_1(1 - x_1 - x_2) + (1 - x_1 - x_2)y_2 + 3y_3(1 - x_1 - x_2) =$$
$$= -2x_1y_1 + 5x_1y_2 + x_1y_3 - 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 +$$
$$+2y_1 - 2x_1y_1 - 2y_1x_2 + y_2 - x_1y_2 - x_2y_2 + 3y_3 - 3x_1y_3 - 3y_3x_2 =$$
$$= -4x_1y_1 + 4x_1y_2 - 2x_1y_3 - 5x_2y_1 + x_2y_2 + 2y_1 + y_2 + 3y_3.$$

$$f_2(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_{ij}x_iy_j = -4x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_1y_3 - 3x_2y_1 +$$
$$+x_2y_2 + 4x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2 - x_3y_3.$$

$y_3 = 1 - y_1 - y_2$ гэдгийг харгалзан үзэж орлуулбал:

$$E_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = -4x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_1(1 - y_1 - y_2) - 3x_2y_1 +$$
$$+x_2y_2 + 4x_2(1 - y_1 - y_2) + 3x_3y_1 + x_3y_2 - x_3(1 - y_1 - y_2) =$$
$$= -4x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_1 - 4x_1y_1 - 4x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2 + 4x_2 -$$
$$-4x_2y_1 - 4x_2y_2 + 3x_3y_1 + x_3y_2 - x_3 + x_3y_1 + x_3y_2 =$$
$$= -8x_1y_1 - 6x_1y_2 + 4x_1 - 7x_2y_1 + 4x_2 - 3x_2y_2 - x_3 + 2x_3y_2 + 4x_3y_1.$$

$E_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)$ ба $E_2(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)$ функцүүдийн $\dfrac{\partial E_1}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial E_2}{\partial y_j}$ тухайн уламжлалуудыг олж (2.25) системийг зохиовол:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_1}{\partial x_1} = -4y_1+4y_2-2y_3=0 \\ \dfrac{\partial E_1}{\partial x_2} = -5y_1+y_2=0 \\ \dfrac{\partial E_2}{\partial y_1} = -8x_1-7x_2+4x_3=0 \\ \dfrac{\partial E_2}{\partial y_2} = -6x_1-3x_2+2x_3=0 \\ x_3=1-x_1-x_2 \\ y_3=1-y_1-y_2 \end{cases}$$

Системийг эмхэтгэн дараах хэлбэрт бичвэл:

$$\begin{cases} -2y_1+6y_2-2=0 \\ -5y_1+y_2=0 \\ -12x_1-11x_2+4=0 \\ -8x_1-5x_2+2=0 \end{cases}$$

Энэхүү системийн шийд нь:

$$y_1=\frac{1}{14},\quad y_2=\frac{5}{14},\quad x_1=\frac{1}{14},\quad x_2=\frac{4}{14}$$

болох ба $x_3=\dfrac{9}{14}$, $y_3=\dfrac{8}{14}$ болж $y_j\geq 0$, $x_i\geq 0$, $(i,j=1,2,3)$ нөхцлүүдийг хангаж байгаа тул энэ тоглоомын холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр нь

$$x=\Big(\frac{1}{14},\ \frac{4}{14},\ \frac{9}{14}\Big),\quad y=\Big(\frac{1}{14},\ \frac{5}{14},\ \frac{8}{14}\Big).$$

Хожлын утгуудыг олбол

$$f_1(x,y)=\frac{31}{14},\quad f_2(x,y)=\frac{11}{14}.$$

Мөн энэ тоглоомд $\overline{x}=(0,0,1)$, $\overline{y}=(1,0,0)$ ба $\widetilde{x}=(0,1,0)$, $\widetilde{y}=(0,0,1)$ гэсэн цэвэр стратегитэй Нэшийн тэнцвэрүүд зэрэгцэн оршиж байгааг хялбархан ажиглаж болно.
Үүнд: $f_1(\overline{x},\overline{y})=2$, $f_2(\overline{x},\overline{y})=3$ ба $f_1(\widetilde{x},\widetilde{y})=3$, $f_2(\widetilde{x},\widetilde{y})=4$.

2.5 Нэшийн тэнцвэрийг шугаман биш программчлалын аргаар олох

Холимог стратегитэй биматрицан тоглоом авч үзье.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ба $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ нь холимог стратегүүд.
$f_1(x, y)$ ба $f_2(x, y)$ нь хожлын утгууд.

$$f_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j,$$

$$f_2(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i y_j,$$

$$X = \{x \in R^m | \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\},$$

$$Y = \{y \in R^n | \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Теорем 2.3. *$(x^*, y^*) \in X \times Y$ нь холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь (x^*, y^*, p^*, q^*) нь скаляр тоо p^* ба q^*-ийн хувьд дараах шугаман биш програмчлалын шийд болох явдал юм.*
Үүнд:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_i y_j + \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_i y_j - p - q \to \max\limits_{(x,y,p,q)} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq p, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} b_{ij}x_i \leq q, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_i \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1 \end{cases} \tag{2.26}$$

Баталгаа. (x^*, y^*) нь Нэшийн тэнцвэр болох зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$f_1(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* y_j^* \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j^*, \quad \forall x \in X \tag{2.27}$$

$$f_2(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i^* y_j^* \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i^* y_j, \quad \forall x \in Y \tag{2.28}$$

Хэрэв дээрх 2 тэнцэтгэл бишд

$x = \underbrace{(0,\dots,1,\dots,0)}_{i}$, $i=\overline{1,m}$, $y = \underbrace{(0,\dots,1,0\dots,0)}_{j}$, $j=\overline{1,n}$, гэж дэс дараалан орлуулбал

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_j x_i^* y_j^* \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^*, \quad i=1,2,\dots,m \tag{2.29}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i^* y_j^* \geq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i^*, \quad i=1,2,\dots,n \tag{2.30}$$

Нөгөө талаас, ямар нэг хос $(x^*,y^*) \in X\times Y$-ын хувьд (2.29) ба (2.30) нөхцөл биелэгдэж байвал (x^*,y^*) нь Нэшийн тэнцвэр болно. Үүнийг харуулахын тулд дурын $(x,y)\in X\times Y$-г сонгон авъя. (2.29) тэнцэтгэл бишийн баруун ба зүүн талыг x_i-ээр, (2.30)-ын баруун ба зүүн талуудыг y_j-ээр тус тус үржүүлж нэмье.
Өөрөөр хэлбэл,

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^*\right) \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^*, \quad \forall x\in X,$$

$$\sum_{l=1}^{n} y_l \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i^* y_j^*\right) \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i^* y_j, \quad \forall y\in Y.$$

$\sum\limits_{k=1}^{m} x_k = \sum\limits_{l=1}^{n} y_l = 1$ гэдгийг харгалзан үзвэл

$$f_1(x^*,y^*) \geq f_1(x,y^*), \quad \forall x\in X$$
$$f_2(x^*,y^*) \geq f_2(x,y^*), \quad \forall y\in Y$$

болж (x^*,y^*) нь Нэшийн тэнцвэр болох нь харагдаж байна. Иймд (2.29) ба (2.30) нөхцөл нь Нэшийн тэнцвэр байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл болно. $(x^*,y^*)\in X\times Y$ нь Нэшийн тэнцвэр бологь.
Скаляр тоо p^*, q^*-г дараах дүрмээр тодорхойлъё.
$p^* = f_1(x^*,y^*), \quad q = f_2(x^*,y^*)$.
(x^*,y^*,p^*,q^*) цэг нь (2.26) бодлогын боломжит цэг гэдгийг харуулъя. $x^*\in X$ ба $y^*\in Y$ тул $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^* = 1, \quad x_i^*\geq 0,\ i=\overline{1,m}, \ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^* = 1, \quad y_j^*\geq 0, \quad j=1,2,\dots,n$.
Нэшийн тэнцвэр гэдгээс

$$p^* = f_1(x^*,y^*) \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^*$$

$$q^* = f_2(x^*, y^*) \geq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^*$$

биелэгдэж байгаа учир (x^*, y^*, p^*, q^*) нь (2.26) бодлогын зааглалыг хангаж байгаа буюу боломжит цэг болно.
Одоо (x^*, y^*, p^*, q^*) нь

$$F(x, y, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j - p - q$$

функцийн (глобаль) максимумын цэг болно гэдгийг харуулъя. Дурын боломжит цэг (x, y, p, q)-ын хувьд

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq p, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \leq q, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ x_i \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1. \end{cases}$$

биелэгдэнэ. Энэ зааглалын 1 ба 2-р тэнцэтгэл бишийн баруун зүүн талудыг x_i ба y_j-ээр харгалзуулж үржүүлэн нэмбэл:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j \leq p \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = p \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij} x_i y_j \leq q \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = q \end{cases}$$

Эндээс

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_i y_j - p - q \leq 0.$$

Иймд дурын боломжит (x, y, p, q)-ын хувьд $F(x, y, p, q) \leq 0$ болж байна.
Хэрэв $p^* = f_1(x^*, y^*),\ q^* = f_2(x^*, y^*)$ гэж үзвэл $F(x^*, y^*, p^*, q^*) = f_1(x^*, y^*) + f_2(x^*, y^*) - p^* - q^* = 0$ болж (x^*, y^*, p^*, q^*) цэг нь $F(x, y, p, q)$ функцийн (глобаль) максимумын цэг болж байна. Өөрөөр хэлбэл, Нэшийн тэнцвэр (x^*, y^*) дээр

$$F(x, y, p, q) \leq F(x^*, y^*, p^*, q^*) = 0$$

нөхцөл биелэгдэж байна. Иймд Нэшийн тэнцвэр нь (2.26) гэсэн шугаман биш програмчлалын бодлогын шийд болж теоремын зайлшгүй нөхцөл батлагдав.
Одоо теоремын хүрэлцээтэй нөхцлийг баталъя.
Өөрөөр хэлбэл, (2.26) бодлогын шийд нь Нэшийн тэнцвэр гэдгийг харуулъя.

$(\overline{x},\overline{y},\overline{p},\overline{q})$ нь (2.26) бодлогын ямар нэг шийд гэж үзье. (x^*,y^*) нь биматрицан тоглоомын Нэшийн тэнцвэр ба $p^* = f_1(x^*,y^*)$, $q^* = f_2(x^*,y^*)$ болог. Бид $(\overline{x},\overline{y})$-г Нэшийн тэнцвэр болно гэдгийг харуулахад хүрэлцээтэй. $(\overline{x},\overline{y},\overline{p},\overline{q})$ нь (2.26) бодлогын боломжит цэг тул

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{y_j} \le \overline{p}, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\overline{x_i} \le \overline{q}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Эндээс

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i\overline{y}_j \le \overline{p}\sum_{i=1}^{m}\overline{x_i} = \overline{p}$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\overline{x}_i\overline{y}_j \le \overline{q}\sum_{j=1}^{n}\overline{y_i} = \overline{q}$$

гэдгийг хялбархан харуулж болно. Энэ нь

$$f_1(\overline{x},\overline{y}) \le \overline{p},$$
$$f_2(\overline{x},\overline{y}) \le \overline{q}$$

болно. Нөгөө талаас Нэшийн тэнцвэр (x^*,y^*) ба $p^* = f_1(x^*,y^*)$, $\quad q^* = f_2(x^*,y^*)$ үед $F(x^*,y^*,p^*,q^*) = 0$ гэдэг нь илэрхий билээ. $(\overline{x},\overline{y},\overline{p},\overline{q})$ нь (2.26) бодлогын шийд тул $F(\overline{x},\overline{y},\overline{p},\overline{q}) \le 0$ байхаас гадна $F(\overline{x},\overline{y},\overline{p},\overline{q}) = 0$ байх шаардлагатай . Үүнийг бичвэл:

$$F(\overline{x},\overline{y},\overline{p},\overline{q}) = \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i\overline{y}_j - \overline{p}\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\overline{x}_i\overline{y}_j - \overline{q}\Big) = 0.$$

Энэ нь зөвхөн дараах нөхцөлд биелэх нь илэрхий юм.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i\overline{y}_j = \overline{p},$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\overline{x}_i\overline{y}_j = \overline{q}.$$

$(\overline{x},\overline{y},\overline{p},\overline{q})$ нь мөн боломжит цэг байсан гэвэл нөхцлийг дахин ашиглавал:

$$\begin{cases} \overline{p} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i\overline{y}_j \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{y_j}, \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ \overline{q} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\overline{x}_i\overline{y}_j \ge \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\overline{x_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Дээрх нөхцөл нь $(\overline{x},\overline{y})$ цэг нь Нэшийн тэнцвэр байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл гэдгийг (2.29)-(2.30) нөхцлөөр өмнө нь харуулсан билээ. Иймд $(\overline{x},\overline{y})$ нь Нэшийн тэнцвэр болж теоремын хүрэлцээтэй болон теорем бүрэн батлагдав.

Санамж 1.
$$\overline{p} = f_1(\overline{x}, \overline{y}) = p^* = f_1(x^*, y^*)$$
$$\overline{q} = f_2(\overline{x}, \overline{y}) = q^* = f_2(x^*, y^*)$$
нөхцлүүд зайлшгүй биелэгдэх албагүй юм.
$(\overline{x}, \overline{y})$ ба (x^*, y^*) нь ялгаатай Нэшийн тэнцвэрүүд байж болох ба тэдгээр дээр бодогдсон хожлын утгууд ч тэнцэх албагүй юм. Өөрөөр хэлбэл, $f_1(x^*, y^*) \neq f_1(\overline{x}, \overline{y}), \quad f_2(x^*, y^*) \neq f_2(\overline{x}, \overline{y})$ нөхцөл биелэгдэж болно.

Санамж 2. (2.26) бодлого нь квадратлаг программчлалын бодлого бөгөөд үүнийг бодохын тул Кун-Таккерын оновчтой нөхцлийг ашиглаж бодно. Нөгөө талаас "Matlab" програмд өгөгдлөө оруулж бодож болно.

Жишээ 2.16. Дараах тоглоомын Нэшийн тэнцвэрийг олъё.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Цэвэр стратегитэй үеийн Нэшийн тэнцвэр нь
$\big(x^1 = (0,1,0), \quad y^1 = (1,0,0)\big)$ ба $\big(x^2 = (0,0,1), \quad y^2 = (0,0,1)\big)$ гэдгийг хялбархан харж болно. Хожлын утгууд нь
$$f_1(x^1, y^1) = 2, \quad f_2(x^1, y^1) = 1,$$
$$f_1(x^2, y^2) = 1, \quad f_2(x^2, y^2) = 2.$$

Холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэрийг олохын тулд (2.26) бодлогыг зохиож "Matlab" програм ашиглаж бодъё. Үүний тулд зорилгын функц ба зааглал тус бүрийг бичье.
$$F(x, y, p, q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j - p - q =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_iy_j - p - q = 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3 - p - q.$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le p, \quad i = 1, 2, \ldots, m \Rightarrow$$
$$\begin{cases} -y_1 \le p \\ 2y_1 + y_2 \le p \\ y_2 + y_3 \le p \end{cases}$$
$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_i \le q, \quad j = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le q \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le q \\ 2x_1 + 2x_3 \le q \end{cases}$$

Иймд дээрх бодлого нь дараах квадратлаг програмчлалын бодлого руу шилжинэ.

$2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3 - p - q \to \max$

$$\begin{cases} -y_1 \le p \\ 2y_1 + y_2 \le p \\ y_2 + y_3 \le p \\ x_1 + x_2 \le q \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le q \\ 2x_1 + 2x_3 \le q \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Энэ бодлогыг "Matlab" програмаар бодож шийдийг олбол:

$p = \frac{2}{3}(\approx 0.66)$, $q = \frac{2}{3}(\approx 0.66)$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}(\approx 0.66)$, $x_3 = \frac{1}{3}(\approx 0.33)$, $y_1 = \frac{1}{3}(\approx 0.33)$, $y_2 = 0$, $y_3 = \frac{2}{3}(\approx 0.66)$

Холимог стратегитэй Нэшийн тэнцвэр нь

$(x, y) = \left(\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)\right)$ болох ба $f_1(x, y) = \frac{2}{3}$, $f_2(x, y) = \frac{2}{3}$.

Жишээ 2.17.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & -3 \\ -5 & 4 & 2 & -2 & 1 \\ -6 & 5 & 7 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

тоглоомын Нэшийн тэнцвэрийг олъё.

(2.26) бодлогын нөхцлийг дээрх бодлогын хувьд бичвэл:

$3x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_1y_3 + x_1y_4 - 3x_1y_5 + 3x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_2y_3 + 6x_2y_4 + 4x_2y_5 - 2x_3y_1 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3 + 3x_3y_4 + 5x_3y_5 - 4x_4y_1 + 8x_4y_2 + 5x_4y_3 + 3x_4y_4 - 4x_4y_5 - p - q \to \max,$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 4y_4 - 5y_5 \le p \\ -2y_1 + y_2 + 5y_3 + 6y_4 + 7y_5 \le p \\ 3y_1 - 2y_2 + y_3 + 5y_4 + 4y_5 \le p \\ 2y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 9y_4 + y_5 \le p \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 6x_4 \le q \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le q \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 \le q \\ -3x_1 - 2x_3 - 6x_4 \le q \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \le q \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0, \ y_3 \ge 0, \ y_4 \ge 0, \ y_5 \ge 0 \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0, \ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Энэ бодлогыг "Matlab" програмаар бодож шийдийг олбол:

$x_1 = 0.5, x_2 = 0.35, x_3 = 0, x_4 = 0.1429, y_1 = 0.4143, y_2 = 0.2714, y_3 = 0.343,$ $y_4 = 0,\ y_5 = 0,\ f_1(x, y) = 1.0143,\ f_2(x, y) = 1.9286.$

2.6 Олигополь зах зээлийн математик загвар

Олигополь зах зээл ба Нэшийн тэнцвэр.
Цөөн тооны пүүстэй зах зээлийг олигополь гэж нэрлэнэ. Нэгэн төрлийн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэж буй 2 пүүс авч үзье. Пүүс тус бүрийн үйлдвэрлэлийн хэмжээ харгалзан y_1 ба y_2 болог.
Тэгвэл энэ бүтээгдэхүүний зах зээлийн тоо хэмжээ $y = y_1 + y_2$ байна. Энэ гарцанд харгалзах зах зээлийн үнэ нь энэ гарцнаас хамаарч тодорхойлогдоно. Өөрөөр хэлбэл, олигополь зах зээлийн үнэ нь тоо хэмжээнээс хамаарсан функц байна.

$$p = p(y) = p(y_1 + y_2) \tag{2.31}$$

Нөгөө талаас зах зээлийн үнэ нь эрэлтийн урвуу функц юм.
π_1, π_2 нь пүүсүүдийн ашиг ба $c_1,\ c_2$ нь тэдгээрийн зардал болог.
$c_1 = c_1(y_1),\quad c_2 = c_2(y_2),\quad p = p(y)$ функцүүдийг дифференциалчлагддаг гэж үзнэ.
Пүүсүүдийн стратегүүд нь бүтээгдэхүүнийг үйлдвэрлэх тоо хэмжээ y_1 ба y_2 болно. Пүүсүүдийн хожлын утгуудыг тэдгээрийн ашгийн функцүүдээр илэрхийлбэл олигополь зах зээл дээр 2 тоглогчтой тэг биш нийлбэртэй тоглоом үүснэ.
Пүүс тус бүрийг ашгаа хамгийн их байлгах бодлогыг томъёолбол:

$$\begin{cases} \pi_1(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2)y_1 - c_1(y_1) \to \max\limits_{y_1} \\ \pi_2(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2)y_2 - c_1(y_1) \to \max\limits_{y_2} \end{cases}$$

Хэрэв (y_1^*, y_2^*) гарцын хувьд

$$\begin{aligned} \pi_1(y_1^*, y_2^*) &= \max_{y_1} \pi_1(y_1, y_2^*) \\ \pi_2(y_1^*, y_2^*) &= \max_{y_2} \pi_1(y_1^*, y_2) \end{aligned} \tag{2.32}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал (y_1^*, y_2^*) нь олигополь зах зээл дээрх Нэшийн тэнцвэр болно.
Нэшийн тэнцвэр байх зайлшгүй нөхцлийг дээрх бодлогуудын хувьд бичвэл:

$$\frac{\partial \pi_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} = p(y_1 + y_2) + p'(y_1 + y_2)y_1 - c_1'(y_1) = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial \pi_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} = p(y_1 + y_2) + p'(y_1 + y_2)y_2 - c_2'(y_2) = 0 \tag{2.34}$$

Хэрэв $\pi_1(y)$ функц y_1-ээр, $\pi_2(y)$ нь y_2-ээр тус тус хотгор бол (2.33)-(2.34) нөхцөл нь Нэшийн тэнцвэрийн хүрэлцээтэй нөхцөл болно.

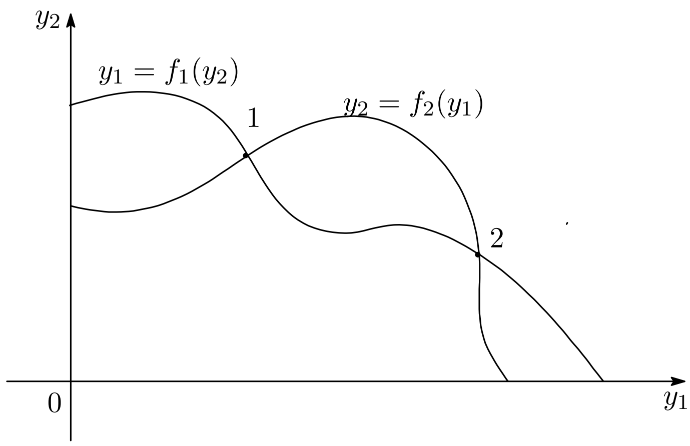
$\pi_i(y), \quad i = 1, 2$ функцүүдийн хотгор байх нөхцөлийг бичвэл:

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial y_i^2} = 2p'(y) + p''(y)y_i - c_i''(y_i) \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall y_i \in R^+.$$

(2.33) ба (2.34) тэгшитгэлээс y_1 ба y_2-г олсон гэж үзье.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(y_2) \\ y_2 = f_2(y_1) \end{cases}$$

$f_1(y_2)$, $f_2(y_1)$ функцүүдийг 1 ба 2-р пүүсүүдийн хариу үйлдлийн функцүүд гэж нэрлэнэ.
Тэгвэл Нэшийн тэнцвэр нь хариу үйлдлийн функцүүдийн графикуудын огтлолцол дээр орших нь илэрхий.



Жишээ 2.18. Эрэлтийн урвуу функц $p = a - by = a - b(y_1 + y_2)$ өгөгдсөн ба ахиу зардлууд $c_1, \ c_2$ тогтмол бол Нэшийн тэнцвэрийг олъё.
Пүүсүүдийн ашгийн функцийг тодорхойлъё.

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c_1 y_1 = a - by_1^2 - by_1 y_2 - c_1 y_1,$$
$$\pi_2 = [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c_2 y_2 = a - by_1 y_2 - by_2^2 - c_2 y_2.$$

Нэшийн тэнцвэрийг олохын тулд эхлээд $\dfrac{\partial \pi_i}{\partial y_i}$-г олно.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = a - 2by_1 - by_2 - c_1 \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial y_2} = a - by_1 - 2by_2 - c_2 \end{cases}$$

Одоо дараах системийг бодно.

$$\begin{cases} a - 2by_1 - by_2 = c_1 \\ a - by_1 - 2by_2 = c_2 \end{cases}$$

Эндээс $y_1^* = \dfrac{a-2c_1+c_2}{3b}, \quad y_2^* = \dfrac{a-2c_2+c_1}{3b}$
Иймд Нэшийн тэнцвэр нь (y_1^*, y_2^*) болно.

