Гарчиг

Математикийн тэмдэгт болон тогтмолууд

Тэмдэглэгээ болон тэмдэгтүүд

$\mathbb{N}$	– натурал тоонуудын олонлог
$\mathbb{N}_0$	– тэг оролцсон натурал тоонуудын олонлог
$\mathbb{Z}$	– бүхэл тоонуудын олонлог
$\mathbb{Q}$	– рационал тоонуудын олонлог
$\mathbb{R}$	– бодит тоонуудын олонлог
$\mathbb{R}^+$	– сөрөг биш бодит тоонуудын олонлог
$\mathbb{R}^n$	– бодит тоон координаттай n хэмжээст векторуудын олонлог
$\mathbb{C}$	– комплекс тоонуудын олонлог
$\sqrt{x}$	– $y^2 = x$, $x \geq 0$ байх сөрөг биш y тоо (квадрат язгуур)
$\sqrt[n]{x}$	– $y^n = x$, $x \geq 0$ байх сөрөг биш y тоо (n зэргийн язгуур)
$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$	– x_i тоонуудын нийлбэр: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$
$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$	– x_i тоонуудын үржвэр: $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$
$n!$	– $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (n-ийн факториал)
$\min\{a, b\}$	– a ба b тоонуудын минимум: хэрэв $a \leq b$ бол a , $a \geq b$ бол b
$\max\{a, b\}$	– a ба b тоонуудын максимум: хэрэв $a \geq b$ бол a, $a \leq b$ бол b
$\lceil x \rceil$	– $y \geq x$ байх хамгийн бага бүхэл y тоо (дээрээс нь тоймлох)
$\lfloor x \rfloor$	– $y \leq x$ байх хамгийн их бүхэл y тоо (доороос нь тоймлох)
$\operatorname{sgn} x$	– сигнум: хэрэв $x > 0$ бол 1, $x = 0$ бол 0, $x < 0$ бол -1
$\lvert x \rvert$	– x бодит тооны абсолют хэмжигдэхүүн: хэрэв $x \geq 0$ бол x, $x < 0$ бол $-x$ утга авна
(a, b)	– задгай завсар, ө.х. $a < x < b$
$[a, b]$	– битүү завсар, ө.х. $a \leq x \leq b$
$(a, b]$	– баруун талаасаа битүү хагас задгай завсар, ө.х. $a < x \leq b$
$[a, b)$	– баруун талаасаа задгай хагас задгай завсар, ө.х. $a \leq x < b$
$\leq$, $\geq$	– бага буюу тэнцүү; их буюу тэнцүү
$\pm$, $\mp$	– нэмэх дараа нь хасах; хасах дараа нь нэмэх
$\stackrel{\text{def}}{=}$	– тодорхойлолт ёсоор тэнцүү
$:=$	– зүүн тал нь баруун талын хэсгээр тодорхойлогдоно

$\forall$	– дурын ; …бүрийн хувьд
$\exists$	– …оршин байх; …(ядаж нэг) оршин байна
$p \wedge q$	– коньюнкц; p ба q
$p \vee q$	– дизьюнкц; p буюу q
$p \Longrightarrow q$	– импликаци; p-ээс q мөрдөнө
$p \Longleftrightarrow q$	– эн чацуу; p нь q-тэй эн чацуу
$\neg p$	– үгүйсгэл; p биш
$a \in M$	– a нь M олонлогийн элемент
$a \notin M$	– a нь M олонлогийн элемент биш
$\binom{n}{k}$	– биномын коэффициент
$A \subset B$	– A нь B-ийн дэд олонлог
$\emptyset$	– хоосон олонлог
$\\|\cdot\\|$	– норм (векторын, матрицийн, …)
$\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})$	– $\boldsymbol{A}$ матрицийн ранг
$\det \boldsymbol{A}$, $\|\boldsymbol{A}\|$	– $\boldsymbol{A}$ матрицийн тодорхойлогч
δ_{ij}	– Кронекерийн тэмдэгт : хэрэв $i = j$ бол 1, $i \neq j$ бол 0
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	– n нь ∞ руу тэмүүлэх үед $\{a_n\}$ дарааллын хязгаар
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	– x_0 цэг дээрх f функцийн хязгаар
$\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)$	– x_0 цэг дээрх f функцийн баруун өрөөсгөл хязгаар
$\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)$	– x_0 цэг дээрх f функцийн зүүн өрөөсгөл хязгаар
$U_\varepsilon(x^*)$	– x^* цэгийн ε-орчин
$f(x)\big\|_a^b = \big[f(x)\big]_a^b$	$=\ f(b) - f(a)$

Математикийн тогтмолууд

$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\ \ldots$

$\mathrm{e} = 2.718\,281\,828\,459\,045\ \ldots$

$1^\circ = 0.017\,453\,292\,520\ \ldots = \dfrac{\pi}{180}$

$1' = 0.000\,290\,888\,209\ \ldots$

$1'' = 0.000\,004\,848\,137\ \ldots$

Олонлог болон хэллэг

Олонлогийн ойлголт

M олонлог	–	нэг утгатай тодорхойлогдсон, ялгаатай элементүүдийн бүл
элементүүд	–	олонлогийг бүрдүүлэгчид $a \in M \iff a$ нь M олонлогт харъяалагдана $a \notin M \iff a$ нь M олонлогт харъяалагдахгүй
дүрслэх	–	1. элементүүдийг тоочих замаар: $M = \{a, b, c, \ldots\}$ 2. элементүүдийг тодорхойлогч шинж чанарын тусламжтайгаар: $M = \{x \in \Omega \mid A(x) \text{ үнэн}\}$
хоосон олонлог	–	ямар ч элементгүй олонлог; тэмдэглэгээ: $\emptyset$
нийцгүй олонлогууд	–	ерөнхий элементгүй олонлогууд: $M \cap N = \emptyset$

Олонлогуудын хоорондох харьцаа

Олонлогуудын агуулагдал (дэд олонлог)

$M \subset N \iff (\forall x \in M \implies x \in N)$	–	M нь N-ийн дэд олонлог (агуулагдал)
$M \subset N \wedge (\exists\, x \in N : x \notin M)$	–	M нь N-ийн жинхэнэ дэд олонлог
$\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subset M\}$	–	M-ийн бүх дэд олонлогуудын олонлог
Чанарууд:		
$M \subset M$	–	рефлексив чанар
$M \subset N \ \wedge \ N \subset P \implies M \subset P$	–	транзитив чанар
$\emptyset \subset M \quad \forall M$	–	$\emptyset$ нь бүх олонлогуудын дэд олонлог

• Дэд олонлогийн өөр тэмдэглэл: $M \subseteq N$ (жинхэнэ дэд олонлог: $M \subset N$).