Олон пүүстэй Курно-Нэшийн тэнцвэр

Олигополь зах зээлд n пүүс оролцдог гэж үзье. y_i нь i-р пүүсийн гарц, $c_i(y_i)$ нь i-р пүүсийн зардал $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Пүүс тус бүрийн ашиг $\pi_i(y) = p(y)y_i - c_i(y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Пүүсүүдийн ашиг хамгийн их байх нөхцлийг бичвэл:

$p(y) + p'(y)y_i = c_i'(y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

$$p(y)\Big[1 + \frac{dp}{dy} \cdot \frac{y_i}{p}\Big] = c_i'(y_i), \quad i = \overline{1, n} \tag{2.35}$$

$s_i = \dfrac{y_i}{y}$ нь i-р пүүсийн нийт зах зээлд эзлэх хувь,

$\varepsilon = \dfrac{y'p}{y}$-нь гарцын үнээс хамаарсан мэдрэмж эсвэл зах зээлийн эрэлтийн мэдрэмж, $\dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{y_i}{p}$ нь үнийн y_i-ээс хамаарсан мэдрэмж.

$p(y)\Big[1 + \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{y_i}{p}\Big] = p(y)\Big[1 + \Big(\dfrac{y_i}{y}\Big) \cdot \dfrac{1}{\big(\frac{dy}{dp} \cdot \frac{p}{y}\big)}\Big] = p(y)\Big[1 + \dfrac{s_i}{\varepsilon}\Big], \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Хэрэв $s_i = 1$ бол $y_i = y$ болж зах зээл монополь шинжтэй болно. Иймд

$$p(y)\Big[1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big] = c_i'(y)$$

нөхцөл нь зах зээл монополь байх нөхцөл юм.

$s_i \to 0$ бол Курно-Нэшийн тэнцвэр (2.35) нь төгс өрсөлдөөнт тэнцвэр рүү шилжинэ гэдгийг харуулъя. Үүний тулд $c_i = c, \quad i = \overline{1, n}$ гэж үзье. $s_i = \dfrac{1}{n}$ болог.

(2.35) тэгшитгэлүүдийн баруун зүүн талыг нэмбэл: $\sum\limits_{i=1}^{n}[p(y) + p'(y)y_i] = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i'(y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}(c_i y_i)'$

Эндээс $np(y) + p'(y)\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} c$ буюу $np(y) + p'(y)y = nc$ болно.

$p(y)\Big[1 + \dfrac{p'(y)y}{np(y)}\Big] = c \Rightarrow p(y)\Big[1 + \dfrac{1}{n\varepsilon}\Big] = c$

$\lim\limits_{n\to\infty} p(y)\Big[1 + \dfrac{1}{n\varepsilon}\Big] = c$ болох ба $p(y) = c$ болж төгс өрсөлдөөнт зах зээлийн тэнцвэр үүсэж байна. Энэ нь төгс өрсөлдөөнт зах зээл дэх пүүсийн ашиг хамгийн их байх нөхцөл юм.

Өөрөөр хэлбэл, $\pi(y) = py - cy \to \max\limits_{y}$ бодлогын зайлшгүй нөхцөл нь

$\pi'(y) = p - c = 0$ юм.

2.7 Пүүсийн динамик загвар ба тогтворжилт

Пүүсүүдийн гарц нь хугацаанаас хамаарсан функц болог. Хугацааны 0 эгшинд пүүсүүдийн гарц (y_1^0, y_2^0) байсан болог.
Хугацааны 1-р эгшинд 1-р пүүс нь 2-р пүүсийг y_2^0 үйлдвэрлэлээ үргэлжлүүлэн явуулсан гэж үзээд ашгаа максимум байлгах зорилт тавина.
Өөрөөр хэлбэл, дараах бодлогыг бодно.

$$\pi_1(y_1, y_2^0) \to \max_{y_1}$$

Энэ бодлогын шийд y_2^0-ээс хамаар олдоно.

$$y_1^1 = f_1(y_2^0)$$

Одоо 2-р пүүс 1-р пүүсийн гарцыг y_1^1 гэж үзээд өөрийнхөө ашгаа максимум байлгана.

$$\pi_2(y_1^1, y_2) \to \max_{y_2}$$

Бодлогын шийд нь $y_2^1 = f_2(y_1^1)$
Дараагийн эгшинд, 1-р пүүс ашгаа максимумчилна.

$$\pi_1(y_1 y_2^1) \to \max_{y_1}.$$

Бодлогын шийд $y_1^2 = f_3(y_2^1)$.
Одоо 2-р пүүс ашгаа максимумчилна. $\pi(y_1^2, y_2) \to \max\limits_{y_2}$,
шийд нь $y_2^2 = f_4(y_1^2)$.
Тэгвэл i-р пүүсийн t хугацаан дах гарцыг олбол $y_i^t = f_t(y_j^{t-1})$.
Гарцуудын дараалал (y_i^t, y_j^{t-1}) үүснэ.
Хэрэв $t \to \infty$ үед $(y_i^t, y_j^{t-1}) \to (y_1^*, y_2^*)$ байвал (y_i^t, y_j^{t-1}) дараалал нь тогтвортой төлөв байдал руу шилжиж байгаа бөгөөд (y_1^*, y_2^*) нь Нэшийн тэнцвэр болдог.
Одоо пүүсүүд нь өөрсдийн гарцыг ашиг өсгөх чиглэлд тааруулж үйлдвэрлэдэг гэж үзье.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \alpha_1 \cdot \dfrac{\partial \pi_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \alpha_2 \cdot \dfrac{\partial \pi_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{cases} \tag{2.36}$$

үүнд α_1 ба α_2 нь эерэг параметрүүд.
Энэ систем тогтвортой байх хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 y_2} \\ \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_1 \partial_2} & \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^2} \end{vmatrix} > 0 \tag{2.37}$$

Одоо 1-р пүүсийн ашиг π_1 нь a параметрээс хамаарсан гэж үзье.

$$\pi_1 = \pi_1(y_1, y_2, a).$$

Курно-Нэшийн тэнцвэрийн нөхцлийг бичвэл:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1(y_1(a), y_2(a), a)}{\partial y_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_2(y_1(a), y_2(a))}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

Эндээс

$$\begin{cases} \dfrac{d}{da}\Big(\dfrac{\partial \pi_1}{\partial y_1}\Big) = 0 \\ \dfrac{d}{da}\Big(\dfrac{\partial \pi_2}{\partial y_2}\Big) = 0 \end{cases}$$

тул үүнийг задалж бичвэл

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1^2}\dfrac{\partial y_1}{\partial a} + \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial a} + \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_1 \partial y_2}\dfrac{\partial y_1}{\partial a} + \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^2}\dfrac{\partial y_2}{\partial a} = 0 \end{cases}$$

$\Big(\dfrac{\partial y_1}{\partial a}\Big)$-г олбол

$$\frac{\partial y_1}{\partial a} = \frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a} & \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2} \\ 0 & \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^2} \end{vmatrix}}$$

Нөгөө талаас (2.37) биелэгдэх ба

$$-\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a} & \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2} \\ 0 & \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a} \cdot \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^2}$$

2-р пүүсийн ашиг их байх нөхцөл

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^2} < 0$$

тул $\dfrac{\partial y_1}{\partial a}$-ийн тэмдэг нь $\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a}$-ийн тэмдэгээр тодорхойлогдоно.
Өөрөөр хэлбэл,

$$sign\frac{\partial y_1}{\partial a} = sign\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a}$$

Жишээлбэл, a нь 1-р пүүсийн ахиу зардал болог. Тэгвэл

$$\pi_1(y_1, y_2, a) = p(y_1 + y_2)y_1 - ay_1$$

болох ба $\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a} = -1 < 0$ байна.

Эндээс хэрэв 1-р пүүсийн ахиу зардлыг ихэсгэвэл $\dfrac{\partial y_1}{\partial a} < 0$ болж Курно-Нэшийн тэнцвэрийн гарцыг бууруулж байна. Өөрөөр хэлбэл, Нэшийн тэнцвэр $(y_1(a), y_2(a))$-ын хувьд y_1 нь a-г өсөхөд буурч байна.

2.8 Зөвшилцөл

Олигополь зах зээл дээр 2 пүүс зөвшилцөж хамтарч ашгаа максимумчилна. Зөвшилцлийн үр дүнд гарсан гарцыг картел гэж нэрлэнэ. Энэ зах зээл дээр 2 пүүс нийлбэр ашгаа максимумчилна гэсэн үг юм. Пүүсүүдийн ашгийн функц нь дараах хэлбэртэй.

$$\pi_1(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2)y_1 - c_1(y_1)$$

$$\pi_2(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2)y_2 - c_2(y_2)$$

Нийлбэр ашгийн функц нь

$$\pi = p(y_1 + y_2)(y_1 + y_2) - c_1(y_1) - c_2(y_2)$$

Нийлбэр ашгийг максимум байлгах бодлого нь

$$\pi = p(y_1 + y_2)(y_1 + y_2) - c_1(y_1) - c_2(y_2) \to \max_{(y_1, y2)} \tag{2.38}$$

(2.38) бодлогын оновчтой байх зайлшгүй нөхцлийг бичвэл:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial y_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(y_1 + y_2) + p'(y_1 + y_2)(y_1 + y_2) - c_1'(y_1) = 0 \\ p(y_1 + y_2) + p'(y_1 + y_2)(y_1 + y_2) - c_2'(y_2) = 0 \end{cases}$$

$\dfrac{\partial \pi_1}{\partial y_1}$-ийг бодвол:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = p'(y_1 + y_2)y_1 + p(y_1 + y_2) - c_1'(y_1) = p'(y_1 + y_2)y_1 + p(y_1 + y_2) -$$

$$-p(y_1+y_2)-p'(y_1+y_2)y_1-p'(y_1+y_2)y_2=-p'(y_1+y_2)y_2$$

Нөгөө талаас эрэлтийн урвуу функц $p(y)$-ын хувьд үргэлж $p'(y)<0$ (учир нь $p(y)$ нь y-ээс хамаарсан буурдаг гүдгэр функц байдаг) биелэгддэг тул

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1}=-p'(y_1+y_2)y_2>0$$

Иймд картел дээр 1-р пүүс бүтээгдэхүүний тоо хэмжээгээ ихэсгэвэл түүний ашиг ихсэж байна.
Одоо зөвшилцлийн үр дүнд бий болсон гарц буюу картел дээр бодсон нийлбэр ашиг нь Нэшийн тэнцвэр дээрх ашгуудийн нийлбэрээс их байна гэдгийг харуулъя. $(\overline{y_1},\overline{y_2})$ нь картел шийд болог.

$$\pi(\overline{y_1},\overline{y_2})=\max_{(y_1,y_2)}\pi(\overline{y_1},\overline{y_2})=\max_{(y_1,y_2)}\big[p(y_1+y_2)(y_1+y_2)-c_1(y_1)-c_2(y_2)\big]=$$
$$p(\overline{y_1}+\overline{y_2})(\overline{y_1}+\overline{y_2})-c_1(\overline{y_1})-c_2(\overline{y_2}).$$

(y_1^*,y_2^*) нь Нэшийн тэнцвэр болог. Өөрөөр хэлбэл,

$$\begin{cases}\pi_1(y_1^*,y_2^*)=\max\limits_{y_1}\pi_1(y_1,y_2^*)\\ \pi_2(y_1^*,y_2^*)=\max\limits_{y_2}\pi_2(y_1^*,y_2)\end{cases}$$

Картелын тодорхойлолт ёсоор

$$\pi(\overline{y_1},\overline{y_2})\geq\pi(y_1,y_2),\quad \forall(y_1,y_2)\in R_2^+.$$

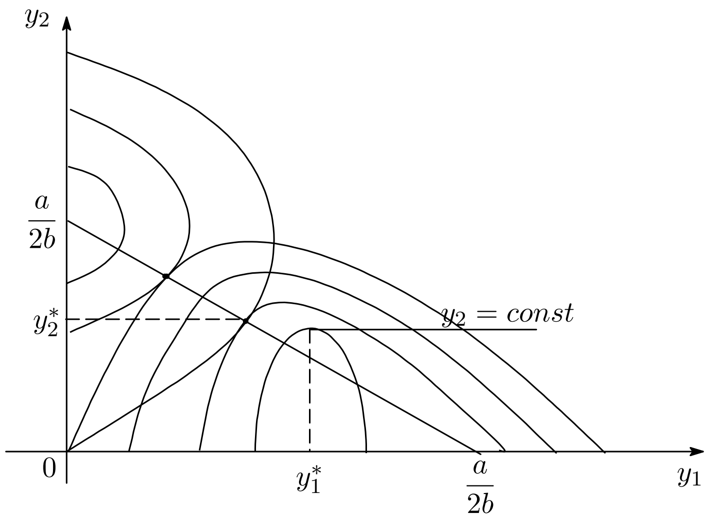
Тухайн тохиолдолд энэ тэнцэтгэл биш (y_1^*,y_2^*) дээр бас хүчинтэй. Иймд

$$\pi(\overline{y_1},\overline{y_2})=p(\overline{y_1}+\overline{y_2})(\overline{y_1}+\overline{y_2})-c_1(\overline{y_1})-c_2(\overline{y_2})\geq p(y_1^*+y_2^*)(y_1^*+y_2^*)-$$
$$-c_1(y_1^*)-c_2(y_2^*)=\big[p(y_1^*+y_2^*)y_1^*-c_1(y_1^*)\big]+\big[p(y_1^*+y_2^*)y_2^*-c_2(y_2^*)\big]=$$
$$\pi_1(y_1^*,y_2^*)+\pi_2(y_1^*,y_2^*).$$

Эндээс $\pi_1(\overline{y_1},\overline{y_2})+\pi_2(\overline{y_1},\overline{y_2})\geq\pi_1(y_1^*,y_2^*)+\pi_2(y_1^*,y_2^*)$ болох нь харагдаж байна.

Жишээ 2.19. Эрэлтийн урвуу функц $p(y)=a-b(y_1+y_2)$ өгөгдсөн бол картелийг олъё. $c_1=c_2=0$ гэж үзье.
$\pi(y_1,y_2)=[a-b(y_1+y_2)](y_1+y_2)=a(y_1+y_2)-b(y_1+y_2)^2\to\max$
Максимум байх нөхцлийг бичвэл $\pi'(y)=a-2by=0$
Эндээс $y_1+y_2=\dfrac{a}{2b}$ нөхцөл нь картел шийдийг тодорхойлно. $\pi_1(y_1,y_2)$, $\pi_2(y_1,y_2)$ функцүүдийн түвшний шугамыг зурж графикаар үзүүлье.

$$\pi_1(y_1,y_2)=[a-b(y_1+y_2)]y_1=-by_1^2-by_1y_2+ay_1=const$$
$$\pi_2(y_1,y_2)=[a-b(y_1+y_2)]y_2=-by_2^2-by_1y_2+ay_2=const$$



Хэрэв y_2 тогтмол бол 1-р пүүс гарцаа нэмэгдүүлэх замаар ашгаа их байлгаж чадаж байна.

Тэгвэл картелээс зайлсхийвэл бие биенээ яаж шийтгэх вэ? Хэрэв аль нэг пүүс нь нөгөөдөхийн картелээс зайлсхийснийг мэдсэн үед өөрийн гарцыг яаж ихэсгэх бэ? 2-р пүүс ямар хариу үйлчилгээ торгууль ноогдуулах бэ? зэрэг асуултууд тавигдана. Хэрэв 2-р пүүс гарцаа dy_2-ээр ихэсгэвэл 1-р пүүс гарцаа $dy_1 = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)dy_2$ хэмжээгээр ихэсгэнэ гэж мэдэгдсэн гэж үзье. (y_1^*, y_2^*) нь картел шийд болог.

$$d\pi_2 = \frac{\partial \pi_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial \pi_2}{\partial y_2}dy_2 = p'(y_1+y_2)y_2dy_1 + [p'(y_1+y_2)y_2 + p(y_1+y_2)-$$
$$-c_2'(y_2)]dy_2 = p(y_1+y_2)dy_2 + p'(y_1+y_2)(dy_1+dy_2)y_2 - c_2'(y_2)dy_2.$$

Үүнийг картел шийд дээр бодвол:

$$d\pi_2 = p(y_1^*+y_2^*)dy_2 + p'(y_1^*+y_2^*)\big[dy_2 + \frac{y_1^*}{y_2^*}dy_2\big]y_2^* - c_2'(y_2^*)dy_2 =$$

$$= \big[p(y_1^*+y_2^*) + p'(y_1^*+y_2^*)(y_1^*+y_2^*) - c_2'(y_2^*)\big]dy_2 = \frac{\partial \pi(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_2}dy_2.$$

Нөгөө талаар, картел дээр $\frac{\partial \pi(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_2} = 0$ тул $d\pi_2 = 0$ буюу $\pi_2 = const$ болно. Иймд ийм аргаар 1-р пүүс гарцаа нэмэгдүүлбэл 2-р пүүсийн ашиг өсөхгүй бөгөөд тогтмол болно. Зөвшилцлийн үр дүн буюу хамтын шийдвэр нь картел юм. Картел шийдэлд хүрэх нь шоронгийн хоригдлын бодлогын шийдэлтэй ижилхэн байна. Хэрэв аль нэг нь картелээс хазайвал үүний хариуд шийтгэл болгож нөгөөдөх нь Курно-Нэшийн тэнцвэрийг сонгоно. Картелийг сонгохдоо дараах стратегийг баримтална. Хэрэв таны өрсөлдөгч пүүс танд итгэж, таныг хуурахгүй бол картел шийдийг сонгох нь чухал. Хэрэв таныг хуурвал Курно-Нэшийн тэнцвэрийг сонгох нь чухал.

2.9 Үнийн манлайлагч

Олигополь зах зээл дээр нэг пүүс нь үнийг түрүүлж тогтоож манлайлагчийн үүрэг гүйцэтгэж, нөгөө пүүс нь дагалдагчийн үүрэг гүйцэтгэж болно. Маналайлагч пүүс шийдвэр гаргахын тулд дагалдагчийн төлөв байдлыг таамагласан байх шаардлагатай.
Хоёр пүүс нь ижил бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэж байна гэж үзье. Хэрэв аль нэг пүүс нь ялгаатай үнэ тогтоовол бүх хэрэглэгч нар бага үнэтэйг илүүд үзэх тул 2 тоглогчийн хувьд тэнцвэр үүсгэхгүй болно. Манлайлагч 1-р пүүс p гэсэн үнэ тогтоосон үед дагалдагч 2-р пүүс ашгаа максимум байлгахыг зорьж дараах бодлогыг бодно.

$$py_2 - c_2(y_2) \to \max_{y_2}$$

үүнд $c_2(y_2)$ нь 2-р пүүсийн зардлын функц, MC_2 нь ахиу зардал. Максимум байх нөхцлийг бичвэл:

$$p - c_2'(y_2) = 0$$

буюу

$$p = MC_2(y_2) = c_2'(y_2)$$

болно. Энэ тэгшитгэлээс 2-р пүүсийн нийлүүлэлтийн функцийг олбол:

$$y_2 = S = MC_2^{-1}(p) \quad \text{буюу} \quad S = S(p)$$

Үүнийг тайлбарлавал: Манлайлагч p гэсэн үнэ тогтоосон үед дагалдагч пүүс $S(p)$ гэсэн нийлүүлэлт хийнэ гэсэн үг юм. Зах зээлийн эрэлтийн функцийг $D(p)$ гэвэл, манлайлагч $R(p) = D(p) - S(p)$ гэсэн тоо хэмжээг борлуулна гэсэн үг юм. $R(p)$-г илүүдэл эрэлтийн функц гэнэ. Хэрэв манлайлагчийн ахиу зардал нь тогтмол c бол түүний ашиг нь

$$\pi_1(p) = (p - c)[D(p) - S(p)] = (p - c)R(p)$$

Жишээлбэл, $D(p) = a - bp$ нь зах зээлийн эрэлтийн функц.
Манлайлагчийн зардлын функц $c_1(y_1) = cy_1$, дагалдагчийн зардлын функц $c_2(y_2) = \frac{y_2^2}{2}$ болог.
Дагалдагчийн ашгийн максимумын бодлого нь:

$$py_2 - c_2(y_2) = py_2 - \frac{y_2^2}{2} \to \max_{y_2}$$

Оновчтой байх нөхцөл нь

$$p - y_2 = 0$$

Эндээс дагалдагчийн нийлүүлэлтийн функц нь

$$y_2 = S(p) = p$$

Манлайлагчийн илүүдэл эрэлтийн функцийг бичвэл:

$$R(p) = D(p) - S(p) = a - bp - p = a - (b+1)p.$$

$R(p)$ нь манлайлагч пүүсийн борлуулах тоо хэмжээ болно.
$y_1 = R(p) = a - (b+1)p$. Эндээс p-г олбол

$$p = \frac{a}{b+1} - \frac{y_1}{b+1}$$

Энэ нь манлайлагчийн эрэлтийн урвуу функц юм. Манлайлагчийн орлогыг тооцъё.

$$\widetilde{R} = py_1 = \frac{a}{b+1}y_1 - \frac{y_1^2}{b+1}$$

Ахиу орлогын функц нь $\widetilde{R}'$ нь

$$M\widetilde{R} = \widetilde{R}' = \frac{a}{b+1} - \frac{2y_1}{b+1}$$

Манлайлагчийн ашгийг тооцвол

$$\pi_1(y_1) = \widetilde{R}(y_1) - cy_1 \to \max$$

Эндээс максимум байх нөхцөл нь

$$M\widetilde{R}(y_1) - c = 0 \quad \text{буюу} \quad M\widetilde{R} = MC.$$

Үүнийг задалж бичвэл:

$$\frac{a}{b+1} - \frac{2}{b+1}y_1 = c$$

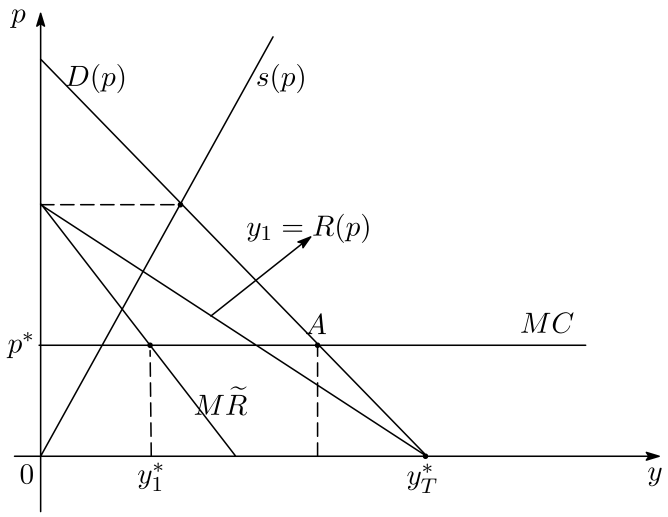
Максимум байлгах тоо хэмжээ y_1^*-г олбол:

$$y_1^* = \frac{a - c(b+1)}{2}.$$

Тэнцвэрийн үнийг олж болно.

$$p^* = \frac{a}{b+1} - \frac{y_1^*}{b+1}.$$

Өөрөөр хэлбэл, манлайлагч түрүүлж p^* үнэ тогтоовол түүний ашиг хамгийн их байна.



Үүнд:
$D(p)$-зах зээлийн эрэлт,
$S(p)$-дагалдагчийн нийлүүлэлт,
$R(p)$-илүүдэл эрэлт,
$M\widetilde{R}$-ахиу орлого,
MC-нь манлайлагчийн ахиу зардал,
y_1^*-манлайлагчийн оновчтой тоо хэмжээ,
y_T^*-зах зээлийн нийт тоо хэмжээ,
$A(y_T^*, p^*)$-зах зээлийн тэнцвэрийн цэг.

2.10 Тоо хэмжээний манлайлагч

Олигополь зах зээл дээр нэг пүүс нь нөгөөдөхөөс түрүүлж сонголт хийдэг. Ийм пүүсүүдийн харилцан үйлчлэлийг Стакелбергийн загвараар судалдаг. 2 пүүсийн үйлдвэрлэлийн тоо хэмжээ нь харгалзан y_1 ба y_2 болог. Зах зээлийн нийт үйлдвэрлэл $y = y_1 + y_2$ ба эрэлтийн урвуу функц нь $p(y)$ гэж үзье. Манлайлагч 1-р пүүс нь түрүүлж y_1-г үйлдвэрлэсэн болог. Дагалдагч 2-р пүүс өөрийнхөө ашгийг максимум байлгах y_2-ын сонголт хийх ёстой. Энэ бодлогыг томъёолбол

$$p(y_1 + y_2)y_2 - c_2(y_2) \to \max_{y_2}$$

Максимум байх зайлшгүй нөхцөл нь

$$p(y_1 + y_2) + p'(y_1 + y_2)y_2 = c_2'(y_2) = MC_2,$$

үүнд $c_2(y_2)$ нь 2-р пүүсийн зардлын функц, MC_2 нь ахиу зардлын функц. Энэ тэгшитгэлээс 2-р пүүсийн хариу үйлдлийн функц болох

$$y_2 = f_2(y_1)$$

тодорхойлно. Одоо манлайлагч пүүс өөрийнхөө ашгийг хариу үйлдлийн функцийн зааглал дээр максимумчилна.
Өөрөөр хэлбэл,

$$\begin{cases} p(y_1 + y_2)y_1 - c_1(y_1) \to \max\limits_{y_1} \\ y_2 = f_2(y_1) \end{cases}$$

2-р тэгшитгэлийг зорилгын функцэд орлуулбал

$$p(y_1 + f_2(y_1))y_1 - c_1(y_1) \to \max_{y_1}.$$

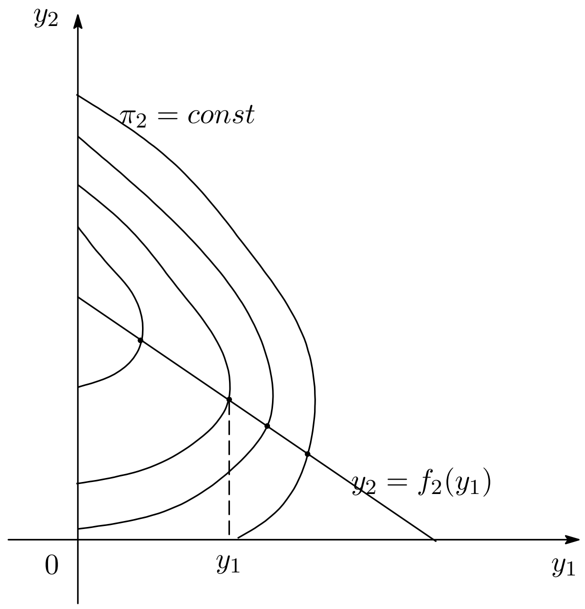
Энэ бодлогын шийд y_1^*-ын тусламжтайгаар зах зээлийн нийт эрэлт $y_1^* + f_2(y_1^*)$ ба Стакелбергийн тэнцвэр (y_1^*, y_2^*)-г тодорхойлно.

Жишээ 2.20. $p(y_1 + y_2) = a - b(y_1 + y_2), \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0$ бол Стакелбергийн тэнцвэрийг олъё.
Дагалдагч 2-р пүүсийн ашгийн функц $\pi_2(y_2)$:

$$\pi_2(y_1, y_2) = [a - b(y_1 + y_2)]y_2 = ay_2 - by_1y_2 - by_2^2.$$

түвшний шугамыг байгуулбал

$$ay_2 - by_2y_1 - by_2^2 = const$$



Эндээс харахад 1-р пүүсийн гарц буурах тусам 2-р пүүсийн ашиг ихэсэж байна. 2-р пүүсийн хариу үйлдлийн функцийг олбол:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial y_2} = a - by_1 - 2by_2 = 0.$$

Эндээс $y_2 = f_2(y_1) = \dfrac{a - by_1}{2b}$
Одоо манлайлагчийн ашгийн максимумын бодлогыг бодвол:

$$\begin{cases} \pi(y_1, y_2) = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 \to \max, \\ y_2 = \dfrac{a - by_1}{2b} \end{cases}$$

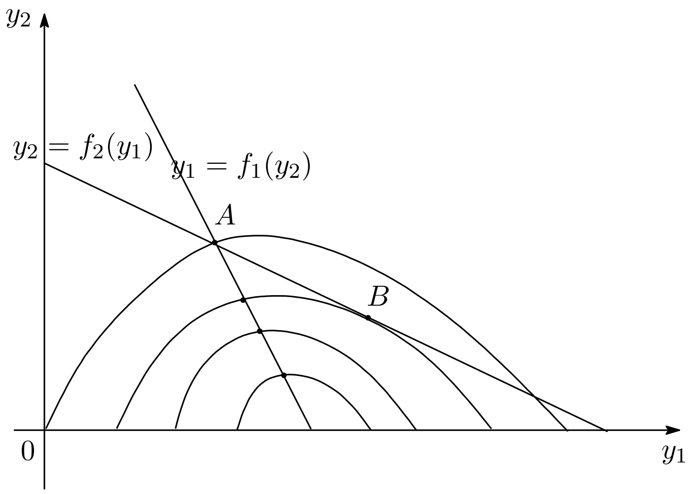
$$\pi_1(y_1, y_2) = ay_1 - by_1^2 - by_2y_1 = ay_1 - by_1^2 - by_1 \cdot \frac{a - by_1}{2b} = a - by_1^2 + \frac{b^2y_1^2 - aby_1}{2b}.$$

π_1 функцийн y_1-ээр авсан тухайн уламжлалыг олж тэгтэй тэнцүүлнэ.

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = a - 2by_1 + \frac{2b^2y_1 - ab}{2b} = \frac{a}{2} - by_1 = 0$$

Эндээс $y_1^* = \dfrac{a}{2b}$, $\quad y_2^* = \dfrac{a - by_1^*}{2b} = \dfrac{a}{4b}$.
Стакелбергийн тэнцвэр нь $(y_1^*, y_2^*) = \left(\dfrac{a}{2b}, \dfrac{a}{4b}\right)$ болно.
Зах зээлийн нийт тоо хэмжээ:

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{3a}{4b}.$$



Үүнд:
f_1-нь 1-р пүүсийн хариу үйлдлийн функц,
f_2- нь 2-р пүүсийн хариу үйлдлийн функц,
A-цэгт Нэшийн тэнцвэр харгалзана.
B-цэг нь Стакелбергийн тэнцвэр болно.

3 Тоглоомын онолын эдийн засгийн жишээнүүд

Жишээ 3.1. (Тамхи сурталчилдаг телевиз)

1964 оноос өмнө АНУ-д ихэнх тамхи үйлдэрлэгч компаниуд бүтээгдэхүүнээ телевизээр сурталчилдаг байсан бөгөөд сурталчилгаанууд нь маш олон төрлийнх байсан.1964 онд эмч нар тамхи татах нь эрүүл мэндэд хортой гэдгийг тогтоосон. Үүний эсрэг тамхины компаниуд зарга үүсгэн дургүйцлээ илэрхийлсэн ба төр засгаас тэдний үйлдвэрлэлд хориг тавьсан байна. Энэ нь сунжирсаар 1970 онд АНУ-н засгийн газартай гэрээ байгуулжээ. Энэ гэрээ нь телевизээр тамхи сурталчилахад хориг тавьсан ба 1971-01-01 өдрөөс мөрдөгдөж эхэлсэн байна. Үүний нөлөөгөөр компаниуд бүтээгдэхүүнээ хэрэглэгчидэд хүргэх өөр өөр стратеги сонгох болжээ. Энэ үед АНУ-н 4-н том тамхи үйлдвэрлэгчийн 2 нь хоорондоо хамтрахаар болсон. Хамтарсан компаниудыг компани1, компани2 гэж нэрлээд тэдний хамтарсан стратеги зах зээлд хэрхэн нөлөөлөхийг үзье. Компани тус бүрийн стратеги нь зар сурталчилгаа гаргана эсвэл гаргахгүй. Матрицийн нүднүүдэд компаниудын ашгын хэмжээг дурьдсан. 2 пүүсийн тэг биш нийлбэртэй тоглоомын үр дүнг доор харууллаа.

	Компани 2	
Компани1	Сурталчилахгүй	Сурталчилна
Сурталчилахгүй	(50,50)	(20,60)
Сурталчилна	(60,20)	**(27,27)***

Зураг 3.1.

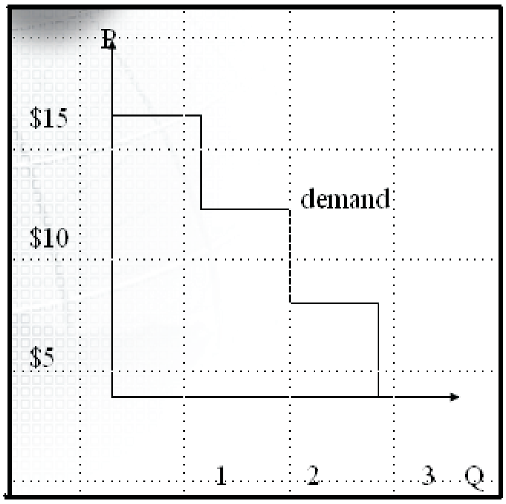
Энд хоёул сурталчилсанаар орлого 23 мянган доллараар буурах ба компани бүр өөрийн давуу стратегийг баримтлах учир тэнцвэр $(27, 27)^*$ цэг дэр тогтоно. Харин Засгийн газраас хориг тавьсанаар шийд өөрчлөгдөнө. Бодит байдал дээр хориг тавьснаар 1970 онд эдгээр дөрвөн том компанийн сурталчилгааны зардал 315 мянган ам доллар байснаа 1971 онд 252000 ам доллар болж буурч ашиг 91000 ам доллараар нэмэгдсэн.

Жишээ 3.2.(Хоёр этгээдийн тоглоом)

Энэ жишээнд бид хоёр этгээдийн тоглоомын талаар авч үзнэ. Үүнд бүх тоглогчид эрсдэлийг ойшоодоггүй гэе. Зах зээл дээр худалдагч ба худалдан авагч байх бөгөөд худалдан авагч бүр нэг нэгж бүтээгдэхүүнийг авах сонирхолтой харин худалдагч адилхан нэг нэгж бүтээгдэхүүн борлуулах сонирхолтой.

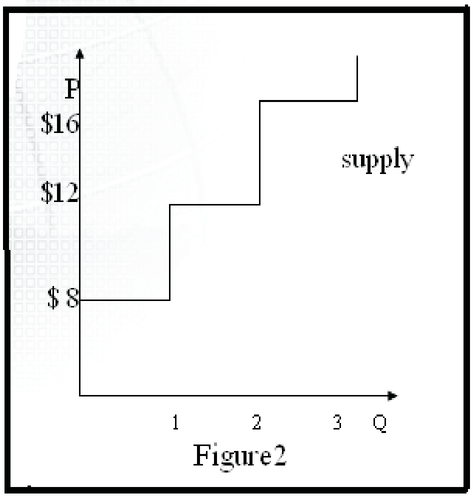
Бидний жишээн дээр $N(buy) = \{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1\}$ тооны худалдан авагч ба $N(sell) = \{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ тооны худалдагчтай. Худалдагч ба худалдан авагчдын тоо ижил n байна. Эхлээд зах зээлийн эрэлтийн талыг авч үзье:

i-р худалдан авагчийн ханамжийн функц нь $U_i = U_i(M, p) = M_i + b_i - P$ болно.
Хэрэв бүтээгдэхүүнийг худалдан авбал $V_i = M_i$ хэрэв бүтээгдэхүүнийг худалдан авахгүй бол b_i нь i-р худалдан авагчийн бүтээгдэхүүний ахиу ханамж. $(b_i - P)$ нь худалдан авагчийн худалдаанаас авч буй хожоо ба худалдан авагч нь эрсдэлийг үл ойшоогч болно. Үнэ хаялцуулгаар нь дараалуулбал
$b_1 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_{2n-1} \geq 0$



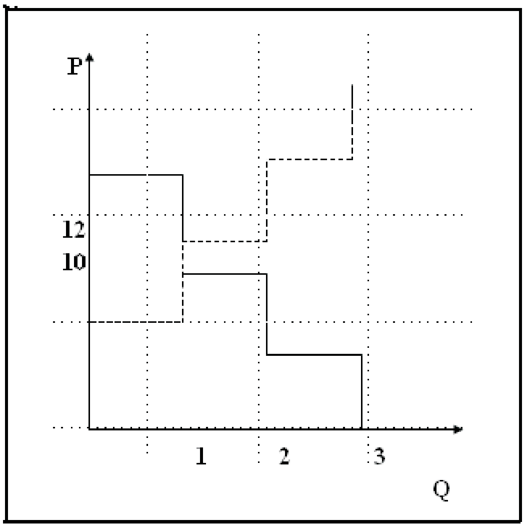
Зураг 3.2.

Зураг 3.2-д эрэлтийн функцийг тодорхойлсон байна. Үүнд 3 худалдан авагчтай тэдгээрийн хувьд $b_1 = \$15, \quad b_2 = \$10, \quad b_3 = \$5$ байна.
Эрэлтийн хуульд захирагдах учир 15$-аас дээш бол ямарч худалдан авагчгүй харин $5-аас доош бол гурвуулаа худалдан авна. Харин одоо нийлүүлэлтийн талаас нь авч үзье. Эрэлтийн функцтэй төстэй бөгөөд j-р худалдагчийн ханамжийн функц нь U_j болно. $U_j(M, p) = M_j + P - a_j$ хэрэв бүтээгдэхүүнээ зарвал M_j, хэрэв бүтээгдэхүүний зарахгүй бол a_j нь j-р худалдагчийн ахиу зардлыг илэрхийлнэ. Мөн $(P - a_j)$ нь худалдагчийн бүтээгдэхүүн борлуулснаас олж ирж буй ахиу зардлыг хэлнэ.
$0 \leq a_2 \leq a_4 \leq \cdots \leq a_n \leq \infty$
Зураг 3.3-т зах зээлийн нийлүүлэлтийн талыг дүрслэв. Зах зээл дээр 3 худалдагч байгаа бөгөөд $a_2 = \$8$, $a_2 = \$12$, $a_2 = \$16$ байна. Энд нийлүүлэлтийн хууль үйлчлэх ба үнэ ихсэх тусам нийлүүлэлт ихсэнэ.



Зураг 3.3.

Зураг 3.1 ба Зураг 3.2-д эрэлт, нийлүүлэлт тодорхойлогдсон ба эндээс зах зээлийн хууль ёсоор эрэлт нийлүүлэлтийн тэнцвэр дээр тэнцвэрт үнэ тогтоно. Бидний жишээн дээрээс харахад тэнцвэрт үнэ нь $[\$10, \$12]$ энэ интервалд оршино. Энэ интервалын хамгийн бага үнэ нь худалдан авагчийн хожоог хамгийн их байлгах ба харин энэ интервалын хамгийн өндөр үнэ нь худалдагчийн хожоог хамгийн их байлгана.

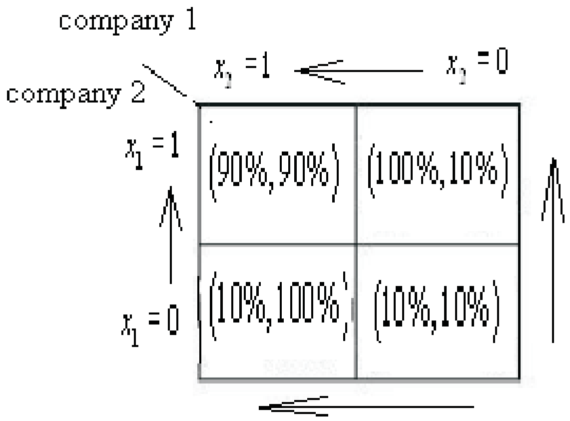


Зураг 3.4.

Энэ механизм нь дараах байдлаар ажилладаг. Жишээ нь 1-р худалдан авагч ба 2 дугаарын худалдагчийн хувьд хэрэв b_1 нь a_2-оос их $(b_1 \geq a_2)$ байвал худалдаа явагдаг бөгөөд дараачийн хослол руу шилжинэ.

Харин хэрэв $(b_1 < a_2)$ байвал худалдаа болохгүй. Иймд бидний жишээн дээр ахиу хослолын аргыг ашиглавал худалдан авагч 1 ба худалдагч 2-ийн хооронд худалдаа явагдана.

Жишээ 3.3. (Нийгмийн бэрхшээл)
Үйлдвэрлэгчид болон бизнесменүүд тэдний нэг нь эзэмшигдээгүй нөөцийг ашиглах тухай авч үзье. Нөөц нь нийгмийн, бүгд ашиглахад чөлөөтэй. Үүний маш олон жишээ байдаг. Жишээ нь метро гэх мэт
Нийгмийн бэрхшээл нь хэт олон оролцогчид (тоглогчид) нийгмийн нөөцийг ашиглах үед үүснэ. Энэ нь практикт 2 төрлийн алдагдал авчирдаг.
1. Нөөц буурах, шавхагдах
2. Үйлдвэрлэлийн үр өгөөж буурах
Үүний хамгийн хортой хэлбэр нь нөөцийн хоосрол юм. Үүний дүнд бүх үйлдвэрлэгчдийн үр өгөөж 0 болно.
Үүнийг бид тоглоомын хэлбэрт бичье.
i-г нийгмийн нөөц хэрэглэгчдийн индекс гэж үзье. (компани гэж нэрлэе.) x_i нь i-р компанийн стратеги болог. $x_i = 1$ гэвэл тус компани нийгмийн нөөцийг ашигладаг. $x_1 = 0$ бол нөөц ашигладаггүй.
Хэрэв компани нийгмийн нөөц ашигладдаггүй гэвэл хөрөнгийнх нь үр өгөөж нь өөр салбарынхтай адил 10% буюу 0.1 болно. Хэрвээ компани ашигладаг бол түүний өргөжилтийн үр өгөөж нь хэр олон өөр компани тус нөөцийг ашиглаж байгаагаас шалтгаална. Тэнцвэрт хүрэхийн тулд бүх компаниудын ашиглах нөөц нь нийгмийн үйлдвэрлэлийн хувьтай тэнцүү эсэхээс шалтгаална. Тэнцвэрт хүрэхийн тулд бүх компаниудын ашиглах нөөц нь нийгмийн үйлдвэрлэлийн хувьтай тэнцүү гэж таамаглая. m тооны компани нийгмийн нөөц ашигладаг гэвэл $\dfrac{F(m)}{m}$ нь тоглоомын шийд болно.
Ханамжийн функц нь дараах байдлаар өгөгдсөн гэе.
$u_i(x) = 0,1 \quad (x_1 = 0)$ үед
$u_i(x) = \dfrac{F(m)}{m} \quad (x_1 = 1)$ үед
$m = \sum x_i$ үед
$u_i(x) = 0,1(1 - x_i) + x_i \dfrac{F(m)}{m}$
$m = 2$ буюу 2 компани үйл ажиллагаа явуулж байгаа тохиолдлыг авч үзье. Үйлдвэрийн функц нь $F(m) = 1,1m - 0.1m^2$ тус функц нь үр өгөөжийн бууралтыг илтгэж байна. Ганцхан компани ажиллаж байна гэвэл өгөөж 100%. Ашиглах компанийн тоо ихсэх тусам өгөөж нь огцом унах болно. Энэ тохиолдолд 11 компани нөөцийг ашиглах үед өгөөж нь 0 болно.



Зураг 3.5.

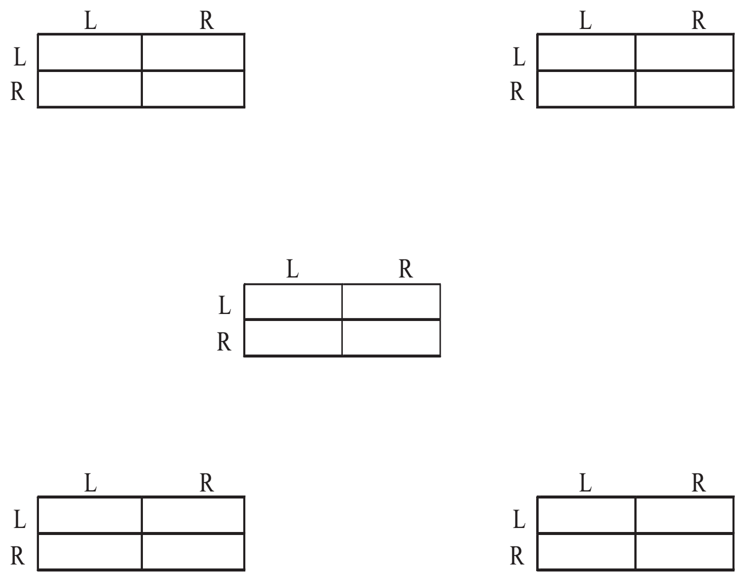
Компани нийгмийн нөөцийг ашиглаж байхад түүний өгөөж 100%, нийгмийн нөөцийг ашиглаагүй тохиолдолд түүний өгөөж нь 10% байг. Зөвхөн ганцаараа ашиглах тохиолдолд өгөөж нь 100%. Ашиглаж буй компаниудын тоо 10 үед дахиж шинээр компани орж ирэхгүй. $m = 10$ бол бүгд орох болно. Хэрвээ 10 компани орлоо гэж үзэхэд өгөөжүүд нь бүгд 10% болно. Одоо 10 дахь компаныг авч үзье. Компаниуд зэрэг үйл ажиллагаа явуулдаг гэж үзье. Компани нь өөрийгөө 10 дахь нь уу үгүй юу гэдгээ мэдэх боломжгүй. Үр дүн нь өгөөжийн түвшин 10%-аас их үед нийгэм илүү ихийг ашиглах учир тооцоолоогүй алдаа гарч ирэх болно. Хэрэв компани бүр нөөцийг ашиглахаа больсон гэж үзвэл нөөц нь үнэ цэнэгүй болно.

Жишээ 3.4. (Давталттай тоглоом)
Бидний өдөр тутмын амьдралд олон тооны стратегийн харилцан үйлчлэлүүд явагддаг. Хэн нэгэнтэй нэг өдөр уулзах, нөгөө хүнтэйгээ нэгээс олон өдөр уулзах хоёр маш их ялгаатай. Бизнесийн олон салбаруудад найдвартай бараа, даатгал, санхүүгийн үйлчилгээнүүд, болон үдэшлэг гэх мэт бараа үйлчилгээнүүдийн давтан худалдан авалт ашигтай ажиллахад маш чухал байдаг. Энэхүү жишээнд давталттай тоглоомын талаар тайлбарлах болно. Тоглоомууд хоорондоо ижил тоглогчидтой бөгөөд тоглоомыг нэгээс олон дахин тоглодог. Хувьсах нийлбэртэй тоглоомуудын хувьд давталт шинэ үр дүн бүхий сонирхолтой боломжуудыг үүсгэдэг. Зарим тоглоом нь нэг удаагийн тоглоомын үр дүнгээс илүү сонирхолтой байдаг. Давталттай тоглоомууд нь бүх талын өрнөж буй харилцан хамаарлуудын тухай чухал хэсгийг тайлбарладаг. Давталттай тоглоом нь нэг удаагийн тоглолтоос олон стратегитай байдаг тул илүү сонирхол татсан боломжуудтай байдаг. Курногийн зах зээлд тоглоом хязгаарлагдсан давталттай байдаг тул аж үйлдвэрийн газруудын ашгийн максимумчлахад хангалтгүй байдаг. Гэсэн хэдий ч хувьсах нийлбэртэй тоглоомын төгсгөлөг давталт бүхий олон тэнцвэр нь олон шинэ хожоо бүхий боломжу-

удыг үүсгэж байдаг. Төгсгөлөг давталттай тоглоомуудын Folk теором гэж байдаг. Folk теором давталттай тоглоомын дэд тоглоом бүхий төгс тэнцвэрийг тайлбарладаг бөгөөд төгсгөлөг давталт нь хэрхэн үр ашигтай үр дүнд хүрч болохыг харуулдаг. Үүний нөгөө талд төгсгөлгүй давталттай тоглоомын тухай ярих болдог бөгөөд энэ нь зарчмын хувьд төгсгөлөг давталттай тоглоомоос өөр юм. Төгсгөлгүй давтагдсан тоглоом нь ихэнхдээ корпорацийн харилцан үйлчлэлтэй холбоотой. Төгсгөлгүй давталттай тоглоомын хувьд нэгэн адил Folk теоромыг төгсгөлгүй давталттай Курно болон Бертрандын зах зээлийн дэд тоглоомын төгс тэнцвэрийг дүрслэхийн тулд ашигладаг. Аж үйлдвэрлэлд явагдаж буй нэгнээсээ "бэлэн будаа" идэх үнийн зонхилогчийн загварыг үнийн манлайлагчийн загвар гэдэг бөгөөд тэдгээр тэнцвэрүүдийг хүрээлэн байдаг аж үйлдвэржсэн эдийн засаг дахь асуудлуудыг тайлбарладаг.