Тэнцүү олонлогууд

$M = N \iff (\forall\, x \in M \iff x \in N)$	–	тэнцүү байх чанар
Чанарууд:		
$M \subset N \wedge N \subset M \iff M = N$	–	эрэмбийн чанар
$M = M$	–	рефлексив чанар
$M = N \implies N = M$	–	симметр чанар
$M = N \wedge N = P \implies M = P$	–	транзитив чанар

Олонлог дээрх үйлдлүүд

$M \cap N = \{x \,\vert\, x \in M \wedge x \in N\}$	–	M ба N олонлогуудын огтлолцол; M ба N олонлогуудад зэрэг харъяалагдах элементүүдээс бүрдэнэ (1)
$M \cup N = \{x \,\vert\, x \in M \vee x \in N\}$	–	M ба N олонлогуудын нэгдэл ; M буюу N олонлогуудын ядаж нэгд нь харъяалагдах элементүүдээс бүрдэнэ (2)
$M \setminus N = \{x \,\vert\, x \in M \wedge x \notin N\}$	–	M ба N олонлогуудын ялгавар; N-д харъяалагдахгүй M олонлогийн элементүүдээс бүрдэнэ (3)
$\mathbf{C}_\Omega M = \overline{M} = \Omega \setminus M$	–	өгөгдсөн Ω суурь олонлогийн хувьд M-ийн гүйцээлт; энд $M \subset \Omega$ (4)

M N

(1)

M N

(2)

M N

(3)

Ω M

(4)

• $A \cap B = \emptyset$ байх (A, B нь ерөнхий элементгүй) A, B олонлогуудыг *нийцгүй* олонлогууд гэнэ.

• Олонлогууд дээрх үйлдлүүд нь мөн олонлогуудын хоорондох *харьцаанууд* гэж нэрлэгддэг.

Давхардсан үйлдлүүд

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n = \{x \,|\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} : x \in M_i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n = \{x \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : x \in M_i\}$$

Морганы хуулиуд

$$\overline{(M \cup N)} = \overline{M} \cap \overline{N}\,, \qquad \overline{(M \cap N)} = \overline{M} \cup \overline{N} \qquad \text{(2 олонлогийн хувьд)},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} M_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{M_i}\,, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} M_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{M_i} \qquad \text{(n олонлогийн хувьд)}$$

Олонлог дээрх үйлдлүүдийн хуулиуд

Нэгдэл болон огтлолцол

$A \cup (B \cap A) = A$ $\qquad$ $A \cap (B \cup A) = A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Нэгдэл, огтлолцол болон ялгавар

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ $\qquad$ $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ $\qquad$ $A \cap B = \emptyset \iff A \setminus B = A$

Агуулагдлын харьцааны үед нэгдэл, огтлолцол болон ялгавар

$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$

$A \subset B \implies A \cup C \subset B \cup C$

$A \subset B \implies A \cap C \subset B \cap C$

$A \subset B \iff A \setminus B = \emptyset$

Нэгдэл, огтлолцол болон гүйцээлт

Хэрэв $A \subset \Omega$ болон $B \subset \Omega$ биелдэг бол дараах харьцаанууд хүчинтэй (үүнд бүх гүйцээлтүүд нь Ω-тай харьцангуй авагдсан):

$\overline{\emptyset} = \Omega$	$\overline{\Omega} = \emptyset$	
$A \cup \overline{A} = \Omega$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Морганы хуулиуд х. 3
$\overline{(\overline{A})} = A$	$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$	

Үржвэр олонлог болон буулгалт

Үржвэр олонлог

(x, y)	–	эрэмбэлэгдсэн хос; эрэмбээр нь авч үзэж байгаа $x \in X$, $y \in Y$ элементүүдийн хослол
$(x, y) = (z, w) \iff x = z \wedge y = w$	–	2 эрэмбэлэгдсэн хос тэнцүү байх
$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$	–	үржвэр олонлог, декарт үржвэр, шулуун үржвэр

n олонлогуудын шулуун үржвэр

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \in X_i\}$$

$$\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ удаа}} = X^n; \qquad \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ удаа}} = \mathbb{R}^n$$

• $X_1 \times \ldots \times X_n$ олонлогийн элементүүдийг, ө. х. $(x_1, \ldots, x_n)$-г n *хэмжээст*, $n = 2$ бол *хос*, $n = 3$ бол *гурвалсан хос* гэнэ; түүнчлэн $\mathbb{R}^2$ нь бүх хосуудын, $\mathbb{R}^n$ нь бүх n хэмжээст бодит тоон координат бүхий векторуудын олонлогийг тус тус тэмдэглэнэ.

Буулгалт (харьцаа)

$A \subset X \times Y$	–	X олонлогийг Y олонлогт буулгасан буулгалт; X, Y олонлогуудын декарт үржвэрийн дэд олонлог
$D_A = \{x \in X \mid \exists\, y : (x, y) \in A\}$	–	A-ийн тодорхойлогдох муж
$W_A = \{y \in Y \mid \exists\, x : (x, y) \in A\}$	–	A-ийн утгын муж
$A^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in A\}$	–	A-ийн хувьд урвуу буулгалт

• $(x, y) \in A$ байг. Тэгвэл y нь x-д харгалзах элемент (утга) болно. Хэрэв ямар нэг $x \in X$-ийн хувьд цор ганц $y \in Y$ элемент харгалзаж байвал A-г X-ээс Y-д буулгасан нэг утгатай буулгалт гэнэ. Нэг утгатай буулгалтыг *функц* гэж нэрлээд, f-ээр тэмдэглэвэл буулгалтын дүрэм ёсоор $y = f(x)$. Хэрэв A болон түүний урвуу буулгалт A^{-1} (урвуу функц f^{-1}) нь нэгэн зэрэг нэг утгатай бол A-г (харгалзан f-г) харилцан нэг утгатай (иньектив) буулгалт (функц) гэдэг.

Шугаман буулгалт

$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$	–	шугаман буулгалтыг (функц) тодорхойлох чанар, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

• $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$
гэсэн 2 шугаман буулгалтуудын үржвэр
$h(x) = g(f(x))$ нь мөн шугаман буулгалт байх бөгөөд $h = g \circ f$ гэж тэмдэглэнэ.

Хэллэгийн тоолол

Хэллэг болон хэллэгэн хэлбэр

p хэллэг	–	"үнэн" (t) эсвэл "худал" (f) гэж тодорхойлох боломжтой өгүүлбэр
$p(x)$ хэллэгэн хэлбэр	–	x хувьсагчаас хамаарсан өгүүлбэр; зөвхөн x-ийн тодорхой утга орлуулсны дараа хэллэг үүсгэх өгүүлбэр

• *Универсал* $\forall$ ($\forall\, x : p(x)$; үгчилбэл: "дурын x-ийн хувьд $p(x)$ хэллэг үнэн ") эсвэл *оршин байхын* $\exists$ ($\exists\, x : p(x)$; үгчилбэл: "$p(x)$ өгүүлбэр үнэн байх x олдоно ") кванторуудын тусламжтайгаар хэллэгэн хэлбэрийн үнэний утгыг тодорхойлж болно.

Нийлмэл хэллэгүүд

• Үнэний утгын хүснэгтийг ашиглан хэллэгүүдээс шинэ хэллэг үүсгэж болно. Нийлмэл хэллэгийг 1 байрт (үгүйсгэл), 2 байрт (дараагийн хүснэгтийг үз) болон $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ хэллэгүүдийн хослол хэлбэрээр илэрхийлэгдэх олон байрт гэж ангилна.