2 удаагийн тоглоомын стратегиуд болон ашиг хонжоо

2x2 гэсэн энгийн хэлбэр бүхий тоглоомыг авч үзье. Хоёр тоглогч тус бүр хоёр, хоёр стратегитай байна.



Зураг 3.6.

3.6 зурагт энэхүү нөхцөл байдлыг харуулсан байна. Эхний тоглолтоос 4-н үр дүн гарна. Тэдгээр 4-н үр дүн нь хоёр дахь тоглолтыг удирдах боломжит түүх болдог. Зураг дахь анхны матрицаас хоёр дахь матрицын нүд тус бүр нь боломжит түүхийг харуулж байна. Үе бүрт тоглогддог тоглоом тус бүрийг нэг оролдлогот тоглоом гэдэг. Иймээс тухайн нэг давталттай тоглоом нь нэг оролдлогот тоглоомуудаас бүрддэг. Зурагт буй 5-н матриц тус бүр нь нэг ородлогот тогломын жишээ юм. Энэхүү зураг бүхэлдээ давтагдсан тоглоомыг харуулж байна. Ингэснээр стратегиа тодорхойлж чадна (тоглоомын бүх л бүтэн төлөвлөгөө). Нэг оролдлогот тоглоомын хоёр стратегийг зүүн (L), баруун (R) гэе. (L) эсвэл (R) стратеги нь тоглогчийн нэг дэх давталтанд юу хийхийг зааж өгдөг. Үүний дараа үүнийг удирдаж буй логикийн боломжит түүх тус бүрийн хувьд эдгээр стратеги нь хоёр дахь тоглолтонд юу хийхийг зааж өгдөг. 4-н боломжит түүх тус бүрт хоёр сонголт байх болно. Иймээс энэхүү шатанд 32 ширхэг боломжит сонголтууд байх болно.

Стра №	round 1	After (L,L)	After (L,R)	After (L,R)	After (R,R)
1	L	L	L	L	L
2	L	L	L	L	R
3	L	L	L	R	L
4	L	L	L	R	R
5	L	L	R	L	L
6	L	L	R	L	R
7	L	L	R	R	L
8	L	R	R	R	R
9	L	R	L	L	L
10	L	R	L	L	R
11	L	R	L	R	L
12	L	R	L	R	R
13	L	R	R	L	L
14	L	R	R	L	R
15	L	R	R	R	L
16	R	L	R	R	R
17	R	L	L	L	L
18	R	L	L	L	R
19	R	L	L	R	L
20	R	L	L	R	R
21	R	L	R	L	L
22	R	L	R	L	R
23	R	L	R	R	L
24	R	R	R	R	R
25	R	R	L	L	L
26	R	R	L	L	R
27	R	R	L	R	L
28	R	R	L	R	R
29	R	R	R	L	L
30	R	R	R	L	R
31	R	R	R	R	L
32	R	R	R	R	R

Зураг 3.7.

Тэдгээр стратегиудыг зурагт харуулав. Эдгээр стратегиудын зарим нь өөр нэртэй байх нь чухал. Стратеги нь зүүнийг тоглодог бөгөөд ямар ч боломжит түүхийн дараахь хоёрдугаар давталтанд зүүнийг тоглож байвал ийм стратегийг **нөхцөлт бус стратеги** гэнэ. Иймээс мөн 32-

р стратеги нь эсрэгээрээ баруурыг сонгодог **нөхцөлт бус стратеги**. Харин 16-р стратегийг нь **эргэлттэй стратеги** гэдэг. Энэ нь эхний давталданд зүүнийг тоглодог. Харин дараа нь ямар ч боломжит түүхийн дараа хоёр дахь тоглолтонд баруурыг тоглодог.
17-р стратеги нь **эргэлттэй стратеги** юм. 6-р стратеги нь **дэгээ стратеги** юм. Энэхүү стратеги нь хэрэв таны эсрэг тоглогч эхний давталтанд зүүнийг тоглосон бол та дараагийн тоглолтондоо нөгөө хүнээ дуурриан зүүнийг тоглодог. Хэрэв таны эсрэг тоглогч эхний тоглолтондоо баруурыг сонгосон бол та дараагийн тоглолтондоо бас л баруурыг сонгоно. Дэгээ стратегиуд нь нэг оролдлогот тоглоом дахь таны эсрэг тоглогч зөвхөн нэг цэвэр стратегийг тоглохыг хүсэж байгаа үед ашиглагддаг.
27-р стратеги бол баруун дэгээ стратеги юм. 2×2 буюу хоёр удаа тоглогддог тоглоомын энгийн хэлбэрийг доош цувуулан бичвэл 32×32 матрицыг бичих хэрэгтэй болно.
Матрицууд зөвхөн дараагийн давталттайгаа хамт цааш өргөжнө.
Давтагдсан тоглоомуудад анализ хийх нь чухал. Давталт нь дэд тоглоомуудыг үүсгэдэг бөгөөд 4-н эцсийн дэд тоглоомтой байдаг. Давтагдсан тоглоомууд дахь дэд тоглоомын үндсэн бүтцийг ашигласнаар бид том хэмжээтэй матрицуудыг бичиж цагаа алдалгүйгээр асуудлаа шийдэж чадна.
Давтагдсан тоглоомуудын хожлууд нь үндэслэлтэй шулуун шударга байдаг.
Бидний зорилго бол ямар нэг аргаар жил бүрийн хожоог (ашгийг) нэмэгдүүлэх явдал ажээ. Үүнийг хийх хамгийн ерөнхий арга бол өнөөгийн үнэ цэнийн арга юм. R бол дискаунт. $(0 < R < 1)$ $R = 0$ бол ирээдүй ямар ч үнэ цэнэгүй гэдгийг харуулна. $R = 1$ бол ирээдүй одоогоос чухал гэдгийг харуулж байна. Одоогоос T жилийн дараахь 1\$-ын ашиг хонжоо нь одоо үед $1\$ - RT$ гэсэн үнэ цэнэтэй. $U_1(t)$ бол нэгдүгээр тоглогчийн давталтан дахь ашиг хонжоо гэе. Тэгвэл хоёр удаа тоглосон тоглоомын нэг тоглогчийн өнөөгийн үнэ цэнэ U_1 бол:
$U_1 = U_1(0) + RU_1(1)$ болно.
$T = 0$ хугацаанаас тоглоом эхэлнэ. Одоо хоёр удаа тоглогдсон тоглоомын хоёрдугаар тоглогчийн өнөөгийн үнэ цэнийг (U_2) ижил аргаар олж чадна.
Энэхүү явцад дискаунтын 2 тайлбар гарч ирнэ. R-ын нэг тайлбар бол дан ганц хугацааны дискаунт юм. Хэрэв r дискаунтын хувь (зах зээлийн хүүгээр тодорхойлогддог) бол дискаунтын хүчин зүйл R нь:

$$R = \frac{1}{(1+r)}.$$

Нэг жилд ноогдох хүүгийн хувь 10% бол дискаунтын хүчин зүйл 0.909 байна. Хоёр дахь дискаунтыг тайлбарладаг тайлбар бол магадлал юм. Үүний дагуу R нь **тасралтгүй магадлал** юм.
Өөрөөр хэлбэл тоглоом дахин давтагдсан байх магадлал.
Иймээс энэхүү тайлбар бидэнд одоогийн тодорхой бус байдал ирээдүйн тодорхой бус байдлаас бага байдгаар хэмжигддэг гэсэн ойлголтыг төрүүлдэг.
Аль ч тайлбарын дагуу бид U_1-ыг яг ижилхнээр илэрхийлж чадна. Бид-

ний үздэг бүх л зааглал бүхий давталттай тоглоомуудад $R = 1$ гэж үзнэ. Өөрөөр хэлбэл, хугацаа маш богино эсвэл нэг оролдлогот тоглоом нь цаашид давтагдах нь тодорхой байна. Мөн бид хожлуудыг нормчлоно. Иймээс давталттай тоглоомын хожлууд нэг оролдлогот тоглоомын хожлуудтай ижил хэмжигдэхүүнтэй байдаг бөгөөд 1 оролдлогот тоглоомын тоглогдсон хугацаануудын тооны дагуу хуваагдаж хийгддэг. Ингэснээр бид хоёр тоглогддог нэг оролдогот тоглоомд i-р тоглогчийн ханамжийг U_i-ыг дараахь байдлаар илэрхийлнэ.
$u_i = \left(\frac{1}{2}\right)[U_i(0) + U_i(1)]$
Хожил болон стратегиудыг мэдэж авсны дараа зарим зааглалтай давтагдсан тоглоомуудыг хийхэд бэлэн болно. Үүний дараа хоёр тоглогчийн тэг нийлбэртэй анхны тоглоом руугаа шилжинэ.

Жишээ 3.5. (Хязгааргүй давтагдах тоглоом)
Стратегиуд ба хожлууд олон дахин давтагддаг тоглоомыг авч үздэг 3 шалтгаан байдаг.
1. Та үхлээ ч таны компани үхдэггүй.
2. Хүмүүс үхэхгүй юм шиг тоглоомонд оролцдог.
3. Folk теорем нь олон удаа тоглогддог нэг тэнцвэрт тоглоомын хувьд үйлчилдэг боловч нэг удаагийн нэг тэнцвэртэй тоглоомын хувьд хүчингүй. Жишээлбэл, энэ нь Курно болон Бертрандын зах зээлийн тоглоомуудын хувьд шинэ, найдвартай тэнцвэрийн ашгийн боломжуудыг бий болгодоггүй. Олон дахин давтагддаг тоглоомын стратеги нь боломжит түүх бүрийг дагалдаж буй тоглолт бүрийн хязгааргүй олон сонголтуудыг онцлох хэрэгтэй болдог.
Үе бүрийн дараа пүүс бүр 0-оос 90-ийн хооронд ямар нэгэн тоо хэмжээг ямар ч үед тээвэрлэнэ гэж үзье. Тоглолтын хязгааргүй стратеги дараах байдалтай болно.
Эхний тоглолт: 3 нэгжийг тээвэрлэх
2-р тоглолт: боломжит ямар нэгэн түүхийн дараа 3.1 нэгжийг тээвэрлэх
3-р тоглолт: боломжит ямар нэгэн түүхийн дараа 3.14 нэгжийг тээвэрлэх
4-р тоглолт: боломжит ямар нэгэн түүхийн дараа 3.141 нэгжийг тээвэрлэх
5-р тоглолт: боломжит ямар нэгэн түүхийн дараа 3.1415 нэгжийг тээвэрлэх гэх мэт.
Пүүсийн стратеги нь n-р үед ямар ч нөхцөлгүйгээр π тооны эхний n бутархайг тээвэрлэх явдал юм.
Давтагддаг Курногийн тоглоомын хамгийн энгийн стратегийн жишээ нь дараах болно.
Бүх тоглолт: боломжит ямар нэгэн түүхийн дараа 16 нэгжийг тээвэрлэх
Нэг пүүс 16-аас эхлэн 16 нэгжийг тээвэрлэх үү, 20 нэгжийг тээвэрлэх үү гэдгийн хооронд эргэлдэж байгаа гэж таамаглая.
Пүүсийн стратеги дараах байдалтай байна.

Эхний тоглолт ба түүний дараах бүх сондгой тоон тоглолтууд: ямар нэгэн боломжит түүхийн дараа 16 нэгжийг тээвэрлэх
2-р тоглолт ба түүний дараах бүх тэгш тоон дугаартай тоглолтууд: боломжит ямар нэгэн түүхийн дараа 20 нэгжийг тээвэрлэх.
Шалтгаант стратегиуд нь ялангуяа олон дахин давтагддаг тоглоомын хувьд чухал юм. Нэг пүүс 16 нэгжийг тээвэрлэхийг хүсээд бусад бүх пүүс бүрээ ч бас 16 нэгжийг тээвэрлэхийг хүсч байна гэж таамаглая.
90 нэгж бол зах зээлийг дүүргэнэ. 16 нэгжийг тээвэрлүүлэхийг хүсэх боловч нөгөө талаар зах зээлийг дүүргэхэд бэлдэж буй шалтгаант стратеги нь:
Эхний тоглолт: 16 нэгжийг тээвэрлэх
1-р тоглолт: бүх пүүсүүд 16 нэгжийг тээвэрлэж байгаа түүхийн дараа 16 нэгжийг тээвэрлэх, 90 нэгжийг үүрд тээвэрлэх.
$n > 1$ бүх n-ийн хувьд. Энэ стратегийн хувьд аюултай зүйлийг 16 нэгжийг тээвэрлэхээс өөр зүйл хийж байгаа пүүсүүд бий болгоно.
Зах зээлийг дүүргэнэ гэсэн аюул нь баталгаатай биш. Гэхдээ бид итгэж болохоор үнэхээр үр дүнтэй аюулыг яаж бий болгохыг харах болно.
Олон дахин давтагддаг тоглоомын хувьд ашгийг үнэлэх нь илүү хэцүү байдаг. Зуун жилийн өмнөх доллар одоогийн доллар шиг үнэтэй байгаагүй бөгөөд олон дахин давтагддаг тоглоом одоогоос зуун жилийн дараа хүртэл үргэлжилнэ. Цаг хугацаагаар үзүүлсэн асуудлыг шийдэхийн тулд ирээдүйн ашгуудыг одоо үетэй харьцуулж дискаунтчилах ёстой. Математикийн учир шалтгаанаар дискаунтын түвшин $R < 1$ үед тогтоогддог, эс тэгвэл ашгийн хязгааргүй урт цуваа нь хоорондоо нийлэхгүй. Бид энэ хэлбэрийн илэрхийллийг үнэлэх хэрэгтэй $u_1 = \sum_{R}^{\prime} U_1(t)$
энд t нь тэгээс (одоо) хязгааргүй (холын ирээдүй) хүртэл үргэлжилнэ. Хязгааргүй нийлбэрийг тооцоолоход хэцүү. Олон дахин давтагддаг тоглоомын хувьд энэ чанар нь тэнцвэрийг олоход хэрэгтэй бөгөөд ялгаатай цуваануудыг ойролцоогоор бодох боломж олгоно.
1-р тоглогч тоглоом тоглох бүрдээ үргэлж 1 гэсэн ашиг олдог гэж таамаглая.
Тэгвэл дээр өгөгдсөн томъёогоор бол бүх t-гийн хувьд $u_1(t) = 1$ байна. Энэ тоглогч хязгааргүй цуваааны үнэ цэнийг олохыг хүсч байна.
$u_1 = 1 + R + R^2 + R^3 + \ldots$
0-ээс 1-ийн хоорондох дискаунтын хүчин зүйл R-ийн хувьд, $0 < R < 1$, цувааны нийлбэр нь дараах болно.
$u_1 = \dfrac{1}{(1-R)} = 1 + R + R^2 + R^3 + \ldots$
R нь 1-ээс бага учир бутархайн хуваарь нэгээс бага болж үе бүрт төлөгдөж буй нэг долларын одоогийн үнэ цэнэ нэг доллараас их болно гэдгийг харж болно, гэхдээ энэ нь хязгааргүйгээс бага юм.
Жишээ нь, $R = 0.9$ гэвэл

$u_1 = \dfrac{1}{(1-0.9)} = \dfrac{1}{0.1} = \$10.$
Одоогоос хязгааргүй хүртэл төлөгдөж буй нэг доллар нь одоо төлөгдөх 10 доллартай тэнцүү юм. Энэ тооцоог 1 гэсэн тогтмол ашгийн хувьд хийсэн. k гэсэн тогтмол ашгийн хувьд авч үзвэл үржүүлнэ:
$u_1 = kR + kR^2 + kR^3 + \cdots = k(1 + R + R^2 + R^3 + \dots) = \dfrac{k}{(1-R)}.$
Эцэст нь хязгаарлагдмал давталттай тоглоомд байдаг шиг нэг удаагийн тоглоомтой адил хэмжээгээр олон дахин давталттай тоглоомтой холбогдох ашгийг хадгалахыг хичээнэ. Үүнийг хийх арга нь ханамжийн хязгаартай нийлбэрийг $(1-R)$-аар үржүүлэх явдал. Энэ нь шугаман хувиргалт учраас ямар нэг тоглогчийн үр дүнгийн дараалалд нөлөөлөхгүй. Нийлбэрийг нь бодохын тулд хязгааргүй давталттай тоглоом дахь 1-р тоглогчийн ашгийг хязгааргүй нийлбэрээр үржүүлнэ.

$$u_1 = (1-R)\sum Ru_1(t)$$

Энэ нь бусад тоглогчийн хувьд ч адил юм. Ашиг болон стратегиудыг сонгосноор бид одоо зах зээлд олон дахин давтагддаг тоглоомыг авч үзэхэд бэлэн боллоо.

Жишээ 3.6. (Олон давталттай Курногийн тоглоом)
Үе бүрт 1-р ба 2-р гэсэн 2 пүүс бие биенийгээ төгс орлодог бүтээгдэхүүнээ зах зээл дээр гаргадаг. Үе бүрийн зах зээлийн эрэлт дараах тэгшитгэлээр өгөгдөнө. $P = 130 - Q$.
Үүнд P нь зах зээлийн үнэ бөгөөд Q нь зах зээлийн тоо хэмжээ.
Пүүс бүр бүтээгдэхүүнээ дундаж тогтмол зардал (ба ахиу зардал) $c =$ \$10-гаар үйлдвэрлэнэ. Хэрэв пүүсүүд энэ тоглоомыг нэг удаа тогловол Курногийн тэнцвэр $x_1^* = x_2^* = 40$ болно.
Зах зээлийн үнэ \$50, пүүс бүрийн ахиу ашиг нь \$40 бөгөөд пүүс бүр \$1600 ашиг олдог. Нэг удаагийн тоглоомын хувьд монополийн шийдвэр бол мэдээж хэрэг их ашиг. Монополь бүтээгдэхүүнээ 60 нэгжээр хязгаарлаж үнээ \$70 болгон \$60-ын ахиу ашигтай байж \$3600-ын ашиг олно.
Хэрэв 1-р ба 2-р пүүсүүд олон дахин давтагддаг тоглоомд илүү сайн тэнцвэр дээр тоглож чадсан бол тэд ийм өндөр ашиг хүртэж чадах байсан. Курногийн тоглоомыг байнга олон дахин тоглодог нөхцөлт бус стратегиэр эхэлцгээе.
Тоглолт бүр: боломжит бүх түүхийн дараа 40 нэгжийг тээврлэх
Хоёр пүүс энэ стратегиэр тоглоно гэе. Пүүс бүр үе бүрт \$1600-ын ашигтай байна. Пүүс бүрийн хэвийн ашгийн хязгааргүй хэмжээ нь

$$\frac{(1-R)1600}{(1-R)} = \$1600$$

бөгөөд үүнд дискаунтын түвшинг авч үзээгүй.
Одоо ашгаа нэмэгдүүлэхийн тулд 1-р пүүс өөрчлөлт хийхээр оролдоно

гэж үзье. Нэг хүлээж буй өөрчлөлт нь үе бүрт зах зээл рүү нэг нэгжээр цөөн бүтээгдэхүүн тээвэрлэх явдал юм. Энэ стратеги нь үнийг \$1-оор өсгөх давуу талтай. Энэ нь 1-р пүүсийн ашигт ямар нөлөөтэйг авч үзье. Зах зээлийн үнэ \$50-оос \$51 хүртэл өсч энэ хооронд 1-р пүүсийн тээвэрлэлт 40-өөс 39 болж буурна.
Үе бүр дэх 1-р пүүсийн ашиг одоо дараах болно.
$u_1(t) = (51 - 10)39 = \$1599$
Энэ нь 1-р пүүсийн хувьд маш муу бөгөөд Курногийн тэнцвэр дээр байснаас \$1-оор бага юм. Хэрэв 1-р пүүс үргэлж энэ өөрчлөлтийг хийвэл $\dfrac{(1-R)1599}{(1-R)} = 1599\$$ болно.
Дээрх нь ахиад 1600-гаас бага байна.
2-р пүүсийн хувьд адил дүгнэлт хийж болно. Бүтээгдэхүүнээ багасгаснаар ашгаа ихэсгэж чадахгүй. Бүтээгдэхүүнээ нэмэгдүүлэх нь ашгийг өсгөхгүй гэдгийг харуулж болно. Бүтээгдэхүүнээ өсгөх ба бууруулахын аль нь ч ашгийг өсгөхгүй учраас үргэлж тоглогдох нэг удаагийн Курногийн стратеги нь хязгааргүй давтагдах тоглоомын тэнцвэр юм.
R гэсэн дискаунтын хүчин зүйлийн хэмжээ өмнөх үзүүлэлт дээр ямар ч үүрэг гүйцэтгэхгүй гэдгийг ажиглаж болно. Учир нь стратегиуд нь нөхцөлт бус бөгөөд нэг удаагийн Курногийн тэнцвэрийг тоглоход үргэлж нэг ижил зүйл хийдэг. Ашгаа нэмэгдүүлэхийн тулд эдгээр пүүсүүд илүү төсөөлөхүйц стратегиудыг хэрэглэх хэрэгтэй болно. Хэрэв пүүсүүд ирээдүйн ашигтаа хангалттай анхаарал тавьж байвал, өөрөөр хэлбэл, хэрэв R нь 1-тэй хангалттай ойрхон байвал монополийн ашгийг олон дахин давтагддаг зах зээлийн тоглоомын зөвшилцөөгүй тэнцвэр дээр авч болно. Тухайлбал, энэ үр дүнг бий болгодог ашгийн симметрик тэнцвэр байдаг ба тэр нь дэд тоглоомын хувьд төгс юм. Одоо үүнийг олцгооё. Нэгдүгээрт бидэнд монополийг бий болгох стратеги хэрэгтэй, энэ үед тэнцвэр оршсоор байх болно. Үүний тулд бид шалтгаант стратегийг хэрэглэдэг. Шалтгаант стратеги нь гүйцэтгэвэл шагнал, эс тэгвэл шийтгэл гэсэн үг юм. Шагнал нь эдгээр пүүсүүдийг өөртөө татаж байдаг үүрд үргэлжлэх монополийн ашиг болно. Шийтгэл нь пүүсүүдийн нэг нь монополийн тоо хэмжээний тохиролцооноос ухарсан үе дэх шийтгэл болно. Шийтгэл нь пүүсүүд тохиролцоогоо зөрчихгүй байхаар хатуу байх ёстой.
Бидний стратеги иймл байх ёстой гэж боддог шиг дараах нь шалтгаант стратеги байна.
Эхний тоглолт: 30 нэгжийг тээвэрлэх
1-р тоглолт: 2 пүүс хоёулаа 30 нэгжийг тээвэрлэсэн ямар нэгэн түүхийн дараа 30 нэгжийг тээвэрлэх, эсвэл үргэлж 40 нэгжийг тээвэрлэх.
Энэ стратегийн эхний хэсэг нь шагнал бөгөөд монополийн ашгийг үүрдийн байлгана. Пүүс монополийн ашгаа хадгалахын тулд хангалттай тээвэрлэснээр үүргээ гүйцэтгэнэ. Энэ стратегийн 2 дахь хэсэг нь шийтгэл болно. Пүүс хийх ёсгүй зүйлээ хийсэн гэж бодъё. Тэгвэл бүх пүүсүүд тэр үеэс эхлээд нэг удаагийн Курногийн тэнцвэрт орно. Энэ нь моноп-