• Бүрдүүлэгч хэллэгүүдийн үнэний утгаас хамаарахгүйгээр үргэлж үнэн (худал) утга авдаг бол *тавталоги* буюу *туйлын үнэн* (*туйлын худал*) хэллэг гэж нэрлэдэг.

Нэг байрт харьцаа (үнэний утгын хүснэгт)

Үгүйсгэл $\neg p$ (p биш)

p	$\neg p$
t	f
f	t

2 байрт харьцаа (үнэний утгын хүснэгт)

Харьцаа	унших	p q	t t	t f	f t	f f
коньюнкц	p ба q	$p \wedge q$	t	f	f	f
дизьюнкц	p буюу q	$p \vee q$	t	t	t	f
импликаци	p-ээс q мөрдөнө	$p \Longrightarrow q$	t	f	t	t
эквивалент	p нь q-тэй эн чацуу	$p \Longleftrightarrow q$	t	f	f	t

• Импликаци нь (“p-ээс q мөрдөнө”) мөн “хэрэв ... бол ...” гэсэн хэлбэртэй байна. p нь *угтвар нөхцөл* q нь *дүгнэлт* гэж нэрлэгдэнэ.

• *Угтвар нөхцөл* p нь *дүгнэлт* q-д *зайлшгүй*, харин q нь p-ийн хувьд *хүрэлцээтэй* нөхцөл болно. Эн чацуу хэллэгийн өөр хэлбэр нь “зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл”.

Тавталоги болон хэллэгийн тоолол

$p \vee \neg p$	–	law of excluded middle (excluded third)
$\neg (p \wedge \neg p)$	–	зөрчлийн хууль
$\neg (\neg p) \Longleftrightarrow p$	–	үгүйсгэлийн үгүйсгэл
$\neg (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$	–	импликацийн үгүйсгэл
$\neg (p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$	–	Морганы хууль
$\neg (p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	–	Морганы хууль
$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$	–	эсрэг байршлын хууль
$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$	–	транзитив хууль
$p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q$	–	rule of detachment
$q \wedge (\neg p \Longrightarrow \neg q) \Longrightarrow p$	–	шууд бус баталгааны зарчим
$[(p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \Longrightarrow q) \wedge (p_2 \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$	–	distinction of cases

Бүрэн индукцийн зарчим

Бодлого: n натурал тооноос хамаарсан $A(n)$ хэллэгийг дурын n-ийн хувьд батлах.

Индукцийн эхлэл: $A(n)$ хэллэгийг n-ийн эхний утгад хүчинтэйг харуулна (ихэвчлэн $n = 0$ эсвэл $n = 1$ үед).

Индукцийн таамаглал: $A(n)$ хэллэгийг $n = k$ үед үнэн гэж үзнэ.

Индукцийн алхам: Индукцийн таамаглалын тусламжтайгаар $A(n)$ хэллэгийг $n = k + 1$ үед биелэхийг батална.

Тоон системүүд тэдгээрийн арифметик

Натурал, бүхэл, рационал болон бодит тоонууд

Натурал тоонууд: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

хуваагч	–	$n = m \cdot k$ байх $k \in \mathbb{N}$ натурал тоо олдож байвал $m \in \mathbb{N}$-г $n \in \mathbb{N}$ тооны хуваагч гэнэ.
анхны тоо	–	1 болон n гэсэн зөвхөн 2 хуваагчтай $n > 1$ байх натурал тоо
хамгийн их ерөнхий хуваагч	–	$\text{ХИЕХ}(n, m) = \max\{k \in \mathbb{N} : n$ болон m-г зэрэг хуваах k тоо $\}$
хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч	–	$\text{ХБЕХ}(n, m) = \min\{k \in \mathbb{N} : n$ болон m-д зэрэг хуваагдах k тоо $\}$

• $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ тоо бүрийг анхны тоонуудын зэрэгтүүдийн үржвэр хэлбэртэй бичиж болно.

$\boxed{n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}}$ p_j анхны тоонууд, r_j натурал тоонууд

Бүхэл тоонууд: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Рационал тоонууд: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

• Рационал тооны аравтын бутархай дүрслэл нь төгсгөлөг эсвэл үет байна. Төгсгөлөг эсвэл үет аравтын бутархай дүрслэл бүхий тоо бүхэн рационал тоо болно.

Бодит тоонууд: $\mathbb{R}$

• $\mathbb{Q}$ олонлогийг төгсгөлгүй олон цифр бүхий үет биш аравтын бутархай тоонуудаар “өргөтгөх” замаар бодит тоон олонлогийг үүсгэнэ.

$$x = \sum_{j=-\infty}^{k} r_j g^j \quad - \quad g \text{ суурьтай дүрслэл}$$

$g = 2$: 2-тын $g = 8$: 8-тын $g = 10$: 10-тын бутархай дүрслэл

10-тын бутархайг g суурьтай дүрслэлд шилжүүлэх

1. Эерэг аравтын бутархайн задаргаа x: $x = n + x_0,\ n \in \mathbb{N},\ x_0 \in \mathbb{R}$
2. Бүхэл хэсэг n тоог g-д хуваах замаар шилжүүлэх
$$q_0 = n, \qquad q_{j-1} = q_j \cdot g + r_j, \qquad 0 \le r_j < g, \qquad j = 1, 2, \ldots$$
3. Бутархай хэсэг x_0 тоог g-ээр үржүүлэх замаар шилжүүлэх
$$g \cdot x_{j-1} = s_j + x_j, \qquad 0 < x_j < 1, \qquad j = 1, 2, \ldots$$
4. Үр дүн: $x = (r_k \ldots r_2 r_1 . s_1 s_2 \ldots)_g$

g суурьтай дүрслэлийг 10-тын бутархайд (► Горнерын схем ашиглан) шилжүүлэх

$$x=(r_k\dots r_2r_1.s_1s_2\dots s_p)_g=(\dots((r_kg+r_{k-1})g+r_{k-2})g+\dots+r_2)g+r_1$$
$$+(\dots((s_p/g+s_{p-1})/g+s_{p-2})/g+\dots+s_1)/g$$

Бодит тоон дээрх үйлдлүүд

Энгийн хуулиуд

$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$	– байр сэлгэх хууль
$(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	– бүлэглэх хууль
$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	– хаалт задлах хууль
$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$	– хаалт задлаж үржүүлэх
$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$	– бутархайг өргөтгөх $(b,c\neq 0)$
$\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}$	– бутархайг хураах $(b,c\neq 0)$
$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$	– ижил хуваарьтай бутархайнуудыг нэмж, хасах $(c\neq 0)$
$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{c\cdot d}$	– дурын бутархайнуудыг нэмж, хасах $(c,d\neq 0)$
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	– бутархайнуудыг үржүүлэх $(b,d\neq 0)$
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$	– бутархайнуудыг хуваах $(b,c,d\neq 0)$

Тодорхойлолтууд

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad - \quad \text{дарааллын гишүүдийн нийлбэр}$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \quad - \quad \text{дарааллын гишүүдийн үржвэр}$$

Үйлдлийн дүрмүүд

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \sum_{i=1}^{n}(c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot a \quad (a_i = a \text{ үед}) \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(c \cdot a_i) = c^n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = a^n \quad (a_i = a \text{ үед})$$

Хувьсагчийн дугаараас үл хамаарах чанар

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

Абсолют хэмжигдэхүүн

Тодорхойлолт

$$|x| = \begin{cases} x & \text{хэрэв} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{хэрэв} \quad x < 0 \end{cases} \quad - \quad x \text{ тооны абсолют хэмжигдэхүүн}$$

Үйлдлийн дүрэм болон чанарууд

$\lvert x\rvert = x \cdot \operatorname{sgn} x$	$\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$
$\lvert x\rvert = 0 \iff x = 0$	
$\lvert x \cdot y\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	$\left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert = \dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert},\ y \neq 0$
Гурвалжны дүрэм:	
$\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	(тэнцэтгэл биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y$)
$\Big\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \Big\rvert \leq \lvert x + y\rvert$	(тэнцэтгэл биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\operatorname{sgn} x = -\operatorname{sgn} y$)

Факториал болон биномын коэффициент

Тодорхойлолтууд

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$	– ($n \in \mathbb{N}$)-ийн факториал
$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$	– биномын коэффициент ($k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$; унших: “n-ээс k-аар авсан”)
$\dbinom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{хэрэв } k \leq n \text{ бол} \\ 0 & \text{хэрэв } k > n \text{ бол} \end{cases}$	– өргөтгөсөн тодорхойлолт $k, n \in \mathbb{N}_0$, $0! = 1$ гэж үзнэ

$$\binom{0}{0} = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

Паскалийн гурвалжин :

									$k=1$				
$n=0$:						1				$k=2$			
$n=1$:					1		1				$k=3$		
$n=2$:				1		2		1					
$n=3$:			1		3		3		1				
$n=4$:		1		4		6		4		1			
$n=5$:	1		5		10		10		5		1		

. . . .

Чанарууд

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	– тэгш хэмт чанар
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$	– нийлбэрийн чанар
$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+m}{m} = \binom{n+m+1}{m}$	– нийлбэрийн теорем
$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$	
$\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$	

• Биномын коэффициентийн тодорхойлолт $n \in \mathbb{R}$-ийн хувьд мөн хэрэглэгдэнэ. Энэ тохиолдолд нийлбэрийн чанар болон теорем нь бас хүчинтэй.

Тэгшитгэл

Илэрхийллийг хувиргах

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad \text{(биномын томъёо)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \qquad (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}, \quad a \neq b,\ n = 2, 3, \ldots$$

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \qquad \text{(бүтэн квадрат ялгах)}$$

Биномын теорем

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Тэнцэтгэлийг хувиргах

Хэрэв тэнцэтгэлийн **2 талд** ижил үйлдэл хэрэглэхэд тэнцэтгэл хэвээр хадгалагдана.

$$
\begin{array}{ll}
a = b \implies a + c = b + c, & c \in \mathbb{R} \\
a = b \implies a - c = b - c, & c \in \mathbb{R} \\
a = b \implies c \cdot a = c \cdot b, & c \in \mathbb{R} \\
a = b,\ a \neq 0 \implies \dfrac{c}{a} = \dfrac{c}{b}, & c \in \mathbb{R} \\
a = b \implies a^n = b^n, & n \in \mathbb{N} \\
a^2 = b^2 \implies \begin{cases} a = b & \text{хэрэв} \quad \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b \\ a = -b & \text{хэрэв} \quad \operatorname{sgn} a = -\operatorname{sgn} b \end{cases} &
\end{array}
$$

Тэгшитгэлийг бодох

Хэрэв тэнцэтгэл хувьсагчууд агуулдаг бол эдгээр хувьсагчийн зарим утгад тэнцэтгэл үнэн боловч өөр зарим утгад худал байж болно. Иймээс өгөгдсөн тэгшитгэлийг *бодно* гэдэг нь уг тэнцэтгэлийг **үнэн** байлгадаг хувьсагчийн бүх утгуудыг тодорхойлох явдал юм.

$$
\begin{array}{lll}
ax + b = 0 & \implies & \begin{cases} x = -\frac{b}{a} & \text{хэрэв} \quad a \neq 0 \\ x \ \text{дурын} & \text{хэрэв} \quad a = b = 0 \\ \text{шийдгүй} & \text{хэрэв} \quad a = 0,\ b \neq 0 \end{cases} \\
(x-a)(x-b) = 0 & \implies & x = a \quad \text{буюу} \quad x = b \\
(x-a)(y-b) = 0 & \implies & (x = a \ \text{ба} \ y \ \text{дурын}) \quad \textbf{буюу} \\
& & (x \ \text{дурын ба} \ y = b)
\end{array}
$$

x бодит хувьсагчийн хувьд квадрат тэгшитгэл :

$$
x^2 + px + q = 0 \implies
$$

$$
\begin{cases}
x = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q} & \text{хэрэв} \quad p^2 > 4q \quad (\text{ялгаатай 2 бодит шийдтэй}) \\
x = -\dfrac{p}{2} & \text{хэрэв} \quad p^2 = 4q \quad (\text{давхацсан 2 бодит шийдтэй}) \\
\text{бодит шийдгүй} & \text{хэрэв} \quad p^2 < 4q
\end{cases}
$$

Тэнцэтгэл биш

Үйлдлийн дүрмүүд

$$
\begin{array}{lll}
x < y \ \wedge\ y < z & \Longrightarrow & x < z \qquad (x, y, z, u, v \in \mathbb{R}) \\
x < y & \Longrightarrow & x + z < y + z \\
x < y \ \wedge\ z > 0 & \Longrightarrow & x \cdot z < y \cdot z \\
x < y \ \wedge\ z < 0 & \Longrightarrow & x \cdot z > y \cdot z \\
0 < x < y \ \wedge\ 0 < u < v & \Longrightarrow & x \cdot u < y \cdot v \\
0 < x < y & \Longrightarrow & \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y} \\
\dfrac{x}{y} < \dfrac{u}{v} \ \wedge\ y > 0 \ \wedge\ v > 0 & \Longrightarrow & \dfrac{x}{y} < \dfrac{x+u}{y+v} < \dfrac{u}{v}
\end{array}
$$

Бернуллийн тэнцэтгэл биш

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad x > -1,\ \ n \in \mathbb{N}$$

Коши-Шварцийн тэнцэтгэл биш

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Төгсгөлөг нийлбэр

Арифметик цуваа:

$$a_{k+1} = a_k + d \qquad \Longrightarrow \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Геометр цуваа:

$$a_{k+1} = q \cdot a_k \qquad \Longrightarrow \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