олийг бутраасан пүүс болон бусад пүүсүүдийн ашгийг бууруулна. Энэ нь хүнд шийтгэл юм. Монополиос татгалзсан явдал нь шийтгэлийг бий болгоно.
Бид эхлээд энэ стратеги нь тэнцвэр гэдгийг харуулах хэрэгтэй. Энэ баталгаа нь дискаунтын хүчин зүйлтэй холбоотой. Дараа нь бид энэ найдвартай гэдгийг харуулъя. Найдвартай байдал нь дискаунтын хүчин зүйлээс хамаардаггүй. Холбогдох симметрик байдал өгөгдсөнөөр бид зөвхөн 1-р пүүсийг авч үзнэ. 1-р пүүс монопольд үүргээ гүйцэтгэж 30 нэгжийг тээвэрлэснээс илүү сайныг яаж хийж чадах вэ? ОПЕК-ийн орны хувьд төлөвлөснөөсөө илүүг тээвэрлэх явдал байдаг. Гэхдээ яарах хэрэгтэй болно. Эсрэг тал нь мэдээд хоёулаа Курногийн нэг удаагийн тэнцвэрийн байдалд үүрд орохоос өмнө 30 нэгжээс илүүг нэг удаа л тээвэрлэж чадах бөгөөд яаравчлах хэрэгтэй. Дараагийн удаад хэрэв 1-р пүүс 30 нэгжээс илүүг тээвэрлэх гэж байгаа бол одоо үеэс илүү цаг үе байхгүй. Дискаунтчлалаар авч үзвэл өнөөдрийн доллар маргаашийн доллараас үргэлж үнэтэй байдаг. Тиймээс 30 нэгжийг тээвэрлэхээс татгалзах хамгийн ашигтай явдал нь өнөөдөр болох ба нэг дахин том тээвэрлэлт болно. Түүнчлэн 1-р пүүс тээвэрлэлт хэр том байж болох талаар анхааралтай төлөвлөх шаардлагатай. Хэрэв тээвэрлэлт хэтэрхий том байвал энэ шийдвэр нь ашиг олох чадварыг байхгүй болгоно. Зөв хэмжээтэй тээвэрлэлт хийхийн тулд 1-р пүүс нэг үеийнхээ ашгийг максимумчлах ёстой бөгөөд энэ үед эсрэг тал нь 30 нэгжийг тээвэрлэнэ.
$x_1 = f_1(x_2) = 60 - \frac{30}{2} = 45$
1-р пүүс өнөөдөр 30-ын оронд 45-ыг тээвэрлэж байна. Зах зээлийн үнэ \$70-аас \$45 руу унаж 1-р пүүсийн ахиу ашиг \$60-аас \$45 болж унана. Гэхдээ 1-р пүүсийн богино хугацааны ашиг \$1600-аас (\$45)(45) = \$2025 болж өснө. Яг одоо бол 1-р пүүс маш их мөнгө олж байна.
Гэвч удалгүй тааламжит цаг дуусч үе бүрт \$1600 олох үүрдийн Курногийн тоглоом эхэлнэ. Бид одоо монополийг бутаргах хамгийн ашигтай замыг 1-р пүүсийн хувьд олсон гээд тохиролцоогоо зөрчсөнөөр төлбөр төлөх эсэхийг харъя. Хэрэв төлбөр төлөх шаардлагатай бол бидний шалгаж буй шалтгаант стратеги нь тэнцвэр биш. Хэрэв боломжит хамгийн ашигтай аргаар тохиролцоог зөрчихөд төлбөр төлөхгүй бол шалтгаант стратеги нь тэнцвэр мөн юм. 45 нэгжийг нэг үе тээвэрлээд дараа нь Курногийн тээвэрлэлтийг үүрд хийвэл дараах төлбөр төлнө.
$\frac{u_1}{(1-R)} = 2025 + 1600(R + R^2 + R^3 + \dots)$
Энэ нь эхлээд 45 нэгжийг тээвэрлээд дараа нь Курногийн нэг удаагийн үүрд ашигтай байх үеийн ашиг юм. Энэ нь
$\frac{u_1}{(1-R)} = 2025 - 1600 + 1600 + 1600(R + R^2 + R^3 + \dots) = 425 + \frac{1600}{(1-R)}$
$(1-R)$-аар үржүүлж нормчилбол

$$u_1 = 2025 - 125R$$

Монополийг бутаргавал одоо үед төлбөр төлнө, харин дараа нь үргэлж багыг төлөх болно. Бидний өмнө харсан шиг монопольт байдлыг хадгалан тоглох нь үе бүрт \$1800-ыг өгдөг, тэгвэл нормчилсны дараа энэ төлбөр нь бас л \$1800 юм. Дискаунтын хүчин зүйлийн хувьд дараах нөхцөл биелнэ.

$$2025 - 425R < 1800.$$

Дискаунтын хүчин зүйл R нь дээрх тэнцэтгэл бишийг хангаж байвал монополийн дүрмийг зөрчих нь монопольд тоглохоос илүү бага төлбөр төлдөг. Энэ тэнцэтгэл бишийг бодвол $R > \dfrac{9}{17}$ болно.

$\dfrac{9}{17}$ юмуу 53%-иас их ямар ч дискаунтын хүчин зүйл 1-р пүүсийг монопольд үнэнч байлгаж хууран мэхлэлт хийхгүй болгоход хүргэнэ.

Энэ тэнцэтгэл биш нь хэрэв тоглогчдын дискаунтын хүчин зүйл 1-тэй хангалттай ойрхон байвал юу болох гэдгийг тодорхойгоор харуулдаг.

Хэрэв цаг хугацаа нь жил байсан бол энэ нь дискаунтын хүчин зүйлийг 50% орчим руу бууруулж бараг 100%-ийн жилийн зээлийн хүүг хүртэх болно. Үүний оронд зээлийн хүү 5%-иас 20%-ийн хооронд хэлбэлздэг.

Эдгээр түвшнүүдийн хувьд дискаунтын хүчин зүйл хэзээ ч 83%-иас доош буухгүй. Бид сая шалтгаант стратеги нь тэнцвэр мөн гэж харуулсан.

Найдвартай байдлыг шалгах нь маш амархан. Бид нэг удаагийн Курногийн тэнцвэрээр ($x_1 = 40$) боломж бүрт тоглох нь тэнцвэр гэдгийг аль хэдийнэ шалгасан. Тиймээс хэн нэгэн монополийг бутаргавал энэ аргаар тоглох аюул нь найдвартай. Мэдээжээр зах зээлийг үүрд эзлэх ($x_i = 120$) гэсэн илүү аймшигтай аюул байнга байдаг. Мөн монополийн шийдвэрийг дэмжихэд ашиглагддаг илүү муу ямар нэгэн аюул бас байдаг. Гэхдээ ямар нэгэн илүү муу аюулд бас найдвартай байдлын асуудал байдаг. Олон дахин давтагддаг Курногийн зах зээлийн тоглоомын энэ дэд тоглоомын төгс тэнцвэрт сонирхолтой шинэ ашгийн боломжууд байдаг. Тухайлбал, пүүс бүрийн хувьд 1800\$ нь монополийн ашиг юм. Энэ үр дүн нь нэг удаагийн Курногийн зах зээлийн тоглоомд цорын ганц тэнцвэр байдаг гэсэн баримтаас үл хамааран гарч байгаа юм. Энэ нь боломжтой гэдэг нь тохиолдлын чанартай зүйл биш.

Жишээ 3.7. (Дохио өгөх тоглоом болон дараалсан тэнцвэр)

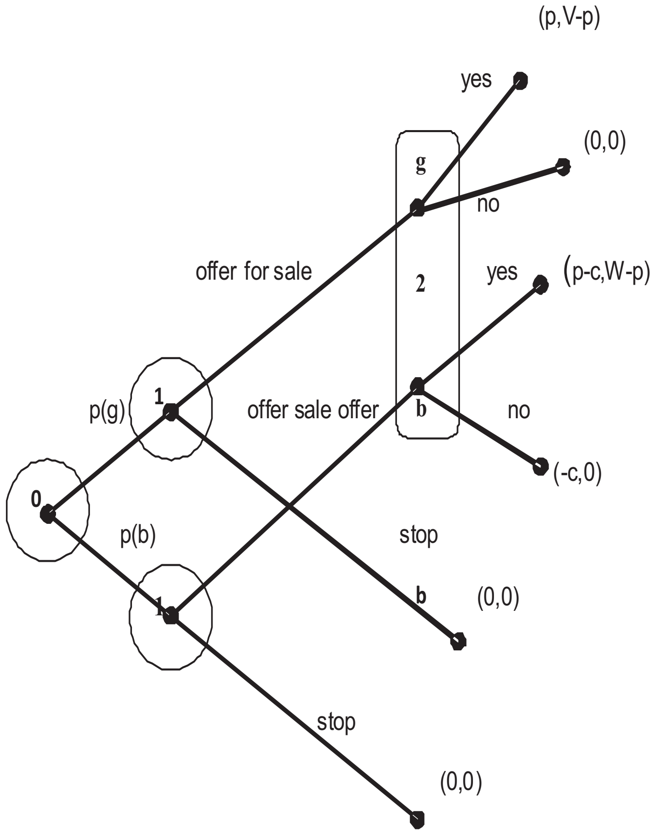
Энэхүү жишээ нь төгс бус мэдээлэлтэй харьцах нэгэн төрлийн тоглоомын талаарх хэсгээр эхлэх болно. Төгс бус мэдээлэл бидний хэдийнэ авч үзэн судалсан тоглоомуудын заримд нь тодорхой хэмжээний үүрэг гүйцэтгэж байсан билээ. Жишээлбэл, Покер тоглоомд нэгдүгээр тоглогчийн амжилт нь бүхэлдээ өөрийнх нь гарт ирсэн модноос хамаарч байсан бол хоёрдугаар тоглогчийнх тийм биш байдаг. Нэг тоглогч ямар нэг зүйл мэдээд өөр нэг тоглогч түүнийг нь мэдэхгүй байгаа нөхцлийг мэдээллийн тэгш бус байдал хэмээдэг. Энэ болон дараачийн хоёр жишээнд мэдээллийн тэгш бус байдал ба төгс бус мэдээллийн талаар судлах болно.

Одоо дохио өгөх тоглоомын талаар авч үзье. Энэ тоглоомонд нэг тоглогч

нөгөөгөөсөө илүүтэй мэдээлэлтэй байдаг бөгөөд хэн нь эхэлж хөдлөх ёстойгоо өөрсдөө мэдэж байдаг байна. Жишээлбэл, та болон хуучин машин борлуулагч хоёрын дунд дохио өгөх тоглоом зохиолоо гэж бодъё. Борлуулагч машины талаар танаас хавьгүй их зүйлийг мэднэ. Тиймээс тэр эхлээд санаачлага гаргаж үнэ хөлсний тал гэх мэтээр шийдвэр гаргах болно. Ийм тоглоом эрт дээр үед ч байсан бөгөөд Caveat Emptor (Кавеат Эмптор) буюу "худалдан авагчийг болгоомжлуулах" гэж нэрлэдэг байжээ. Энэ төрлийн тоглоом нь хувийн хэвшлийн корпораци олон нийтэд хувьцаа санал болгох гэх мэтэд гарч ирдэг. Корпораци юу үнэ цэнэтэй болох талаар хамгийн сайнаар зохион байгуулагдсан гадаадын хөрөнгө оруулагчдаас ч илүү ихийг мэдэж байдаг. Иймээс дохио өгөх тоглоомууд нь дотоод мэдээлэл гэх ойлголтыг судлахад онцгой ач холбогдол өгдөг.
Энэ бүлэгт ийм тоглоомуудыг хэрхэн шийдвэрлэхийг үзүүлэх бөгөөд мэдээлэлтэй тоглогч нь тоглоомыг төгсгөх хоёр янзын нүүдэлтэй, мэдээлэлгүй байгаа тоглогч мөн хоёр нүүдэлтэй, гэхдээ тэдгээрийн аль аль нь тоглоомыг төгсгөх нөхцөлтэй дохио өгөх тоглоомын үндсэн хэлбэрийг авч үзье. Зах зээлүүдэд тэгш бус мэдээллийг хуваарилахад тун хүнд байдаг.

3.7.1 Хоёр тоглогчтой дохио өгөх тоглоом

Энэ хэсэгт хоёр тоглогчийн хоорондох төгс бус мэдээллийн тоглоомыг авч үзэх бөгөөд нэг нь мэдээлэлтэй, нөгөө нь мэдээлэл олж чадаагүй тоглогч нар байх болно. Энэ тоглоомыг Кавеат Эмптор буюу эртний Ромчуудын зүйр үгс биеллээ олсон нэрээр нэрлэдэг. Эхний тоглогч буюу худалдагч тал мэдээлэлтэй байх бөгөөд түрүүлж хөдөлдөг. Хоёрдугаар тоглогч буюу худалдан авагч мэдээлэлгүй байх бөгөөд дараа нь хөдөлдөг байна. Тоглоом санаандгүй буюу тохиолдлын нүүдлээр эхлэх бөгөөд зөвхөн худалдагч тал үр дүнг мэднэ. Энэ нь худалдагч талын зарах бүтээгдэхүүн сайн ч бай муу ч бай хийгддэг ажээ. Худалдагч тал өөрийн барааны сайн мууг мэдэж байдаг. Бүх худалдан авагчид зарагдаж буй бараа сайн байх магадлал p(сайн), мөн уг бараа нь муу бараа байх магадлал p(муу) байдгийг мэддэг. Барааны чанар нь сайн гэсэн мэдээлэлтэй бол худалдагч тал түүнийгээ санал болгосон хэвээр эсвэл зах зээлээс татаж авч болно. Хэрэв худалдагч тал бүтээгдэхүүнээ зах зээлээс эргүүлэн татсан тохиолдолд тоглоом эхний нөхцөлдөө буюу хэн нь ч хэндээ мөнгө төлөлгүй дуусдаг.



Зураг 3.8. Кавеат Эмптор, өргөтгөсөн хэлбэр

Хэрэв барааг худалдахаар санал болгосон нөхцөлд худалдан авагчийн нүүдлээ хийх ээлж ирнэ. Худалдан авагчид мэдээллийн хоёр уулзвар огтлолцол байдаг: g огтлолцол буюу худалдахаар санал болгосон бараа сайн байхад, мөн b огтлолцол буюу муу бараа санал болгогдсон үед. Худалдан авагч тэдгээрт аль алинд нь тийм эсвэл үгүй гэж хэлэх эрхтэй. Хэрэв тэр үгүй гэж хэлвэл ямар ч тохиролцоо хийгдэхгүй ба сайн бараа борлуулагч 0 хөлс авч муу бараа борлуулагч $-c$ хэмжээний хөлс авна. Харин тийм гэж хэлбэл тохиролцоо хийгдэнэ. Сайн бараа борлуулагч p үнэ бүхий хөлс авч муу бараа борлуулагч $p-c$ хэмжээний хөлс авна. Сайн бараа нь худалдан авагчийн хувьд V үнэтэй ба V-р гэсэн хөлстэй. Муу бараа нь худалдан авагчийн хувьд W үнэтэй ба хөлс нь $W-p$ байна. Худалдан авагч сайныг авсанаар ашигтай байх ба мууг авсанаар алдагдал хүлээнэ.

$$V > p > W$$

Кавеат Эмптор-ийн 3 тайлбар байдаг. Уламжлалт тайлбарын хувьд худалдагч нь хуучин машин борлуулагч байдаг. Машины үнэ p, машиныг шинэ мэт харагдуулахад зарцуулсан зардал c байна. Худалдан авагч авах эсэхээ өөрөө мэднэ. Хоёр дахь тайлбарын хувьд гол төлөв коллеж төгсөгчдөд хамаардаг. Энд худалдагч нь ажил хайгч, худалдан авагч нь ажил олгогч байдаг. Ажил хайгч нь ярилцлагандаа тэнцэхүйц хэмжээний сургалтын зардал нь c гарна. Мэргэшээгүй хүн ажилд авбал ажил олгогч шатах болно. Гурав дахь нь хамгийн зүйрлэл ихтэй тайлбар. Энд худалдагч нь хувьцаа гаргаж буй компани юм. Ажилчид нь компанийхаа хэтийн төлөвийг мэддэг боловч хувь нийлүүлэгчид нь мэдэхгүй. Компанийг сайн мэтээр харагдуулж чадахуйц бүртгэлийн зардал нь c. Компаний үйл ажиллагаа муу явуулбал худалдан авагчид алдагдалтай байх болно.

Нийт зах зээлийн хямрал

Бүхий л бараа борлуулагчид худалдан авагч тал татгалзах, бүтээгдэхүүнийг нь зах зээлээс татахаас эмээдэг. Худалдаа явагдаж буй нөхцөлд л тэд орлого олох боломжтой байдаг. Мэдээлэлтэй тоглогч нар бүгд ижил зүйл хийж байгаа тэнцвэрийг бооцоот тэнцвэр (pooling equilibrium) хэмээн нэрлэдэг. Нийт зах зээлд хямрал тохиолдох нь нэн ялангуяа энэхүү бооцоот тэнцвэрт хор хөнөөл учруулдаг. Зөвхөн сайн бараатай худалдагч талууд бараагаа зах зээлд санал болгодог. Муу бүтээгдэхүүнтэй нь бол харин эсрэгээрээ зах зээлд гаргахаас татгалздаг. Зах зээлд гарч буй бүхий л бүтээгдэхүүн сайн байвал худалдан авагч нар санал болгож буй бүгдийг худалдан авдаг байна. Энэ тохиолдолд зах зээл төгс хэмжээнд үйл ажиллагаа нь явагдаж байдаг. Өөр өөр мэдээлэлтэй тоглогчид ондоо зүйлс хийж байдаг тэнцвэрийг тусгаарлалттай тэнцвэр (separating equilibrium) гэдэг. Бүтээгдэхүүн нь сайн ч бай муу ч бай бүх худалдагч бүтээгдэхүүнээ зах зээлд гаргадаг. Бүх худалдан авагч санал болгосон бүхий л зүйлсийг авдаг. Гэвч энэ нөхцөлд зах зээлийн үр ашгийг бууруулдаг олон муу наймаа хийгддэг. Гэхдээ энэ тэнцвэрийн үед нийт зах зээлийн хямралыг бодвол худалдаанаас ашиг олох боломж бий.

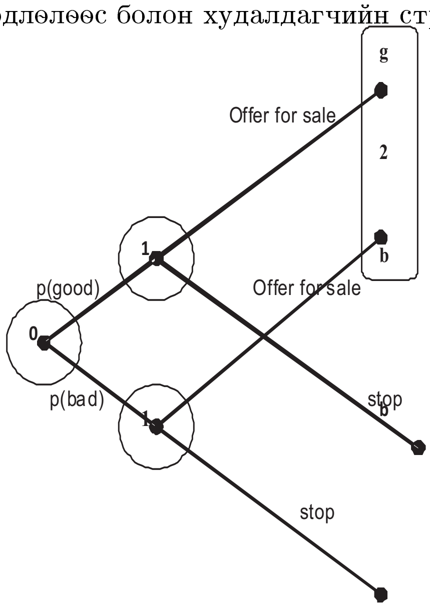
Бүгд биш ч зарим муу бараа борлуулагч нь бүтээгдэхүүнээ зах зээлд гаргадаг. Худалдан авагчид тэдгээрээс заримыг нь худалдан авдаг, мөн зарим хэсгээс нь татгалздаг. Иймээс худалдан авагч, муу бараа худалдагч аль аль нь төгс бус мэдээллийн талаар холимог стратеги баримталдаг байна. Энэ зах зээлийн нөхцөлд худалдаанаас олох нийт ашгийн хэмжээ нь амжилттай болон хэсэгчилсэн амжилттай зах зээлийнхээс бага байдаг ажээ.

3.7.2 Дараалсан тэнцвэр

Кавеат Эмптор бол хамгийн боломжит энгийн дохио өгөх тоглоом юм. Гэхдээ үүнд маш томоохон хэмжээний цогц байдал агуулагддаг. Тодорхой хэлбэл төгс бус мэдээллийнхээ улмаас энэ тоглоомд шийдвэр гаргах хэрэгсэл болгон ашиглагдах ёстой дэд тоглоом байдаггүй байна. Мэдээлэл төгс бус байгаа үед энэ асуудал байсаар байх бөгөөд мэдээлэлтэй тоглогч түрүүлж нүүдлээ хийдэг. Зөн совин, магадлал зэрэг нь дохио өгөх тоглоомын чухал шаардлагатай хэсэг болж өгдөг, хэрэв та дохио илгээвэл түүнийг хүлээн авч буй хүнийг итгүүлэхийг хүсч байна гэсэн үг. Тэгвэл тэр хүн яагаад дохиог хүлээн авах хэрэгтэй гэж?

Дэд тоглоомын сайжруулалтаас илүүтэйгээр өргөн хүрээнд асуудлыг авч

үздэг магадлалыг баталгаажуулж өгдөг боломжит нөхцлийг хангах шаардлага нь дараалсан тэнцвэр гэх ойлголтыг бий болгодог.
Зураг 3.9 дээр 2-р тоглогч нь дэд тоглоомоо мэдэхгүй учир дараалсан тэнцвэр нь тоглогчыг хүлээгдэж буй хэрэглээгээ хамгийн их байлгахыг шаарддаг. Ялангуяа тоглогч нь мэдээллийн ямар уулзварт хүрснээ мэдэхгүй байх талтай. 2-р тоглогчийн мэдээллийн уулзвар дээрх магадлалын тархалт юм. Итгэл үнэмшил нь баримт дээр суурилсан байна
Кавеат Эмптор-ийн дараалсан тэнцвэр нь 2 стратегиас бүтнэ, нэг нь хоёуланд нь зориулсан, нөгөө нь 2-р тоглогчийн итгэл үнэмшил.
Муу бараа байх магадлал маш бага гэж таамаглая. Тиймээс хүмүүс сайн бараа авна гэдэгт бараг л итгэлтэй байна. Мөн цэвэрлэгээний зардал с нь р-д бага зэрэг л хамаарна гэж таамаглая. Ингэснээрээ дараах нь дараалсан тэнцвэр гэдгийг харуулж болох юм.
Бараа сайн бол санал болголт 1
Бараа муу бол санал болголт 1
Бараа ямар ч байсан хамаагүй худалдан авалт 2
$p\ (nodeg/offer) = p(good);$
$p(nodeb/offer) = p(bad)$
Борлуулагч бүр сайн муу бараагаа санал болгох ба худалдан авагч бүх санал болголтонд нь тийм гэж хариулна. Хамгийн түрүүнд худалдан авагчийн мэдээллийн багц дээрх магадлалын тархалт нь анхны боломжит үйл хөдлөлөөс болон худалдагчийн стратегиас хамаарна.



Зураг 3.9.