Зарим төгсгөлөг нийлбэрүүд

нийлбэр	утга
$1+2+3+\ldots+n$	$\frac{1}{2}n(n+1)$
$1+3+5+\ldots+(2n-1)$	n^2
$2+4+6+\ldots+2n$	$n(n+1)$
$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$	$\frac{1}{3}n(4n^2-1)$
$2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2$	$\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$
$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$	$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$	$n^2(2n^2-1)$
$2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3$	$2n^2(n+1)^2$
$1+x+x^2+\ldots+x^n$	$\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad (x \neq 1)$
$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$	$\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$
$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$	$\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2}x)-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$

Зэрэгт болон язгуур

Бүхэл илтгэгчтэй зэрэгт $(a \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N};\ p, q \in \mathbb{Z})$

эерэг илтгэгчтэй зэрэгт:	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ удаа}},$	$a^0 = 1$
сөрөг илтгэгчтэй зэрэгт:	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$	

Үйлдлийн дүрмүүд

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$	$(a^p)^q = (a^q)^p = a^{p \cdot q}$
$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$	$(a, b \neq 0)$

Язгуур, бодит илтгэгчтэй зэрэгт $(a, b \in \mathbb{R};\ a, b > 0;\ m, n \in \mathbb{N})$

n зэргийн язгуур:	$u = \sqrt[n]{a}$	$\Longleftrightarrow$	$u^n = a, \quad u \geq 0$

Үйлдлийн дүрмүүд

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0) \quad (a, b > 0)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \qquad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (a \geq 0)$$

рационал илтгэгчтэй

зэрэгт: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

бодит илтгэгчтэй

зэрэгт: $a^x = \lim\limits_{k \to \infty} a^{q_k}, \qquad q_k \in \mathbb{Q},\ \lim\limits_{k \to \infty} q_k = x$

• Бодит илтгэгчтэй зэрэгтийн хувьд бүхэл илтгэгчтэй зэрэгт дээр биелэх үйлдлийн дүрмүүд мөн хүчинтэй.

Логарифм

a суурьтай логарифм: $x = \log_a u \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = u, \quad a > 1, \ u \geq 0$

Суурь $a = 10$: $\log_{10} u = \lg u$ – аравтын логарифм

Суурь $a = \mathrm{e}$: $\log_{\mathrm{e}} u = \ln u$ – натурал логарифм

Үйлдлийн дүрмүүд

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \qquad \log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a u^v = v \cdot \log_a u \qquad \log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b} \quad (u, v > 0,\ b > 1)$$

Комплекс тоонууд

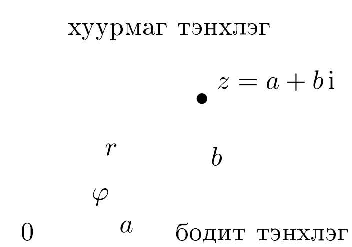
i: $\mathrm{i}^2 = -1$	–	хуурмаг нэгж
$z = a + b\,\mathrm{i}, \quad a, b \in \mathbb{R}$	–	$z \in \mathbb{C}$ комплекс тооны декартын системийн хэлбэр
$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$	–	$z \in \mathbb{C}$ комплекс тооны туйлын системийн хэлбэр (Эйлерийн харьцаа)
$\mathrm{Re}\ z = a = r\cos\varphi$	–	z тооны бодит хэсэг
$\mathrm{Im}\ z = b = r\sin\varphi$	–	z тооны хуурмаг хэсэг
$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$	–	z тооны абсолют хэмжигдэхүүн
$\arg\ z = \varphi$	–	z тооны аргумент
$\overline{z} = a - b\,\mathrm{i}$	–	$z = a + b\,\mathrm{i}$ тоонд харгалзах хосмог хэлбэр

Зарим тусгай хэлбэрийн комплекс тоонууд

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1, \qquad \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$$

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \pm\mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 \pm \mathrm{i})$$

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} \pm \mathrm{i}\right)$$



Декартын хэлбэрээс туйлын хэлбэрт шилжүүлэх

$$a,\ b \text{ өгөгдсөн} \implies r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\varphi \text{ нь } \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r} \text{ тэгшитгэлийн шийд}$$

Туйлын хэлбэрээс декартын хэлбэрт шилжүүлэх

$$r,\ \varphi \quad \text{өгөгдсөн} \quad \implies \quad a = r \cdot \cos\varphi, \qquad b = r \cdot \sin\varphi$$

Үйлдлийн дүрмүүд

$z_k = a_k + b_k\,\mathrm{i} = r_k(\cos\varphi_k + \mathrm{i}\sin\varphi_k) = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}$, $k = 1, 2$ тоонууд өгөгдсөн.

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\,\mathrm{i}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1+\varphi_2)] = r_1r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + (a_2b_1 - a_1b_2)\,\mathrm{i}}{a_2^2 + b_2^2} \qquad (a_2^2 + b_2^2 > 0)$$
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$z^n = a$ тэгшитгэлийн шийд (язгуур гаргах)

Туйлын хэлбэрт бичигдсэн $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ тооны хувьд n язгуурууд нь тооллын эх дээр төвтэй $\sqrt[n]{r}$ радиус бүхий тойрог дээр байрлана

$$z_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k=0,1,\ldots,n-1\,.$$

Эдгээр тоонуудын радиантуудын бодит тэнхлэгтэй үүсгэх өнцөг нь $\boxed{\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$

Нэгж тойргийн хуваагдал

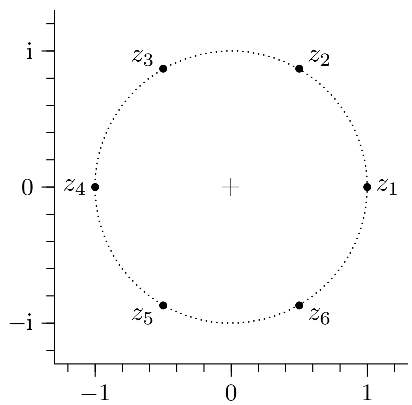
Зураг дээр

$$z^6 = 1$$

тэгшитгэлийн язгуурууд болох

$$z_1 = \mathrm{e}^0, \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, \quad z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},$$
$$z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}, \quad z_5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}, \quad z_6 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}.$$

цэгүүдийн тусламжтайгаар $|z| = 1$ нэгж тойрог 6 сегментэд хуваагдсан байна.



Комбинаторик

Сэлгэмэл

• Өгөгдсөн n элементүүдийн хувьд тэдгээрийн дурын эрэмбэлэлтийг *сэлгэмэл* гэж нэрлэнэ. Хэрэв n элементүүдийн дотор ижил элементүүдийн хэсэг байвал давталттай сэлгэмэл болно. Хэрэв i-р хэсгийн элементүүдийн тоо n_i бол $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$ нөхцөл биелнэ.

	давталтгүй сэлгэмэл	давталттай сэлгэмэл
ялгаатай сэлгэмэлүүдийн тоо	$P_n = n!$	$P_{n_1,\ldots,n_p} = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2! \cdot \ldots \cdot n_p!}$ $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$

1,2,3,4-ийн сэлгэмэлүүд ($n = 4$):

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

$4! = 24$

1,2,3,4-ийн давталттай сэлгэмэлүүд ($n = 4$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$):

1 2 2 3	2 1 2 3	2 2 3 1	3 1 2 2
1 2 3 2	2 1 3 2	2 3 1 2	3 2 1 2
1 3 2 2	2 2 1 3	2 3 2 1	3 2 2 1

$$\frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = 12$$

Гүйлгэмэл

• Өгөгдсөн n ялгаатай элементүүдээс авсан k, $1 \leq k \leq n$ тооны элементүүдийн эрэмбэ харгалзсан сонголтыг *гүйлгэмэл (буцаалтгүй)* гэнэ. Хэрэв элемент бүрээс k хүртэл тоогоор сонгох боломжтой бол *давталттай гүйлгэмэл* гарна.

	буцаалтгүй	буцаалттай
ялгаатай гүйлгэмэлүүдийн тоо	$V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ $1 \leq k \leq n$	$\overline{V}_n^{\,k} = n^k$

1,2,3,4 тоонуудын хувьд 2 элементийн гүйлгэмэл ($n = 4$, $k = 2$):

1 2	2 1	3 1	4 1	
1 3	2 3	3 2	4 2	$\frac{4!}{2!} = 12$
1 4	2 4	3 4	4 3	

1,2,3,4 тоонуудын хувьд 2 элементийн буцаалттай гүйлгэмэл ($n = 4$, $k = 2$):

1 1	2 1	3 1	4 1	
1 2	2 2	3 2	4 2	$4^2 = 16$
1 3	2 3	3 3	4 3	
1 4	2 4	3 4	4 4	

Хэсэглэл

• Өгөгдсөн n ялгаатай элементүүдээс *эрэмбэ тооцохгүйгээр* авсан k, $1 \leq k \leq n$ элементүүдийн сонголтыг *хэсэглэл* гэнэ. Хэрэв элемент бүрийг эрэмбэ тооцохгүйгээр k хүртэл тоогоор сонговол *буцаалттай хэсэглэл* гэж нэрлэнэ.

	буцаалтгүй	буцаалттай
ялгаатай хэсэглэлүүдийн тоо	$C_n^k = \binom{n}{k}$ $1 \leq k \leq n$	$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

1,2,3,4 тоонуудын хувьд 2 элементийн хэсэглэл ($n = 4$, $k = 2$):

1 2	2 3	3 4	
1 3	2 4		$\binom{4}{2} = 6$
1 4			

1,2,3,4 тоонуудын хувьд 2 элементийн буцаалттай хэсэглэл ($n = 4$, $k = 2$):

1 1	2 2	3 3	4 4	
1 2	2 3	3 4		$\binom{4+2-1}{2} = 10$
1 3	2 4			
1 4				

Дараалал болон цуваа

Тоон дараалал

$a : K \to \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ функцийг *(тоон) дараалал* гээд $\{a_n\}$-ээр тэмдэглэе. $K = \mathbb{N}$ үед уг дараалал $a_n = a(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ *гишүүдээс* бүрдэнэ. K олонлогийн төгсгөлөг болон төгсгөлгүй эсэхээс хамаарч *төгсгөлөг* эсвэл *төгсгөлгүй* дараалал гэж нэрлэдэг.

Ойлголтууд

ил дараалал	–	$a_n = a(n)$ дүрмээр өгөгдөнө
рекурсив дараалал	–	$a_{n+1} = a(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$
зааглагдсан дараалал	–	$\exists\ C \in \mathbb{R}$: $\ \lvert a_n\rvert \leq C\ \ \forall n \in K$
өсөх дараалал	–	$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
эрс өсөх дараалал	–	$a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
буурах дараалал	–	$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
эрс буурах дараалал	–	$a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
нийлдэг дараалал (g хязгаар руу)	–	Дурын $\varepsilon > 0$ тооны хувьд $n(\varepsilon)$ дугаар олдоод бүх $n \geq n(\varepsilon)$-ийн хувьд $\lvert a_n - g\rvert < \varepsilon$ нөхцөл биелдэг бол g тоог $\{a_n\}$ дарааллын *хязгаар* гэнэ. Тэмдэглэгээ: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ эсвэл $n \to \infty$ үед $a_n \to g$.
сарнидаг дараалал	–	хязгаар нь оршдоггүй дараалал
төгс сарнидаг дараалал (харгалзан $+\infty$ ба $-\infty$ өргөтгөсөн хязгаар руу)	–	дурын c тооны хувьд $n(c)$ дугаар олдоод бүх $n \geq n(c)$-ийн хувьд $a_n > c$ (харгалзан $a_n < c$) нөхцөл биелдэг дараалал
төгс биш сарнидаг дараалал	–	нийлдэггүй эсвэл төгс сарнидаггүй дараалал
тэг дараалал	–	$g = 0$ рүү тэмүүлдэг дараалал
тэмдэг сөөлжилсөн дараалал	–	гишүүд нь нэмэх, хасах тэмдэг сөөлжлөн авдаг дараалал
арифметик дараалал	–	$a_{n+1} - a_n = d \ \ \forall n \in \mathbb{N},\ d =$ тогтмол
геометр дараалал	–	$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \ \forall n \in \mathbb{N},\ q =$ тогтмол

• Дурын $\varepsilon > 0$ тооны хувьд $\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$ байх дарааллын төгсгөлгүй олон a_n гишүүд олдож байвал a-г $\{a_n\}$ дарааллын *хязгаарын цэг* гэнэ.

Нийлэлтийн теоремууд

• Дараалал нь хамгийн ихдээ 1 хязгаартай байна.
• Монотон дараалал нийлэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь уг дараалал зааглагдсан байх явдал.
• Зааглагдсан дараалал нь дор хаяж нэг хязгаарын цэгтэй.
• Хэрэв a нь $\{a_n\}$ дарааллын хязгаарын цэг бол $\{a_n\}$ дараалал a руу нийлдэг дэд дараалалтай байна.

Нийлэлтийн чанарууд

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ болон $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ байг. Тэгвэл:

$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha a+\beta b$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}, \quad b, b_n \neq 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = \lvert a\rvert$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}, \quad a, a_n \geq 0, \ \ k = 1, 2, \ldots$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) = a$	$A \leq a_n \leq B \implies A \leq a \leq B$

Зарим тусгай дарааллын хязгаарууд

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+\alpha} = 1, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lambda} = 1, \quad \lambda > 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{\lambda}{n}\right)^n = \mathrm{e}^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Функцэн дараалал

Гишүүн бүр нь $D \subset \mathbb{R}$ завсарт тодорхойлогдсон бодит утгатай функц байх $\{f_n\}, \ n \in \mathbb{N}$ дарааллыг *функцэн дараалал* гэнэ. $\{f_n(x)\}$ дараалал хязгаартай байх $x \in D$-ийн бүх утгуудыг функцэн дарааллын *нийлэлтийн муж* гэнэ (энэ мужийг D-тэй давхацна гэж үзнэ).

• $\{f_n\}$ функцэн дарааллын *хязгаар функц* f нь

$\boxed{f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in D}$ гэж тодорхойлогддог.