Худалдан авагчийн мэдээлийн багцийн уулзвар g-д дараах замаар хүрсэн сайн гэсэн сонголт хийх боломж гарсаны дараагаар худалдагч нь сайн бараагаа санал болгоно.
$p(good/offer) = \dfrac{p(good)p(offer/good)}{p(offer)}$

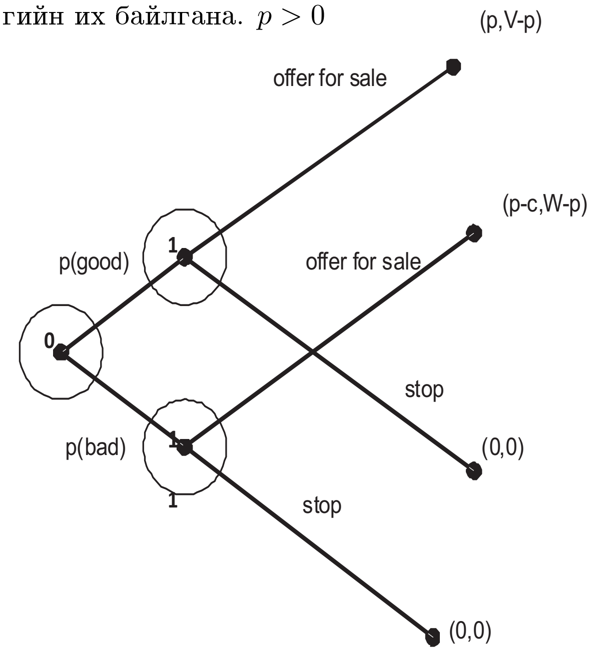
$p(offer)$ нь санал болгох магадлал.
$p(offer) = p(good)p(offer/good) + p(bad)p(offer/bad)$
Энд $p(offer/good) = 1$ ба $p(offer/bad) = 1$ тиймээс $p(good/offer) = p(good)$ байна.
Энэ томъёог Байсийн дүрэм гэж нэрлэдэг. Уг дүрмийн дагуу тоглоомын эхэнд тоглогчийн мэдээллийг авч түүнийгээ шинэчилэн сайжруулж тоглоомын дундуур юм уу сүүлд ашиглах ёстой. Бараа муу байх боломж нь нөхцөлт магадлалаар өгөгдсөн байна.

$$p(bad/offer) = \frac{p(bad)p(offer/bad)}{p(offer)} = p(bad) \qquad (1)$$

Санал болгосны дараа 2-р тоглогч мэдээллийн багцын уулзвар g дээр байх магадлал нь

$$p(nodeg/offer) = \frac{p(good/offer)}{p(good/offer) + p(bad/offer)} = \frac{p(good)}{p(good) + p(bad)} = p(good)$$

Мэдээллийн багцын уулзвар b дээр байх магадлал $p(bad)$ байна. Одоо бид 2-р тоглогчийн мэдээллийн багцын уулзварууд дээрх магадлалын тархалтыг мэдэх учир индукцийн баталгааг хийж чадна. Хэрэв 2-р тоглогч худалдаж авбал тэрээр дараах ханамжыг хүлээж болно.
$Eu_2 = p(nodeg/offer)(V-p) + p(nodeb/offer)(W-p) = p(good)(V-p) + p(bad)(W-p)$
Тиймээс худалдан авагч нь ямар ч санал болголтонд "тийм" гэснээр ханамжаа хамгийн их байлгана.
Сайн бараа худалдагч нь бүтээгдэхүүнээ санал болгосноор ханамжаа хамгийн их байлгана. $p > 0$



Зураг 3.10.

Нөгөө талаас, муу бараа бүтээгдэхүүн бүхий худалдагч борлуулалтын бараа үйлчилгээгээ санал болгох журмаар ханамжаа максимумчилж байдаг. Иймд $p - c > 0$.

Бидний авч үзсэн дараалсан тэнцвэр нь бооцоот тэнцвэр юм. Бооцоот тэнцвэрт худалдан авагч худалдагчийн юу хийж байгаа талаар ямар ч шинэ мэдээлэлгүй байдаг. Худалдан авагч тоглоом эхлэхэд байсан мэдээлэлтэйгээ яг л нэг ижилхэн мэдээлэлтэй байдаг. Муу бараа худалдан авах p магадлал нь худалдан авагчийн хүлээгдэж буй ханамж эерэг гэдгийг батлахад хангалттай бага хэмжээтэй. Хэрэв хэн ч өөр аргаар хийхгүй бол ханамж буурна.

Жишээ 3.8. (Дуудлага худалдаа (Auction))
Дуудлага худалдааны онол 1960-аад оноос микро эдийн засаг,тоглоомын онолын хүрээнд амжилттай хөгжиж байна. У.Викрей тэргүүтэй эдийн засагчид энэ онолын талар олон судалгаа хийсэн.
Уламжлалт дөрвөн хэлбэрийн дуудлага худалдаа байдгаас Англи, Голланд маягийн дуудлага худалдаа нь ихэвчлэн амаар хийгддэг, худалдах үнэ нь хамгийн сүүлчийн эсвэл хамгийн эхний үнэ байдаг. Харин нөгөө хоёр нь хамгийн их үнийн битүүмжилсэн дуудлага худалдаа, хоёр дахь үнийн битүүмжилсэн дуудлага худалдаа юм. Микро эдийн засагт дуудлага худалдааг хувийн ба нийтлэг үнэлэмжтэй гэж ялгадаг. Аль ч тохиолдолд худалдан авагчийн үнэлэмжийг санамсаргүй хэмжигдэхүүн байдлаар судалдаг. Хувийн үнэлэмжтэй дуудлага худалдаа гэдэг нь худалдан авагч бусдаас хамааралгүйгээр худалдах обьектыг цэвэр хувийнхаа үнэлэмжээр үнэлэх худалдаа юм. Нийтлэг үнэлэмжтэй дуудлага худалдаа гэдэг нь худалдан авагч бараагаа худалдан авах зах зээл, харилцаа холбооны нөхцөл байдал зэрэг нийтлэг хүчин зүйлийг харгалзан үнэлэх худалдаа юм. Хувийн үнэлэмжтэй худалдааны хувьд эдийн засгийн онолд дараах урьдчилсан дүгнэлтүүдийг хийдэг.
Нэгдүгээрт: Англи дуудлага худалдаа ба хоёр дахь үнийн битүүмжилсэн дуудлага худалдаа нь тухайн зүйлийг хэн авах,худалдагч хэдий хэр орлого олох гэдэг утгаараа адилхан.
Хоёрдугаарт: Голланд ба хамгийн их үнийн битүүмжилсэн дуудлага худалдаа нь бусдын үйл хөдлөлийг харгалзан хувь хүний оновчтой сонголтоо хийдэг утгаараа адилхан.
Гуравдугаарт: Хэрэв бүх худалдан авагч эрсдэлд нейтрал ханддаг буюу эрсдэлд ордог ч үгүй,эрсдэлээс болгоомжилдог ч үгүй бол дөрвөн төрлийн дуудлага худалдаа маань ав адилхан үр дүнд хүрнэ. Харин одоо бид дуудлага худалдааг тоглоомын онолын үүднээс авч үзье.

Дуудлага худалдаа нь зах зээл дэх Бертрандын өрсөлдөөний нэгэн хэлбэр юм. Нийгмийн болон хувийн сектор тэдгээрийн үйлчилгээг ажил үүрэг гүйцэтгэгчид үнэ хаялцуулан худалдаалж, мөн хөрөнгө оруулагчид санхүүгийн хөрөнгө бараа болон үйлчилгээг үнэ хаялцуулан авах процесс өдөр тутам явагдаж байдаг. Энэ жишээнд тоглоомын онолын энгийн хэлбэрийн дуудлага худалдаа буюу үнэ хаялцуулах худалдааг авч үзнэ.

Үнэ хаялцагч нь бусад үнэ хаялцагчдын дуудлагын үнийг мэддэг төгс мэдээлэлтэй үед дуудлага худалдааг авч үзнэ. Үүнийг чөлөөт дуудлага худалдаа гэж хэлж болох бөгөөд энэ дуудлага худалдаа нь маш өндөр зарчимуудтай. Дуудлага худалдааны 2 онцлох гол төрөл байдаг. Үүнд:
1.Шилдэг боловсруулсан бодлоготой биш анхдагч үнэ бүхий дуудлага худалдаа
2.Шилдэг бодлогоор боловсруулсан хоёрдогч үнэ бүхий дуудлага худалдаа юм.
Дараагийн нэг таамаглал бол бүрэн мэдээлэл ба энэ нь үнэ хаялцагч бүр дуудлага худалдаагаар зарагдаж буй зүйлийн үнэ цэнийг мэдэж байх явдал юм. Энэ үнэ цэнийг хувь хүн өөрөө үнэлж байгаа гэж хэлж болно. Төгс мэдээлэлтэй үед үнэ хаялцагч нь дутуу буюу түүнээс бага мэдээлэлтэй үнэ хаялцагчаас илүү хүчтэй байна.

Бүрэн мэдээлэлтэй, хаалттай дуудлага худалдаа

1 ба 2 гэсэн дугаартай 2 үнэ хаялцагч /тоглогч/ дуудлага худалдаанд оролцох процессыг авч үзье. Дуудлагаар худалдаалагдаж байгаа зүйлийн үнэ цэнэ нь 1-р үнэ хаялцагчийн хувьд Z_1, харин 2-р үнэ хаялцагчийн хувьд Z_2 байна. Хоёр үнэ хаялцагч 2-уулаа энэхүү үнэ цэнийг бодит биш таамаглал гэж мэддэг. Үнэ хаялцагч бүр ямар нэгэн үнийг хэлж чадна. Тиймээс i-р үнэ хаялцагчийг b_i гэсэн үнийг хэлнэ гэж үзье. Үнэ хаялцагчид нэгэн зэрэг үнэ хаялцаж байгаа учир үүнийг хаалттай дуудлага худалдаа гэж нэрлэж байгаа юм. Үнэ хаях векторыг $b = (b_1, b_2)$ гэнэ. Ямарч дуудлага худалдаанд үнэ хаялцагч хамгийн өндөр үнийг хэлж байж ялдаг. Тэгэхээр дуудлага худалдаанд ялахын тулд ямар үнэ хэлэх вэ? гэсэн асуулт гарч ирнэ. Үүнд 2 боломжийг авч үзье:
1. Үнэ хаялцагч дуудлага худалдаанд ялахын тулд P гэсэн үнэ төлөх ба P нь дээрх (max b)-тай тэнцүү болно. Энэ нь анхдагч үнэ бүхий дуудлага худалдаа ба дуудлага худалдааны хамгийн энгийн төрөл юм
2. Дуудлага худалдаанд ялахын тулд P гэсэн хоёрдогч өндөр үнийг төлнө. Энэ нь хоёрдогч үнэ бүхий дуудлага худалдааны төрөл бөгөөд шударгаар явагддаг.
Бид одоо анхдагч үнэ бүхий дуудлага худалдааг тоглогчид нь буюу үнэ хаялцуулагчид нь эрсдлийг хайхардаггүй үед авч үзье.
i-р үнэ хаялцагчийн ханамжийн функц нь: $(U_i(b_i, Z_i)$ гэж үзье. $U_i = Z_i - b_i$
Хэрвээ чи дуудлага худалдаагаар худалдаалагдаж байгаа зүйлийн үнэ цэнээс доогуур үнэ хэлээд дуудлага худалдаанд ялах юм бол чи түүний зөрүүгээр нь хожиж байгаа юм. Харин эсрэгээрээ дуудлагаар худалдаалагдаж байгаа зүйлийн бодит үнэ цэнээс дээгүүр үнэ хэлээд дуудлага худалдаан ялах юм бол чи мөнгөө алдаж байна гэсэн үг юм. Жишээ нь: Тухайн зүйлийн бодит үнэ цэнэ 1000$ байхад чи 2000$-ын үнийг хэлж авбал:
$1000\$ - 2000\$ = (-1000\$)$-ийг алдаж байгаа хэрэг.
Тухайн зүйлийн өртөг буюу бодит үнэ цэнээс илүү үнэ хаяхыг **илүү үнэ хаях** буюу **overbidding** гэж нэрлэнэ.

Хэрвээ чи 0 гэсэн үнэ хэлэхэд мөнгөө алдахгүй байж болох бөгөөд энэ нь дуудлага худалдааны энгийн алдаа юм. Харин **overbidding**-аар илүү үнэ хаяж байвал энэ нь маш том алдаа болно. Эндээс дуудлага худалдааны үнэ хаялцуулах зарчим 1-ийг гаргаж болно.

Зарчим 1: Хэзээ ч илүү үнэ битгий хэл. $(b_i > Z_i)$

Илүү үнэ хаях нь 0 үнэ хаях стратеги зонхилох болдог. Та илүү үнэ хаяад дуудлага худалдаанд хожвол мөнгөө алдана, харин 0 үнэ хаях буюу үнэ хаяхгүй байх тохиолдолд мөнгөө хадгалж байгаа хэрэг юм.

Илүү үнэ хаяж болохгүй , бодит өртгөөр нь үнэ хаялцах ёстой гэсэн нөхцөл өгөгдсөн . Мөн $Z_1 \geq Z_2$ байна. Хэрэв дуудлага худалдааны анхдагч үнэ хаялцах явцад хоёулаа яг бодит өртөгтэй нь тэнцүү үнийг хэлбэл үүний үр дүнд үнэ хаях вектор нь $b = (Z_1, Z_2)$ болж энд тэнцвэр тогтохгүй. Харин тоглогч Z_1 ба Z_2 -ийн хооронд орших Z гэсэн үнэ хаяж болно. 1-р тоглогчийн /үнэ хаялцагчийн/ ханамж нь үнэ хаялцуулгын вектор b болно.

$U_1(b) = 0$. (Энд $Z_1 - \max b = Z_1 - Z_1 = 0$)

1-р тоглогчийн үнэ хаялцуулах вектор $(Z,\ b_2)$ ба ханамж нь $U_1(Z,\ b_2) = Z_1 - Z > 0$ болох ба 1-р тоглогч дуудлага худалдаанд ялна. 1-р тоглогч тоглогч бодит өртгөөс доогуур үнэ хаяна. (**underbidding**)

Зарчим 2: Хэрвээ та анхдагч үнэ хаялцах үед өндөр үнэ тогтоож чадвал дараагийн үнэ хаялцах процессд өөрийнхөө үнийг бууруулах боломжтой. Дуудлага худалдаанд худалдаалагдаж байгаа зүйлийн үнэ цэнийг хэрхэн хэдээр бууруулах ёстой вэ? Үүний хариултыг олохын тулд үргэлжлүүлэн шинжлэх хэрэгтэй болно.

Дараах тоглоомыг авч үзье. Энд $Z_1 = 2\$$, $Z_2 = 1\$$ гэж өгөгдсөн. Мөн тоглогчид илүү үнэ хаяж болохгүй гэсэн нөхцөлтэй.

Player1 \ Player2	$b_2=1\$$	$b_2=0\$$
$b_1=2\$$	(0,0)	(0,0)
$b_1=1\$$	(0.5,0) *	(1,0) *
$b_1=0$	(0,0)	(1,0.5) *

Энэ тоглоом нь (1, 1), (1, 0), (0, 0) гэсэн 3 тэнцвэртэй байна. Энэ тэнцвэр нь өндөр үнэлэмжтэй тоглогчдыг доогуур үнэ хаяулдаг тэнцвэр юм. 1-р тоглогчийн давамгайлах стратег нь $b_1 = 1\$$ ба энэ бодит өртгөөс доогуур үнэ хаяхыг хүлээн зөвшөөрдөг байна. Харин доогуур үнэлэмжтэй тоглогч нь бодит өртөгтэй тэнцүү үнэ хаяна.

Жишээг авч үзье. Энд 0.5\$ -ийн үнийн вектороос зайлсхийсэн байна. 1-р тоглогч 1\$ эсвэл хажуугийн стратегууд болох 1.5\$ болон 0.5\$-ийн үнийг

хаяхыг бодно. Харин 2-р тоглогч 1\$, 0.5\$ юмуу 0\$-ийн үнийг хаяхыг бодно.
Эндээс мөн (1.5, 1), (1, 1), (1, 0.5) гэсэн 3 тэнцвэр олдоно. Үүнд өндөр үнэлэмжтэй тоглогч нь ихэнхдээ доогуур үнийг хаяна. Түүний стратег нь $b_1 = Z_2 = 1\$$ болно. Харин доогуур үнэлэмжтэй тоглогч нь ямарч тэнцвэр дээр 0-ийг төлөхгүй .

Player1 \ Player2	b_2=1\$	b_2=0.5\$	b_2=0\$
b_1=1.5\$	(0.5,0) *	(0.5,0)	(0.5,0)
b_1=1\$	(0.5,0) *	(1,0) *	(1,0)
b_1=0.5\$	(0,0)	(0.75,0.25)	(1.5,0)

11.2 First price auction 0.5\$ bidding interval

Одоо $Z_1 \geq Z_2$ гэсэн хязгаарлалтыг авч үзье. Энд ε-ийг үнэ хаялцах хязгаарлалт гэе. Энэ нь дурын эерэг тоо юм. Мөн i-р тоглогчийн стратегийн олонлог болох $(0, u_i)$ -ийг авч үзнэ. $b = (Z_2,\ Z_2)$ үнэ хаялцах векторын орчимд өмнөх тэнцвэр оршин байна. Энд 2 цэвэр стратеги бүхий $(Z_2 + \varepsilon, Z_2)$ болон $(Z_2 - \varepsilon, Z_2)$ тэнцвэр оршин байна. Мөн түүнчлэн 2-р тоглогч бодит өртгөөс ε-оор доогуур үнэ хаях, бодит өртөгтэй тэнцүү үнэ хаяхад холимог стратегитэй тэнцвэр оршин байгаа юм. Энэ тэнцвэр нь:
$Z_1 - Z_2 - \varepsilon = P_2(Z_2)(Z_1 - Z_2)/2 + P_2(Z_2 - \varepsilon)(Z_1 - Z_2)$
Жишээ

Player1 \ Player2	b_2=Z_2	b_2= Z_2-ε
b=Z_2+ε	(Z_1-$Z_2\varepsilon$,0) *	(Z_1-$Z_2\varepsilon$,0)
b_1= Z_2	(Z_1-Z_2)/2,0	(Z_1-Z_2,0) *
b_1= Z_2-ε	(0,0)	(Z_1-Z_2+ε)/2, ε/2

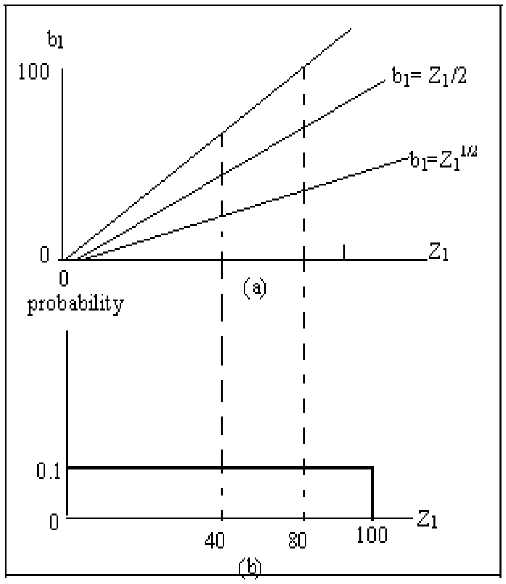
11.3 First price auction, bidding interval ε

Энд $P_2(Z_2)$-ьн 2-р тоглогч бодит өртөг Z_2 гэсэн үнэ хаях магадлал, $P_2(Z_2 - \varepsilon)$-нь 2-р тоглогчийн бодит өртгөөс доогуур үнэ хаях магадлалыг үзүүлсэн байна.
Зарчим 3: Хэрэв та анхдагч үнэ бүхий дуудлага худалдаан дээр өндөр үнэлгээтэй байх тохиолдолд үнэ хаялцах интервал доторх дуудлага худалдааны 2-догч өндөр үнэтэй ойролцоо үнийг хаях ёстой.
Хоёрдогч үнэ бүхий дуудлага худалдаа

Энэ өвөрмөц маш сонирхолтой 2-догч үнэ бүхий дуудлага худалдаа гэж нэрлэгдэх дуудлага худалдааны бас нэгэн төрөл юм. 2-догч үнэ бүхий дуудлага худалдаанд хоёрдогч хамгийн өндөр үнэ хаяж, түүнтэйгээ тэнцүү хэмжээний үнэ төлсөн нь ялдаг.
Зарчим 4: 2-догч үнэ бүхий дуудлага худалдаанд ихэнхдээ бодит өртгөөр нь үнэ хаялцуулдаг. Энэ нь үнэ хаялцуулагчдын тооноос үл хамаарсан байдаг.
Хувийн үнэлэмжтэй дуудлага худалдаа
Өмнө бид хэд хэдэн таамаглалуудыг тавьж байсан. Эдгээр нь үнэ хаялцагч бүр бусад үнэ хаялцагчдын өөрөөр хэлбэл өрсөлдөгчдийнхөө үнэлгээг мэдэж байсан. Харин одоо хувь хүн өөрийнхөө л үнэлгээг мэднэ. Бусад үнэ хаялцагчдынхаа үнэ хаялцуулгын үнэ цэнийн магадлалын тархалтын матрицыг мэдэхгүй ба энэ мэдээлэл нь симметрик байна. Өөрөөр хэлбэл бусад үнэ хаялцагчид ч гэсэн таны үнэ хаялцуулгын магадлалын тархалтыг мэдэхгүй байгаа юм. Үүнээс харахад хувь хүний үнэлгээ бүхий дуудлага худалдаа нь яг Покер шиг юм.
Анхдагч үнэ бүхий дуудлага худалдааны нэг асуудал нь өөрийн үнэ хаялцуулгын утгаас хэр ихийг хасаж, чадах вэ? гэдгийг тодорхойлдог. Хэрэв 1-р тоглогч өөрийн хувийн үнэлгээ болох Z_1-ийг үндэслэн b_1 гэсэн үнэ хаядаг. Та үнэ хаялцуулж байгаа үедээ хожих хожихгүйгээ мэдэхгүй байгаа учир таны ханамж нь ханамжийн хүлээгдэж байгаа утгаар тодорхойлогдоно.(Эрсдлийг хайхардаггүй)
$P_1(win)$-1-р тоглогчийн дуудлага худалдаанд хожих магадлал
$P_1(lose)$-1-р тоглогчийн дуудлага худалдаанд алдах магадлал
Эндээс хүлээгдэж буй утга нь: $EV_1 = P_1(win)(Z_1 - b_1) + P_1(lose)(0)$ болно. Хэрвээ 1-р тоглогч дуудлага худалдаанд хожих юм бол хувийн үнэлгээнээсээ үнэ хаялцуулж байгаа утгыг хассан хэмжээгээр хожно. Харин 0 -ийг алдана.

$$EV_1 = P_1(win)(Z_1 - b_1)$$

Хожих магадлал нь таны хэр их өндөр үнэ хаяснаас шалтгаална. Хэрэв 0 үнийг хаявал та дуудлага худалдаанд хожихгүй мөн 100 гэсэн үнийг хаявал та дуудлага худалдаанд алдахгүй. Энэ нь магадлалын тархалтын туйлын 2 тохиолдол юм.
Доорх жишээнд үнэ хаялцуулах монотон 3 функцийг үзүүлсэн. Энд 1 нь шугаман бус, нөгөө 2 нь шугаман функц юм. $b_1(Z_1) = Z_1$ гэсэн үнэ хаялцуулгын функц нь бодит өртөгтэй тэнцүү үнийг хаядаг. Үнэ хаялцлын функцын хүлээгдэж байгаа утга нь 0 бол $b_1(Z_1) = 0$ байна.



Таны хожлын магадлал нь үнэ хаялцуулахтай пропорцианаль байна. $P_1(win)kb_1$ энд k нь тогтмол тоо болно. 1-р тоглогчийн хүлээгдэж буй утга нь:
$EV_1 = k\ b_1(Z_1 - b_1)$ байна. Өөрийнхөө хүлээгдэж буй утгыг хамгийн их байлгахын тулд нэгдүгээр эрэмбийн нөхцлийг бичвэл:
$0 = kb_1(-1) + k(Z_1 - b_1)$ Эндээс үнэ хаялцуулгын функц нь: $b_1(Z_1) = Z_1/2$ байна. Дуудлага худалдаагаар үнэ хаялцуулж байгаа зүйлийн хамгийн их үнэ цэнэ нь 100$ гэвч та зөвхөн 50$-ийн үнийг хаялцуулна.