Жигд нийлэлт

• Дурын $\varepsilon > 0$ бодит тооны хувьд x-ээс үл хамаарах $n(\varepsilon)$ дугаар олдоод $n \geq n(\varepsilon)$ болон $x \in D$ бүрийн хувьд $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ нөхцөл биелж байвал $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ функцэн дарааллыг f хязгаар функц руу D *мужид жигд* нийлж байна гэдэг.

• $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ функцэн дараалал $D \subset \mathbb{R}$ мужид жигд нийлэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь дурын $\varepsilon > 0$ бодит тооны хувьд x-ээс үл хамаарах $n(\varepsilon)$ дугаар олдоод $n \geq n(\varepsilon)$ болон $m \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд

$$\boxed{|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in D}$$ **Кошийн нөхцөл**

нөхцөл биелэх явдал.

Төгсгөлгүй цуваа

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$ *Хэсгийн нийлбэр*:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

• Хэрэв $\{s_n\}$ гэсэн хэсгийн нийлбэрийн дараалал нийлдэг бол $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ төгсгөлгүй цувааг *нийлдэг* гэнэ. $\{s_n\}$ хэсгийн нийлбэрийн дарааллын хязгаар s нь цувааны *нийлбэр* болно (хэрэв оршин байдаг бол):

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

• $\{s_n\}$ хэсгийн нийлбэрийн дараалал сарнидаг бол $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цувааг *сарнидаг* гэнэ.

Тэмдэг сөөлжилсөн цувааны нийлэлтийн шинжүүр

Хэрэв $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ цувааны дараалсан 2 гишүүн нь ялгаатай тэмдэгтэй бол $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ цувааг тэмдэг сөөлжилсөн гэнэ. a_n ерөнхий гишүүний хувьд

$$\boxed{|a_n| \geq |a_{n+1}|, \quad n = 1, 2, \ldots \text{ болон } \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0}$$ **Лебницийн шинжүүр**

нөхцөл биелдэг бол тэмдэг сөөлжилсөн цуваа нийлнэ.

Сөрөг биш гишүүдтэй цувааны нийлэлтийн шинжүүр

a_n сөрөг биш гишүүдтэй цувааны нийлэлтийн зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний $\{s_n\}$ хэсгийн нийлбэрийн дараалал дээрээсээ зааглагдсан байх явдал.

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq a_n \leq b_n,\ n = 1, 2, \ldots \text{ байг.} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ цуваа нийлдэг бол } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ цуваа бас нийлнэ.} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ цуваа сарнидаг бол } \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ цуваа бас сарнина.} \end{array}}$$ **харьцуулалтын шинжүүр**

$0<q<1$ байх $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q,\ n=1,2,\ldots$ эсвэл $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ биелдэг бол $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ цуваа нийлнэ;
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1,\ n=1,2,\ldots$ эсвэл $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ биелдэг бол уг цуваа сарнина.

язгуурын шинжүүр

$0<\lambda<1$ байх $\sqrt[n]{a_n} \le \lambda,\ \ n=1,2,\ldots$ эсвэл $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ нөхцөл биелдэг бол $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ цуваа нийлнэ;
$\sqrt[n]{a_n} \ge 1,\ n=1,2,\ldots$ эсвэл $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ биелдэг бол уг цуваа сарнина.

Кошийн шинжүүр

Дурын гишүүдтэй цуваа

- Хэрэв $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ цуваа нийлдэг бол $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.}$ **нийлэлтийн зайлшгүй нөхцөл**

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ цуваа нийлэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь дурын бодит $\varepsilon > 0$ тооны хувьд $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ дугаар олдоод $n > n(\varepsilon)$ болон $m \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд

$\boxed{|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon}$ биелэх явдал. **Кошийн нөхцөл**

- Хэрэв $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ цуваа нийлдэг бол $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$-г *абсолют нийлдэг* цуваа гэнэ.
- Хэрэв $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ цуваа абсолют нийлдэг бол уг цуваа нийлнэ.

Цувааны хувиргалт

- Цуваанд төгсгөлөг тооны гишүүдийг нэмэх эсвэл хасахад цувааны нийлэлтийн чанар өөрчлөгдөхгүй.
- Нийлдэг цуваануудыг гишүүнчлэн нэмэх, хасах эсвэл тогтмол тоогоор үржүүлэхэд нийлэлт хэвээр хадгалагддаг:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a}$$

- Абсолют нийлдэг цувааны хувьд гишүүдийн байрлалыг (эрэмбийг) дурын байдлаар солиход нийлэлт нь хэвээр хадгалагдахаас гадна нийлбэр нь мөн ижил байна.

Зарим цуваануудын нийлбэр

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\mp\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots=\ln 2$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$$
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\mp\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\mp\ldots+\frac{(-1)^{n}}{2^n}+\ldots=\frac{2}{3}$$
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$
$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\mp\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}$$
$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$$
$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=\mathrm{e}$$
$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\mp\ldots+\frac{(-1)^{n}}{n!}+\ldots=\frac{1}{\mathrm{e}}$$
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1$$
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots=\frac{3}{4}$$

Функцэн болон зэрэгт цуваа

Функцэн цуваа

Ямар нэг төгсгөлгүй цувааны хувьд гишүүд нь функцууд бол *функцэн цуваа гэнэ*:

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \qquad \text{хэсгийн нийлбэр}: \quad s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

• f_k функц бүрийн тодорхойлогдох мужуудын огтлолцлыг функцэн цувааны *тодорхойлогдох муж* гээд D-ээр тэмдэглэе. Ямар нэг $x \in D$-ийн хувьд $\{s_n(x)\}$ хэсгийн нийлбэрийн дараалал $s(x)$ хязгаар руу нийлж байвал энэ цувааг уг цэг дээр *нийлдэг* эсрэг тохиолдолд *сарнидаг* гэнэ. Функцэн цуваа нийлдэг бүх $x \in D$ цэгүүдийг уг цувааны *нийлэлтийн муж* гээд D мужтай адилтгаж үздэг.

• $\{s_n\}$ дарааллын *хязгаар функц* $s\colon D \to \mathbb{R}$ нь

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

гэж тодорхойлогдоно.

• Хэрэв $\{s_n\}$ хэсгийн нийлбэрийн дараалал жигд нийлдэг бол $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ функцэн цуваag D *муж дээр жигд нийлдэг* гэнэ ▶ функцэн дараалал.

Вейерштрассийн харьцуулах шинжүүр

> Хэрэв $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ гэсэн нийлдэг цуваа олдоод $\forall n \in \mathbb{N}$ болон $\forall x \in D$ хувьд $|f_n(x)| \leq a_n$ биелдэг бол $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функцэн цуваа D муж дээр жигд нийлнэ.

• Хэрэв f_n, $n \in \mathbb{N}$ функц бүр x_0 цэг дээр тасралтгүй болон $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функцэн цуваа D муж дээр жигд нийлдэг бол $s(x)$ хязгаар функц нь x_0 цэг дээр тасралтгүй.