Нийтийн үнэлэмжтэй дуудлага худалдаа

Энэ хэсэгт бага хомс мэдээлэлтэй анхдагч үнийн дуудлага худалдааг авч үзнэ. Ийм ихээхэн комплекс маягийн үнэ хаялцуулахыг нийтийн үнэлэмжтэй дуудлага худалдаа гэдэг. Энэ дуудлага худалдаанд оролцогч бүр нь өөр өөр бөгөөд дуудлага худалдаагаар оролцох зүйлийн талаар өөр өөр үнэлэмжтэй байдаг. Дуудлага худалдаанд оролцогч бүр худалдаалагдах зүйлийн талаар янз бүрийн мэдээллүүдийн сигналуудыг хүлээж авдаг. Гэхдээ тархаж буй мэдээлэлийн тархалт нь ижилхэн байдаг. Энэ нь та бусдын мэдэж байгааг мэднэ гэсэн үг юм. Гэхдээ энэ нь хамгийн сайн мэдээлэл биш юм. Хувийн үнэлэмжтэй үе шиг тухайн зүйлийн үнэ цэнээс илүү хэтрүүлж хэлэхгүй байдаггүй бөгөөд ингэснээр ихээхэн хэмжээний алдагдалд ч ордог. Энэ нь тухайн тоглогчийн хүлээж авсан сигналтай холбоотой байдаг. Ихээхэн өндөр хэмжээний сигнал хүлээж авбал түүнтэйгээ ойролцоо хэмжээний үнийг санал болгодог. Үүний үндсэн асуудлыг тайлбарлахын тулд шоо хаях процесс дээр авч үзье. Шоог шидэхэд аль ч талаараа буух магадлал нь адилхан бөгөөд хэрвээ олон дахин шидвэл түүний хүлээгдэж буй утга нь дараах байдлаар тодорхойлогддог.
$EV = (1 + 2 + 3 + ... + 6)/6 = 3.5$
Одоо бид нийтийн үнэлэмжтэй зүйлийн дуудлага худалдааг авч үзэхдээ

хос шоогоор энэхүү дуудлага худалдаагаа төлөөлүүлж авч үзье.
Эхний шоо бол 1-р тоглогчийнх, 2-дахь шоо нь 2-р тоглогчийнх гэе.
Хэрвээ 1-р хүн буюу дуудлага худалдаанд оролцогч маань $z_1 = 5$ гэсэн сигнал хүлээж авсан бол тухайн дуудлага худалдаагаар орж буй зүйлийн үнэ байх магадлал хамгийн өндөр байх үнийн утга нь
$(1+5)/2 = 3$ болон $(6+5)/2 = 5.5$ хоёрын хооронд байх болно.
Доорх хүснэгтэнд нэгэн зэрэг тохиох 36 үр дүнг үзүүлсэн бөгөөд нүд бүрт нь сигнал тус бүрт тохирох хамгийн их утгыг бичлээ.

		Bidder1					
		Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
Bidder2	Z_1	1	2	3	4	5	6
	Z_2	2	2	3	4	5	6
	Z_3	3	3	3	4	5	6
	Z_4	4	4	4	4	5	6
	Z_5	5	5	5	5	5	6
	Z_6	6	6	6	6	6	6

Энэ хүснэгтийн дундаж утга нь 4,56 бөгөөд энэ нь бидний хамгийн эхэнд авч үзсэн хүлээгдэж буй дундаж утга болох 3,5-аас $3,5 - 4,56 = -1.06$-ээр ялгаатай байгаа юм. Үүнийг хувиар илэрхийлбэл, дундажаасаа 30%-иар илүү байгаа юм. Өөрөөр хэлбэл 30%-ийн алдагдалд орж байна гэсэн үг. Нийтийн үнэлэмжтэй дуудлага худалдааны үед энэ хүлээгдэж буй алдагдлын утгыг "ялагчийн хараал" гэж нэрлэдэг. Хэрвээ тоглогчийн хожиж магадлалыг r-ээр, тухайн зүйлийн үнийг z_1 гэсэн сигналтай үед ийм гээд, тухайн зүйлийн хүлээгдэж буй утгыг z_1 сигналтай үед $E(v|z_1)$ гэж бичигдэх ба v-г нийтийн үнэлэмж гэж нэрлэдэг. Энэ хүлээгдэж буй утгыг z_1 сигнал мэдээлэл дээр тулгуурласан нөхцөлт хүлээгдэж буй утга гэдэг.
Эрсдэлгүй оролцогчийн хувьд хожлын функцыг бичвэл
$EV_1 = p_1(\text{хожих})[E(v|z_1) - b_1] = (kb_1)[E(v|z_1) - b_1]$ болох ба бид урьдын адил нийтийн үнэлэмж нь 2 сигналын дундаж утга гэвэл $V = (z_1 + z_2)/2$ болох ба хэрвээ 1-р тоглогч $z_1 = 1$ гэсэн сигналийг хүлээж авсан гэвэл дундажууд нь 1 эсвэл 1,5 эсвэл 2 эсвэл 2,5 эсвэл 3 эсвэл 3,5 байх бөгөөд эдгээр нь тэнцүү магадлалтай гэж үзвэл $E(v|z_1 = 1) = (1 + 1.5 + 2 + 2.5 + 3 + 3.5)/6 = 2.25$ болно. Энэ нь нөхцөлт хүлээгдэж буй утга юм.Энэ мэтчилэн хүлээгдэж буй утгуудыг бодвол дараах байдалтай болно.
$E(v|z_1 = 1) = 2.25$
$E(v|z_1 = 2) = 2.75$
$E(v|z_1 = 3) = 3.25$
$E(v|z_1 = 4) = 3.75$
$E(v|z_1 = 5) = 4.25$
$E(v|z_1 = 6) = 4.75$

Эдгээрийг цэг тус бүрийг нь хавтгай дээр байрлуулбал $E(v|z_1) = 1.75 + 0.5z_1$ гэсэн шулуун гарах болно. Үүнийг 1-р хэрэглэгчийн ханамжийн функц $EV_1 = p_1(\text{хожих})[E(v|z_1) - b_1] = (kb_1)[E(v|z_1) - b_1]$-д орлуулбал $EV_1 = (kb_1)[1.75 + 0.5z_1 - b_1]$ болно.
Энэ функцийг b_1 хувьсагчаар максимумчлахын тулд түүний тухайн уламжлал авч тэгтэй тэнцүүлбэл:
$(kb_1)(-1) + k(1.75 + 0.5z_1 - b_1) = 0$
Үүнээс наймаалцах функц дараах байдалтай гарч ирнэ.

$$b_1(z_1) = 0.875 + 0.25z_1.$$

4. ТОГЛООМЫН ОНОЛЫН БОДЛОГЫГ MATLAB ПРОГРАМ АШИГЛАН БОДОХ

4.1 Тэг нийлбэртэй тоглоомын цэвэр стратегтай шийдийг олох

Энэхүү хэсгийн онолыг уг номны 10-17-р хуудсанд авч үзсэн.

Бидэнд дараах Жишээ 1.2-т өгөгдсөн тэг нийлбэртэй тоглоом өгөгдсөн байг.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Энэхүү тоглоомын цэвэр стратегтэй шийдийг ольё. Үүний тулд дараах кодыг MATLAB программ дээр бичиж өгнө.

```
function f=Жишээ-1.2
global A
baganamax=max(A);
minmax=min(baganamax)
hurwA=A';
murmin=min(hurwA);
maxmin=max(murmin)
```

Дээрх m-file-г MATLAB-ын Command Window цонхонд дуудвал:

```
>> A=[4 2 3;6 1 -1;9 -2 -5];
>> Жишээ-1.2
>> Optimization terminated.
>> minmax=
    2
```

```
>> maxmin=
     2
```

гэж гарах ба энэ Нэшийн тэнцвэр нь (1,2) цэвэр стратегуудад харгалзана. Өөрөөр хэлбэл нэгдүгээр тоглогч өөрийн боломжит стратегуудаас 1-рийг, хоёрдугаар тоглогч өөрийн боломжит стратегуудаас 2-р стратегийг ашиглан тоглоход хоёр тоглогчийн хожил ба хожигдлын хэмжээ нь 2 байна.

Дараах 13-р хуудасны Жишээ 1.3-г авч үзье.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Дараах кодыг MATLAB программ дээр бичиж өгнө.

```
function f=Жишээ-1.3
global A
baganamax=max(A);
minmax=min(baganamax)
hurwA=A';
murmin=min(hurwA);
maxmin=max(murmin)
```

Дээрх m-file-г MATLAB-ын Command Window цонхонд дуудвал:

```
>> A=[0 4 -1 3;1 0 2 2;3 1 -2 1];
>> Жишээ-1.3
>> Optimization terminated.
>> minmax=
     2
>> maxmin=
     0
```

гэж гарах ба энэ Нэшийн тэнцвэр оршин байхгүй байна. Энэ нь бидний авч үзэж буй бодлого цэвэр стратегаар шийдгүй байна гэсэн үг.

Дараах 13-р хуудасны Жишээ 1.4-г авч үзье.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Энэхүү тоглоомын цэвэр стратегтэй шийдийг олъё. Үүний тулд дараах кодыг MATLAB программ дээр бичиж өгнө.

```
function f=Жишээ-1.4
global A
baganamax=max(A);
minmax=min(baganamax)
hurwA=A';
murmin=min(hurwA);
maxmin=max(murmin)
```

Дээрх m-file-г MATLAB-ын Command Window цонхонд дуудвал:

```
>> A=[5 3 4 3;7 2 0 2;10 -1 -4 2];
>> Жишээ-1.4
>> Optimization terminated.
>> minmax=
    3
>> maxmin=
    3
```

гэж гарах ба энэ Нэшийн тэнцвэр нь (1,2) ба (1,4) цэвэр стратегуудад харгалзана. Өөрөөр хэлбэл нэгдүгээр тоглогч өөрийн боломжит стратегуудаас 1-стратегийг, хоёрдугаар тоглогч өөрийн боломжит стратегуудаас 2 эсвэл 4-р стратегуудын аль нэгийг ашиглан тоглоход хоёр тоглогчийн хожил ба хожигдлын хэмжээ нь 3 байна. Энэ тоглоом нь 2 эмээлийн цэгтэй байна.

4.2 Тоглоомын онолд шугаман програмчлалыг хэрэглэх

Бид хоёр тоглогчтой тэг нийлбэртэй тоглоомыг шугаман програмчлалын харилцан хосмог бодлогууд руу шилжүүлэн боддог.(*номны 41-45-р хуудаснаас унш.*) Бид уг хосмог бодлогуудыг **MATLAB** програм дээр **linprog** програмыг ашиглан бодно. **linprog** програм нь дараах шугаман програмчлалын бодлогыг боддог.

$$\min_x f^T x$$

$$\begin{cases} A \cdot x \leq b \\ Aeq \cdot x \leq beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \qquad (1)$$

Энд A матриц ба b вектор нь шугаман тэнцэтгэл биш зааглалд харгалзах матриц ба вектор, Aeq матриц ба beq вектор нь шугаман тэнцэтгэл хэлбэрийн зааглалд харгалзах матриц ба векторууд болно.

Бидэнд 43-р хуудасны Жишээ 1.20-д өгөгдсөн дараах бодлого өгөгдсөн байг.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоглоомын хожлыг эерэг байлгах үүднээс $c_{ij} = a_{ij} + 2$ гэсэн дараах матрицыг авч үзье.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Энэ бодлогод харгалзах шугаман програмчлалын бодлого нь дараах байдлаар бичигдэнэ.
1-р тоглогчийн хувьд гарах тэгшитгэл нь:

$$f = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \to min$$
$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 + 2p_3 + 4p_4 \geq 1 \\ 3p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 \geq 1 \\ p_1 + 5p_2 + 4p_3 + 2p_4 \geq 1 \\ 4p_1 + 4p_2 + p_3 + 2p_4 \geq 1 \\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_3 \geq 0,\ p_4 \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Харин 2-р тоглогчийн хувьд гарах тэгшитгэл нь:

$$f = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \to max$$
$$\begin{cases} 2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 \leq 1 \\ q_1 + 2q_2 + 5q_3 + 4q_4 \leq 1 \\ 2q_1 + 3q_2 + 4q_3 + q_4 \leq 1 \\ 4q_1 + 2q_2 + 2q_3 + 2q_4 \leq 1 \\ q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0,\ q_3 \geq 0,\ q_4 \geq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

болно.
Энэ 2 бодлого нь харилцан хосмог бодлогууд бөгөөд 1 ба 2-р тоглогчдын холимог стратегуудтай дараах томъёогоор холбогдоно.
$x_1 = v_c \cdot p_1,\ x_2 = v_c \cdot p_2,\ x_3 = v_c \cdot p_3,\ x_4 = v_c \cdot p_4,$
$y_1 = v_c \cdot q_1,\ y_2 = v_c \cdot q_2,\ y_3 = v_c \cdot q_3,\ y_4 = v_c \cdot q_4,$

Энд $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ ба $y = (y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$ нь харгалзан манай тоглоомын 1 ба 2-р тоглогчдын холимог стратегүүд, $p = (p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)$ ба $q = (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)$-нь харгалзах шугаман програмчлалын бодлогуудын шийдүүд болно.

Бид (2) ба (3) бодлогуудад харгалзах кодыг MATLAB дээр бичихийн тулд уг бодлогуудыг (1) хэлбэрт шилжүүлж бичих хэрэгтэй.

1-р тоглогчийн хувьд гарах тэгшитгэл нь:

$$f = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \to min$$
$$\begin{cases} -2p_1 - p_2 - 2p_3 - 4p_4 \le -1 \\ -3p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 2p_4 \le -1 \\ -p_1 - 5p_2 - 4p_3 - 2p_4 \le -1 \\ -4p_1 - 4p_2 - p_3 - 2p_4 \le -1 \\ p_1 \ge 0,\ p_2 \ge 0,\ p_3 \ge 0,\ p_4 \ge 0 \end{cases} \qquad (2')$$

Харин 2-р тоглогчийн хувьд гарах тэгшитгэл нь:

$$f = -q_1 - q_2 - q_3 - q_4 \to max$$
$$\begin{cases} 2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 \le 1 \\ q_1 + 2q_2 + 5q_3 + 4q_4 \le 1 \\ 2q_1 + 3q_2 + 4q_3 + q_4 \le 1 \\ 4q_1 + 2q_2 + 2q_3 + 2q_4 \le 1 \\ q_1 \ge 0,\ q_2 \ge 0,\ q_3 \ge 0,\ q_4 \ge 0 \end{cases} \qquad (3')$$

Ингээд (2') ба (3') бодлогуудыг бодох кодыг бичье.

```
function f=Жишээ-1.20

global C;

C1=C+2;                 % анхны матрицыг эерэг болгох үйлдэл

B=-(C1)';               % I тоглогчид харгалзах ШПБ-ын тэнцэтгэл
```

```
            биш зааглалд харгалзах матрицыг олох үйлдэл

D=C1;              % II тоглогчид харгалзах ШПБ-ын тэнцэтгэл
            биш зааглалд харгалзах матрицыг олох үйлдэл
[m,n]=size(C1);    % тоглоомын матрицын мөр ба баганы
                тоог олох үйлдэл
a=ones(1,m);       % (1’) бодлогын зорилгын векторыг
                олох үйлдэл
v=ones(1,n);
u=-v;              % (2’) бодлогын зорилгын векторыг
                олох үйлдэл
lb1=zeros(m,1);    % (1’) бодлогын доод зааглалын вектор
lb2=zeros(n,1);    % (2’) бодлогын доод зааглалын вектор
[p,aval]=linprog(a,B,u’,[],[],lb1,[]);
            % I тоглогчид харгалзах (1’) ШПБ-ын оновчтой
            шийдийг олох үйлдэл
[q,uval]=linprog(u,D,a’,[],[],lb2,[]);
            % II тоглогчид харгалзах (2’) ШПБ-ын
            оновчтой шийдийг олох үйлдэл
v1=1/aval-2; % тоглоомын оновчтой утгыг олох үйлдэл
v2=-1/uval-2;
x=p*v1      % 1-р тоглогчид харгалзах ШПБ-ын шийдийг олох
y=q*v2      % 2-р тоглогчид харгалзах ШПБ-ын шийдийг олох
gameval=v1  % тоглоомын оновчтой утгыг олох үйлдэл
```

Дээрх m-file-г MATLAB-ын Command Window цонхонд дуудвал:

```
>> Жишээ-1.20

>> Optimization terminated.
>> x=
    0.2963
    0.1111
    0.2593
```

```
    0.3333
>> y=
    0.2778
    0.3889
    0.1667
    0.1667
>> gameval=
    0.5556
```

Эндээс 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги нь $x^* = (0.2963; 0.1111; 0.2593; 0.3333)$, 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги нь $y^* = (0.2778; 0.3889; 0.1667; 0.1667)$ ба тоглоомын хожил нь $v = 0.5556$ байна.

43-р хуудасны Жишээ 1.21-д өгөгдсөн дараах бодлогыг бодъё.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Тоглоомын хожлыг эерэг байлгах үүднээс $c_{ij} = a_{ij} + 4$ гэсэн дараах матрицыг авч үзье.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Энэ бодлогод харгалзах шугаман програмчлалын бодлого нь дараах байдлаар бичигдэнэ.
1-р тоглогчийн хувьд гарах тэгшитгэл нь:

$$f = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 2p_1 + 6p_2 + 4p_3 \geq 1 \\ 5p_1 + p_2 + 6p_3 \geq 1 \\ 4p_1 + 3p_2 + p_3 \geq 1 \\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Харин 2-р тоглогчийн хувьд гарах тэгшитгэл нь:

$$f = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2q_1 + 5q_2 + 4q_3 \leq 1 \\ 6q_1 + q_2 + 3q_3 \leq 1 \\ 4q_1 + 6q_2 + q_3 \leq 1 \\ q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0,\ q_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (5)$$

болно.

Бид (4) ба (5) бодлогуудад харгалзах кодыг MATLAB дээр бичье.

```
function f=Жишээ-1.21

global C;

C1=C+4;            % анхны матрицыг эерэг болгох үйлдэл

B=-(C1)';          % I тоглогчид харгалзах ШПБ-ын тэнцэтгэл
               биш зааглалд харгалзах матрицыг олох үйлдэл

D=C1;              % II тоглогчид харгалзах ШПБ-ын тэнцэтгэл
               биш зааглалд харгалзах матрицыг олох үйлдэл
[m,n]=size(C1);    %тоглоомын матрицын мөр ба баганы тоог
                   олох үйлдэл
a=ones(1,m);       % (1') бодлогын зорилгын векторыг олох үйлдэл
v=ones(1,n);
u=-v;              % (2') бодлогын зорилгын векторыг олох үйлдэл
```

```
lb1=zeros(m,1); % (1') бодлогын доод зааглалын вектор үйлдэл
lb2=zeros(n,1); % (2') бодлогын доод зааглалын вектор үйлдэл
[p,aval]=linprog(a,B,u',[],[],lb1,[]);  % I тоглогчид
            харгалзах (1') ШПБ-ын оновчтой шийдийг олох үйлдэл
[q,uval]=linprog(u,D,a',[],[],lb2,[]);  % II тоглогчид
             харгалзах (2') ШПБ-ын оновчтой шийдийг олох үйлдэл
v1=1/aval-4;      % тоглоомын оновстой утгыг олох үйлдэл
v2=-1/uval-4;
x=p*v1            % 1-р тоглогчид харгалзах ШПБ-ын шийдийг олох
y=q*v2            % 2-р тоглогчид харгалзах ШПБ-ын шийдийг олох
gameval=v1        % тоглоомын оновчтой утгыг олох үйлдэл
```

Дээрх m-file-г MATLAB-ын Command Window цонхонд дуудвал:

```
>> Жишээ-1.21

>> Optimization terminated.
>> x=
    0.6000
    0.3714
    0.0285
>> y=
    0.3714
    0.2857
    0.3429
>> gameval=
    -0.4571
```

Эндээс харахад 1-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги нь $x^* = (0.6000; 0.3714; 0.0285)$, 2-р тоглогчийн оновчтой холимог стратеги нь $y^* = (0.3714; 0.2857; 0.3429)$ ба тоглоомын хожил нь $v = -0.4571$ байна.

4.2 Тэг биш нийлбэртэй тоглоомыг бодох

Бидэнд дараах холимог стратегтай биматрицан тоглоом өгөгдсөн байг.

Үүнд 1 ба 2-р тоглогчид харгалзан A ба B гэсэн:

$$A = (a_{ijk}),\ B = (b_{ijk}),$$

$$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,$$

хожлын матрицуудтай гэвэл биматрицан тоглоом нь:

$$C = (A, B) = ((a_{ijk}, b_{ijk})),$$

$$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,$$

гэсэн хожлын матрицтай тоглоом байна. Бид энэ тоглоомын Нэшийн тэнцвэрийг дараах оптимизацийн бодлогын шийдтэй давхцана гэдгийг онолоос мэднэ. (*онолыг номны 84-91-р хуудаснаас унш.)*

$$\max_{(x,y,\alpha,\beta)} F(x, y, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) x_i y_j - \alpha - \beta$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \alpha,\ i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \leq \beta,\ j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n$$

Дээрх бодлого нь дараах бодлоготой эквивалент байна.

$$F(x, y, \alpha, \beta) = max\{\langle x^T, (A+B)y\rangle - \alpha - \beta\}$$
$$(x, y, \alpha, \beta) \in X \times Y$$

Энд

$$X = \{(x, \beta) \in S_m \times R|\ x^T B \leq \beta e_n\},$$
$$Y = \{(x, \alpha) \in S_n \times R|\ Ay \leq \alpha e_m\},$$
$$e_p = (1, 1, \ldots, 1)^T \in R^P,\ p = m, n,$$

x ба y -нь харгалзан 1 ба 2-р тоглогчдийн холимог стратегууд.

Дараах 89-р хуудасны Жишээ 2.16 бодлогыг авч үзье.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

буюу

$$C = (A, B) = \begin{pmatrix} (-1, 1) & (0, 2) & (0, 2) \\ (2, 1) & (1, -1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 1) & (1, 2) \end{pmatrix}$$

гэсэн биматрицан тоглоом үүснэ. Энэ биматрицан тоглоомын Нэшийн тэнцвэрийг олохын тулд харглзах математик програмчлалын бодлогыг зохиоё.

$$F(x, y, p, q) = 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3 - p - q \to max$$

$$\begin{cases} -y_1 \le p \\ 2y_1 + y_2 \le p \\ y_2 + y_3 \le p \\ x_1 + x_2 \le q \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le q \\ 2x_1 + 2x_3 \le q \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Энэ тоглоомд харгалзах кодыг бичье.

```
function f=Жишээ-2.26
z0=[1;0;0;0;1;0;0;1];
A=[1 1 0 -1 0 0 0 0;2 -1 1 -1 0 0 0 0;2 0 2 0 0 0 0 -1;
  0 0 0 0 -1 0 0 -1;0 0 0 0 2 1 0 -1;0 0 0 0 0 1 1 -1];
b=zeros(6,1);lb=[0;0;0;-inf;0;0;0;-inf];
ub=[1;1;1;inf;1;1;1;inf];
Aeq=[1 1 1 0 0 0 0 0;0 0 0 0 1 1 1 0]; beq=[1;1];
[z,fval]=fmincon(@tzf1,z0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
%-----------------------------------------------
% Define objective function
function f = tzf1(x)
f=-2*z(1)*z(5)-2*z(1)*z(6)-3*z(2)*z(5)-2*z(3)*z(6)-
   -3*z(3)z(7)+z(4)+z(8);
```

Дээрх m-file-г MATLAB-ын Command Window цонхонд дуудвал:

```
>> Жишээ-2.26


>> Optimization terminated.
>> z=
    0.0000
    0.6666
```

```
    0.3333
    0.6666
    0.3333
    0.0000
    0.6666
    0.6666
>> fval=
    0.0000
```

Эндээс $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)$ *хувьсагчийн эхний 3 хувьсагч нь 1-р тоглогчийн холимог стратегүүд* $x = (x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2, z_3)$ *ба* $p = z_4$, *харин* $y^* = (y_1, y_2, y_3) = (z_5, z_6, z_7)$, $q = z_8$ *тул* $x^* = (0.0000; 0.6666; 0.3333)$, $y^* = (0.3333; 0.0000; 0.6666)$ *ба* $f_1(x, y) = 0.6666$, $f_2(x, y) = 0.6666$ *болно.*

Жишээ 2

Дараах биматрицан тоглоомыг авч үзье.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Өөрөөр хялбарчилж бичвэл:

$$C = \begin{pmatrix} (6,5) & (12,8) \\ (3,4) & (9,7) \end{pmatrix}$$

Энэхүү бодлогод харгалзах математик програмчлалын бодлого нь:

$$f = max\{\langle x^T, Dx \rangle\}$$

$$
\begin{cases}
5x_1 + 4x_2 - x_3 & \leq 0 \\
8x_1 + 7x_2 - x_3 & \leq 0 \\
6x_4 + 12x_5 - x_6 & \leq 0 \\
3x_4 + 9x_5 - x_6 & \leq 0 \\
x_1 + x_2 & = 1 \\
x_4 + x_5 & = 1 \\
x_1 \geq 0 \,, x_2 \geq 0 \,, x_4 \geq 0 \,, x_5 \geq 0 &
\end{cases}
$$

гэсэн хэлбэртэй болох ба энд $D = A + B$.

Энэ тоглоомд харгалзах кодыг бичье.

```
function f=tog-1
z0=[1;0;1;0;0;1];
A=[5 4 -1 0 0 0;8 7 -1 0 0 0;0 0 0 6 12 -1;0 0 0 3 9 -1];
b=zeros(4,1);lb=[0;0;-inf;0;0;-inf];ub=[1;1;inf;1;1;inf];
Aeq=[1 1 0 0 0 0;0 0 0 1 1 0]; beq=[1;1];
[z,fval]=fmincon(@tzf2,z0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
%-----------------------------------------------
% Define objective function
function f = tzf2(x)
f=-11*z(1)*z(4)-20*z(1)*z(5)-7*z(2)*z(4)-
                 -16*z(2)*z(5)+z(4)+z(6);
```

Дээрх m-file-г MATLAB-ын Command Window цонхонд дуудвал:

```
>> tog-1

>> Optimization terminated.
>> z=
    0.1000
    0.0000
    0.8000
    0.0000
    0.1000
```

```
0.1200
>> fval=
0.0000
```

Энд $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$ *хувьсагчийн эхний 2 хувьсагч нь 1-р тоглогчийн холимог стратегууд* $x = (x_1, x_2) = (z_1, z_2)$ *ба* $p = z_3$*, харин* $y^* = (y_1, y_2) = (z_4, z_5)$*,* $q = z_6$ *тул* $x^* = (1, 0)$*,* $y^* = (0, 1)$ *ба* $f_1(x, y) = 12$*,* $\ f_2(x, y) = 8$ *болно.*

Жишээ 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

буюу:

$$C = \begin{pmatrix} (3,1) & (6,4) \\ (2,7) & (10,3) \end{pmatrix}$$

Энэм бодлогыг дээрхийн ижлээр бодвол оновчтой шийд нь:

$x^* = (0.5714; 0.4286; 3.5714; 0.8; 0.2; 3.6).$

Жишээ 4

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

буюу:

$$C = \begin{pmatrix} (-2,-4) & (5,-2) & (1,4) \\ (-3,-3) & (2,1) & (3,4) \\ (2,3) & (1,1) & (3,-1) \end{pmatrix}$$

Энэ биматрицан тоглоомд харгалзах математик про-

грамчлалын бодлогын бичвэл:

$$f = max\{\langle x^T, \begin{pmatrix} -6 & 3 & 5 \\ -6 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} x\rangle\}$$

$$\begin{cases} -4z_1 - 3z_2 + 3z_3 - z_4 & \leq 0 \\ -2z_1 + z_2 + z_3 - z_4 & \leq 0 \\ 4z_1 + 4z_2 - z_3 - z_4 & \leq 0 \\ -2z_5 + 5z_6 + z_7 - z_8 & \leq 0 \\ -3z_5 + 2z_6 + 3z_7 - z_8 & \leq 0 \\ 2z_5 + z_6 + 3z_7 - z_8 & \leq 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 & = 1 \\ z_5 + z_6 + z_7 & = 1 \\ z_1 \geq 0\ , z_2 \geq 0\ , z_3 \geq 0 & \\ z_5 \geq 0\ , z_6 \geq 0\ , z_7 \geq 0 & \end{cases}$$

болох ба өмнөх бодлогын ижил кодыг MATLAB програм дээр бичиж бодвол:
$z^* = (0.0714; 0.2857; 0.6429; 2.2143; 0.0714; 0.3571; 0.5714; 0.7857)$.
Оновчтой шийд нь: $x^* = (0.0714; 0.2857; 0.6429)$,
$y^* = (0.0714; 0.3571; 0.5714)$ *ба* $f_1 = 2.2143,\ f_2 = 0.7857$

Одоо 3 тоглогчтой гурвалсан матрицан тоглоомыг авч үзье.
$A = (a_{ijk})_{2\times2\times2}$ *ба* $B = (b_{ijk})_{2\times2\times2},\ C = (ijk)_{2\times2\times2}$ *-нь харгалзан 1, 2 ба 3-р тоглогдын хожлын матрицууд байг.(онолын хэсгийг номны 84-91-р хуудаснаас уншаарай.)*

Жишээ 5. $a_{111} = 2, a_{112} = 3, a_{121} = -1, a_{122} = 0, a_{211} = 1, a_{212} = -2, a_{221} = 4, a_{222} = 3,$ $b_{111} = 1, b_{112} = 2, b_{121} = 0, b_{122} = -1, b_{211} = -1, b_{212} = 0, b_{221} = 2, b_{222} = 1,$ *and* $c_{111} = 3, c_{112} = 2, c_{121} = 1, c_{122} = -3, c_{211} = 0, c_{212} = 2, c_{221} = -1, c_{222} = 2.$

гэж өгөгдсөн байг. Энэ гурвалсан матрицан тоглоомын харгалзах математик програмчлалын бодлого нь::

$$F(x,y,z,p,q,t) = 6x_1y_1z_1 + 7x_1y_1z_2 - 3x_1y_2z_2 + 5x_2y_1z_2 +$$

$$+6x_2y_2z_2 - p - q - t \to max$$

$$\begin{cases} 2y_1z_1 + 3y_1z_2 - y_2z_1 - p & \le 0 \\ y_1z_1 - 2y_1z_2 + 4y_2z_1 + 3y_2z_2 - p & \le 0 \\ x_1z_1 + 2x_1z_2 - x_2z_1 - q & \le 0 \\ -1x_1z_2 + 2x_2z_1 + x_2z_2 - q & \le 0 \\ 3x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_2 - t & \le 0 \\ 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - t & \le 0 \\ x_1 + x_2 & = 1 \\ y_1 + y_2 & = 1 \\ z_1 + z_2 & = 1 \\ x_1 \ge 0 \; , x_2 \ge 0 \; , y_1 \ge 0 \; , y_2 \ge 0 & \\ z_1 \ge 0 \; , z_2 \ge 0 \; , p \ge 0 \; , q \ge 0 \; t \ge 0 & \end{cases}$$

гэсэн хэлбэртэй бичигдэнэ.
Дээрх бодлогын кодыг

```
function [f,g]=tg3j1
x0=[1;0;1;0;1;0;0;0;0];
A=[]; b=[];lb=[0;0;0;0;0;0;-inf;-inf;-inf];
ub=[1;1;1;1;1;1;inf;inf;inf];
Aeq=[1 1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 1 1 0 0 0 0 0;0 0 0 0 1 1 0 0 0];
beq=[1;1;1];
[x,fval]=fmincon(@tg3j1f,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@mycontg3j1);
f=x; g=fval;
%-----------------------------------
%Define objective function
function f=tg3j1f(x)
f=-(6*x(1)*x(3)*x(5)+7*x(1)*x(3)*x(6)+0*x(1)*x(4)*x(5)+
(-3)*x(1)*x(4)*x(6)+0*x(2)*x(3)*x(5)+0*x(2)*x(3)*x(6)+
   +5*x(2)*x(4)*x(5)+6*x(2)*x(4)*x(6)-x(7)-x(8)-x(9));
```

```
%-------------------------------------
%Define objective function
function f=c1(x)
f=2*x(3)*x(5)+3*x(3)*x(6)-1*x(4)*x(5)+0*x(4)*x(6)-x(7);
%-------------------------------------
function f=c2(x)
f=1*x(3)*x(5)-2*x(3)*x(6)+4*x(4)*x(5)+3*x(4)*x(6)-x(7);
%-------------------------------------
function f=c3(x)
f=1*x(1)*x(5)+2*x(1)*x(6)-1*x(2)*x(5)+0*x(2)*x(6)-x(8);
%-------------------------------------
function f=c4(x)
f=0*x(1)*x(5)-1*x(1)*x(6)+2*x(2)*x(5)+1*x(2)*x(6)-x(8);
%-------------------------------------
function f=c5(x)
f=3*x(1)*x(3)+1*x(1)*x(4)+0*x(2)*x(3)-1*x(2)*x(4)-x(9);
%-------------------------------------
function f=c6(x)
f=2*x(1)*x(3)-3*x(1)*x(4)+2*x(2)*x(3)+2*x(2)*x(4)-x(9);
%-------------------------------------
%Define nonlinear constraint
function [c,ceq] = mycontg3j1(x)
    c=[c1;c2;c3;c4;c5;c6];
    ceq =[];
```

гэж бичээд бодуулбал хариу нь $F^* = -2.2204e{-}016,\ x^* = (0.5191; 0.4809)^T,\ y^* = (0.5888; 0.4112)^T$ *ба* $z^* = (0.5382; 0.4618)^T$. $p^* = 1.2281,\ q^* = 0.5$ *ба* $t^* = 0.9327$ *гэж олдоно.*

Жишээ 6. *Бидэнд* $a_{111} = 5, a_{112} = 3, a_{121} = 6, a_{122} = 7, a_{211} = 0, a_{212} = 8, a_{221} = 2, a_{222} = 1,\ b_{111} = 2, b_{112} = 4, b_{121} = -1, b_{122} = 0, b_{211} = 3, b_{212} = 5, b_{221} = 4, b_{222} = 9$, *ба* $c_{111} = 2, c_{112} = 0, c_{121} = -4, c_{122} = -1, c_{211} = -2, c_{212} =$

$6, c_{221} = 8, c_{222} = 9$. *гэсэн хожлын матрицтай тоглоом өгөгдсөн байг.*

Дээрх бодлоготой ижлээр харгалзах математик програмчлалын бодлогыг зохиож, MATLAB дээр кодыг бичвэл:

```
function [f,g]=tg3j2;
x0=[1;0;1;0;1;0;0;0;0];
A=[];
b=[];
lb=[0;0;0;0;0;0;-inf;-inf;-inf];
ub=[1;1;1;1;1;1;inf;inf;inf];
Aeq=[1 1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 1 1 0 0 0 0 0;
                      0 0 0 0 1 1 0 0 0];
beq=[1;1;1];
[f,fval]=fmincon(@tg3j2f,x0,A,b,Aeq,beq,lb,
                           ub,@mycontg3j2);
gamevalue=fval;
x=f(1:2)
v1=f(7)
y=f(3:4)
v2=f(8)
z=f(5:6)
v3=f(9)
function f=tg3j2f(x)
f=-(9*x(1)*x(3)*x(5)+7*x(1)*x(3)*x(6)+1*x(1)*x(4)*x(5)+
    +6*x(1)*x(4)*x(6)+1*x(2)*x(3)*x(5)+19*x(2)*x(3)*x(6)+
    +14*x(2)*x(4)*x(5)+17*x(2)*x(4)*x(6)-x(7)-x(8)-x(9));
function [c,ceq] = mycontg3j2(x)
c1=5*x(3)*x(5)+3*x(3)*x(6)+6*x(4)*x(5)+7*x(4)*x(6)-x(7);
c2=0*x(3)*x(5)+8*x(3)*x(6)+2*x(4)*x(5)-1*x(4)*x(6)-x(7);
c3=2*x(1)*x(5)+4*x(1)*x(6)+3*x(2)*x(5)+5*x(2)*x(6)-x(8);
c4=-1*x(1)*x(5)+0*x(1)*x(6)+4*x(2)*x(5)+9*x(2)*x(6)-x(8);
```

```
c5=2*x(1)*x(3)-4*x(1)*x(4)-2*x(2)*x(3)+8*x(2)*x(4)-x(9);
c6=0*x(1)*x(3)-1*x(1)*x(4)+6*x(2)*x(3)+9*x(2)*x(4)-x(9);
c=[c1;c2;c3;c4;c5;c6];
ceq =[];
```

болох ба шийд нь $F^* = -0.00986$, $x^* = (0.8; 0.2)^T$, $y^* = (0.1; 0)^T$ *ба* $z^* = (0.5; 0.5)^T$. $p^* = -2.2204e-016$, $q^* = 3.2$ *ба* $t^* = 1.2$ *болно.*

1.4 Бодлого дасгал

Та бүхэн энэ хэсэгт өгөгдсөг бодлогуудыг өөрсдөө бие даан MATLAB програм дээр код бичиж өөрсдийгөө шалгаарай.

Дараах тоглоомуудын цэвэр стратегтэй шийдийг ол.

1.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Хариу: Цэвэр стратегаар шийдгүй.

2.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 3$, $x^* = (0, 0, 1)$, $y^* = (0, 0, 1)$ *буюу* (a_3, b_3) *цэвэр стратеги.*

3.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 3, \quad x^* = (0,1), \quad y^* = (1,0).$

4.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = -1, \quad x^* = (1,0,0), \quad y^* = (0,0,1).$

5.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 3, \quad x^* = (0,1), \quad y^* = (0,1,0).$

6.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 3, \quad x^* = (0,0,1,0), \quad y^* = (0,1).$

7.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 30 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 5, \quad x^* = (0,1), \quad y^* = (1,0).$

8.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 1, \quad x^* = (0,1,0), \quad y^* = (0,0,1)$

Дараах тоглоомуудыг геометр аргаар бод.

9.

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 0.55,\ \ x^* = (0.375, 0.625),\ \ y^* = (0.7, 0.3).$

10.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 3.6,\ \ x^* = (0.2, 0.8),\ \ y^* = (0.7, 0.3).$

11.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 3.6,\ \ x^* = (0.778, 0.222),\ \ y^* = (0.444, 0, 0.556).$

12.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 0,\ \ x^* = (0.5, 0.5),\ \ y^* = (0.5, 0.5).$

13.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{10}{9},\ \ x^* = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right),\ \ y^* = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right).$

14.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{23}{7},\ \ x^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right),\ \ y^* = \left(\frac{6}{7}, \frac{1}{7}\right).$

15.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{23}{7}, \quad x^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \quad y^* = \left(\frac{6}{7}, \frac{1}{7}\right).$

Дараах тоглоомуудын хэмжээсийг багасгаж геометр аргаар бод.

16.

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{1}{3}, \quad x^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad y^* = \left(\frac{4}{9}, 0, \frac{5}{9}\right).$

17.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{5}{2}, \quad x^* = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right), \quad y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{9}, 0\right).$

18.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 7 \\ -7 & -5 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 8 \\ -3 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{19}{6}, \quad x^* = \left(\frac{5}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0\right), \quad y^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0, 0\right)$

19.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -7 \\ -4 & -4 & 5 & 4 \\ 4 & -7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{6}{7}, \quad x^* = \left(\frac{11}{14}, 0, 0, \frac{3}{14}\right), \quad y^* = \left(\frac{10}{14}, \frac{4}{14}, 0, 0\right)$

20.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 1, \quad x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad y^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

Дараах тоглоомын холимог стратегтэй шийдийг ол.

21.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 1.8, \quad x^* = (0.4, 0.4, 0.2), \quad y^* = (0.4, 0.4, 0.2).$

22.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{16}{15}, \quad x^* = y^* = \left(\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right).$

23.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{8}{15}, \quad x^* = \left(\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right), \ y^* = \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}\right).$

24.

$$C = (c_{ij})_{m\times n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

бол a). n=3 b). n=5 c). $\forall n$ *үед шийдийг ол.*

Хариу:

a). $v = \frac{1}{7},\ \ x^* = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right),\ y^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right).$

b). $v = \frac{1}{31},\ \ x^* = \left(\frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \frac{4}{31}, \frac{8}{31}, \frac{16}{31}\right),\ y^* = \left(\frac{16}{31}, \frac{8}{31}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right).$

c). $v = \frac{1}{2^n-1},\ \ x^* = \left(\frac{1}{2^n-1}, \frac{2}{2^n-1}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^n-131}\right),$
$y^* = \left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}, \dots, \frac{2}{2^n-1}, \frac{1}{2^n-1}\right).$

25.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{3}{7},\ \ x^* = \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right),\ y^* = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right).$

26.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = \frac{1}{10},\ \ x^* = y^* = \left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right).$

27.

$$C=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\0&3&0&0\\0&0&4&3\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

Хариу: $v=\frac{12}{13},\quad x^*=y^*=\left(\frac{6}{13},\frac{4}{13},\frac{3}{13},0\right).$

28.

$$C=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&3&2&2\\0&0&4&3\\0&0&0&5\end{pmatrix}$$

Хариу: $v=1.39535.\ \ x^*=(0.69767,0.23256,0.05814,0.01163),$
$y^*=(0.39535,0.18605,0.13953,0.27907).$

29.

$$C=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&5\end{pmatrix}$$

Хариу: $v=1.48.\ \ x^*=(0.48,0.24,0.16,0.12,0),$
$y^*=(0.48,0.24,0.16,0.12).$

30.

$$C=\begin{pmatrix}2&-1&0&6&12&-8\\0&6&8&-2&-4&1\end{pmatrix}$$

Хариу: $v=-0.8,\quad x^*=(0.2,0.8),\quad y^*=(0,0,0,0,0.36,0.64).$

31.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 0.45146,$

$x^* = (0.24272, 0.16019, 0.13107, 0.13592, 0.12136, 0.20874),$
$y^* = (0.25243, 0.14078, 0.16019, 0.24272, 0.00485, 0.19903)$

32.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Хариу: $v = 1.40816,$

$x^* = (0.40816, 0.20408, 0.13605, 0.10204, 0.08163, 0.06803),$
$y^* = (0.40816, 0.20408, 0.13605, 0.10204, 0.08163, 0.06803).$

Дараах биматрицан тоглоомыг бод.

Дараах тоглоомуудад тоглогчдын хамгийн сайн хариу үйлдлийн олонлогуудын тусламжтайгаар оновчтой шийдийг ол.

33.

$$A = \begin{pmatrix} (2,3) & (3,2) \\ (5,0) & (2,3) \end{pmatrix}$$

34.

$$A = \begin{pmatrix} (0,0) & (2,4) \\ (2,2) & (3,3) \end{pmatrix}$$

35.

$$A = \begin{pmatrix} (1,4) & (4,1) \\ (2,2) & (3,3) \end{pmatrix}$$

36.

$$A = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,-1) \\ (1,0) & (-1,3) \end{pmatrix}$$

Харгалзах квадратлаг хэлбэрийн бодлогыг зохиож, оновчтой стратегуудыг ол.

37.

$$A = \begin{pmatrix} (1,1) & (5,0) \\ (0,5) & (4,4) \end{pmatrix}$$

38.

$$A = \begin{pmatrix} (3,10) & (1,5) \\ (2,0) & (4,20) \end{pmatrix}$$

39.

$$A = \begin{pmatrix} (0,3) & (4,2) & (9,8) & (2,1) \\ (7,5) & (8,4) & (13,11) & (6,7) \\ (3,2) & (9,5) & (10,5) & (4,3) \end{pmatrix}$$

40.

$$A = \begin{pmatrix} (0,3) & (4,2) & (9,8) & (2,1) \\ (7,5) & (8,4) & (13,11) & (6,7) \\ (3,2) & (9,5) & (10,5) & (4,3) \end{pmatrix}$$

41.

$$A = \begin{pmatrix} (0,0) & (1,2) & (2,0) \\ (0,1) & (2,0) & (0,1) \end{pmatrix}$$

42.

$$A = \begin{pmatrix} (-3,-4) & (2,-1) & (0,6) & (1,1) \\ (2,0) & (2,2) & (-3,0) & (1,-2) \\ (2,-3) & (-5,1) & (-1,-1) & (1,-3) \\ (-4,3) & (2,-5) & (1,2) & (-3,1) \end{pmatrix}$$

43.

$$A = \begin{pmatrix} (4,-2) & (4,3) & (6,5) & (1,-1) & (4,2) & (1,-1) \\ (3,1) & (1,2) & (2,5) & (0,3) & (-1,3) & (3,2) \\ (1,2) & (-1,3) & (-1,5) & (1,2) & (4,3) & (5,2) \\ (-1,3) & (2,5) & (2,5) & (1,1) & (1,2) & (7,0) \end{pmatrix}$$

44.

$$A = \begin{pmatrix} (0,0) & (1,-1) & (1,1) & (-1,0) \\ (-1,1) & (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (-1,-1) & (0,1) & (-1,1) \\ (1,-1) & (-1,0) & (1,-1) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (-1,-1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

45. *Дараах гурвалсан матрицан тоглоомыг бод.*

$a_{111} = 3, a_{112} = 2, a_{121} = 1, a_{122} = 5, a_{211} = 8, a_{212} = 4, a_{221} = 1, a_{222} = 3,$ $b_{111} = 3, b_{112} = 2, b_{121} = 4, b_{122} = 0, b_{211} = 1, b_{212} = 8, b_{221} = 6, b_{222} = 6,$ *ба* $c_{111} = 3, c_{112} = 1, c_{121} = 9, c_{122} = 2, c_{211} = 4, c_{212} = 7, c_{221} = 2, c_{222} = 3.$

Хариу: $F^* = 0,\ x^* = (1;0)^T,\ y^* = (1;0)^T$ *ба* $z^* = (0;1)^T$. $p^* = 4,\ q^* = 8$ *ба* $t^* = 7$.

Ном зүй

1. А.С.Стрекаловский, А.В.Орлов. "Биматричные игры и Билинейное программирование", Москва, Физматлит, 2007

2.Е.С.Вентцель. "Элементы теорий игр", Москва, Физматлит, 1959

3. Н.Н.Воробьев. "Бескаолиционные игры", Москва, Наука, 1984

4. Н.Н.Воробьев. "Теория игр для экономистов и кибернетиков", Москва, Наука, 1985

5. R.Gibbons. "Game Theory for Applied Economists", Princeton University Press, 1992

6. R.J. Aumann, S.Hart and etc. "Handbook of Game Theory", Nort-Holland, V.3, 2002

7. D.Kreps. "Game Theory and Economic Modeling", Oxford University Press, 1990

8. J.F.Nash. "Equilibrium points in n-person games", Proceed Nat.Acad.Sci, USA V.36, pp.48-49, 1950

9. J.F.Nash. "Noncooperative games", Annals of Mathematics, V.54, pp286-295, 1951

10. M.J.Osborn, A.Rubinstein. "A course in Game Theory", Cambridge, The MIT Press, London, 1996

11. P.Dimitrih, D.Bertsekas. "Nonlinear Programming", Athena Scientific, 1999

12. Jean-Pierre Aubin. "Optima and Equilibria", Springer, 1998