Зэрэгт цуваа

Гишүүд нь $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ хэлбэрт бичигдэх функцэн цуваг x_0 цэг дээр *төвтэй зэрэгт цуваа* гэнэ. $x := x-x_0$ хувиргалтаар тэг цэгт төвтэй зэрэгт цуваанд шилжих бөгөөд цаашид энэ хэлбэрийг авч үзэх болно. Зэрэгт цувааны нийлэлтийн муж дээр s функц нь :

$$\boxed{s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$ хэлбэрт бичигдэнэ.

Хэрэв уг зэрэгт цуваа $x \neq 0$ байх x бүрийн хувьд сарнидаггүй эсвэл бүх x-ийн хувьд нийлдэггүй бол *нийлэлтийн радиус* гэж нэрлэгдэх цор ганц $r > 0$ тоо олдоод $|x| < r$ үед зэрэгт цуваа нийлж, $|x| > r$ үед сарнидаг. $|x| = r$ үед нэмэлт шинжилгээ шаардлагатай. (Хэрэв зэрэгт цуваа нь зөвхөн $x = 0$ цэг дээр нийлдэг бол $r = 0$, бүх $x \in \mathbb{R}$-ийн хувьд нийлдэг бол $r = \infty$ гэж үзнэ.)

Нийлэлтийн мужийг тодорхойлох

$b_n = \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ болон $c_n = \sqrt[n]{|a_n|}$ байг. Тэгвэл:

$\{b_n\}$ дараалал нийлнэ	$\Longrightarrow$	$r = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
$\{b_n\}$ дараалал $+\infty$ руу төгс сарнина	$\Longrightarrow$	$r = \infty$
$\{c_n\}$ дараалал тэг рүү нийлнэ	$\Longrightarrow$	$r = \infty$
$\{c_n\}$ дараалал $c \neq 0$ руу нийлнэ	$\Longrightarrow$	$r = \dfrac{1}{c}$
$\{c_n\}$ дараалал $+\infty$ руу төгс сарнина	$\Longrightarrow$	$r = 0$

Зэрэгт цувааны чанарууд ($r > 0$ нийлэлтийн радиус)

• Зэрэгт цуваа $x \in (-r, r)$ цэг бүрийн хувьд абсолют нийлнэ. Уг цуваа нь $I \subset (-r, r)$ битүү завсар бүрт жигд нийлнэ.

• Зэрэгт цувааны нийлбэр $s(x)$ нь $(-r, r)$ завсарт дурын эрэмбийн уламжлалтай. Уламжлалыг гишүүнчлэн дифференциалчлах замаар гаргана.

• $|t| < r$ байх $[0, t]$ болон $[t, 0]$ завсарт зэрэгт цуваа нь мөн гишүүнчлэн интегралчлагдана:

$$\boxed{\begin{array}{l} s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Longrightarrow \\ s'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ болон } \int\limits_0^t s(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{array}}$$

• $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ зэрэгт цуваанууд $(-v, v)$ гэсэн ижил завсарт нийлдэг, мөн ижил нийлбэртэй бол эдгээр цуваанууд нь адилтгал тэнцүү: $a_n = b_n$ $\forall\, n = 0, 1, \ldots$

Тейлорын цуваа

Хэрэв $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ функц нь $x_0 \in D$ цэг дээр хүрэлцээтэй эрэмбийн уламжлалтай бол *Тейлорын* гэж нэрлэгдэх дараах цувааг x_0 цэг дээр тодорхойлж болно:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,\ f^{(0)}(x) = f(x)}$$

Тейлорын цуваа

• Хэрэв f функц x_0 цэгийн U орчинд хүрэлцээтэй эрэмбийн уламжлалтай болон ► Тейлорын томъёоны үлдэгдэл гишүүн нь $x \in U$ бүрийн хувьд тэг рүү нийлдэг бол Тейлорын цуваа нь $r > 0$ гэсэн нийлэлтийн радиустай байхаас гадна $|x - x_0| < r$ байх x бүрийн хувьд:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

Тейлорын задаргаа

задаргаа хүчинтэй.

Зэрэгт цувааны хvснэгт

Нийлэлтийн муж: $|x| \le 1$

функц	зэрэгт цуваа, Тейлорын цуваа
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots \quad (\alpha>0)$
$\sqrt{1+x}$	$1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1\cdot1}{2\cdot4}x^2+\dfrac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\dfrac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\pm\dots$
$\sqrt[3]{1+x}$	$1+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1\cdot2}{3\cdot6}x^2+\dfrac{1\cdot2\cdot5}{3\cdot6\cdot9}x^3-\dfrac{1\cdot2\cdot5\cdot8}{3\cdot6\cdot9\cdot12}x^4\pm\dots$

Нийлэлтийн муж: $|x| < 1$

функц	зэрэгт цуваа, Тейлорын цуваа
$\dfrac{1}{(1+x)^\alpha}$	$1-\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2-\dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}x^3\pm\dots \quad (\alpha>0)$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5\pm\dots$
$\dfrac{1}{(1+x)^2}$	$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5\pm\dots$
$\dfrac{1}{(1+x)^3}$	$1-\dfrac{1}{2}\left(2\cdot3x-3\cdot4x^2+4\cdot5x^3-5\cdot6x^4\pm\dots\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\mp\dots$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$	$1-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1\cdot4}{3\cdot6}x^2-\dfrac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}x^3+\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot10}{3\cdot6\cdot9\cdot12}x^4\mp\dots$
$\arcsin x$	$x+\dfrac{1}{2\cdot3}x^3+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\dots+\dfrac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2n+1)}x^{2n+1}+\dots$
$\arccos x$	$\dfrac{\pi}{2}-x-\dfrac{1}{2\cdot3}x^3-\dots-\dfrac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2n+1)}x^{2n+1}-\dots$
$\arctan x$	$x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7\pm\dots+(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}\pm\dots$

Нийлэлтийн муж: $|x| \leq \infty$

функц	зэрэгт цуваа, Тейлорын цуваа
$\sin x$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \pm \ldots$
$\cos x$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \pm \ldots$
e^x	$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$
a^x	$1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + \ldots$
$\sinh x$	$x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$
$\cosh x$	$1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$

Нийлэлтийн муж: $-1 < x \leq 1$

функц	зэрэгт цуваа, Тейлорын цуваа
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n \pm \ldots$

Фурьегийн цуваа

$$s(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

хэлбэрийн цувааг тригонометрийн буюу Фурьегийн цуваа гэнэ. Өгөгдсөн $f(x)$ функц Фурьегийн цуваанд задрах зайлшгүй нөхцөл нь уг функцийн хувьд үет, ө. х. $f(x+2l) = f(x)$ нөхцөл биелэх явдал. Фурьегийн коэффициентууд гэж нэрлэгдэх a_k, b_k тоонууд нь:

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_k = \frac{1}{l} \int f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{l} \int f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x.$$

Тэгш хэмтэй функцууд

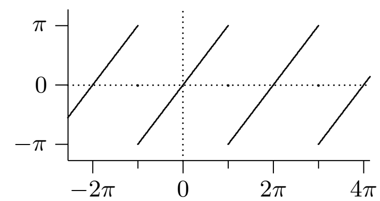
f тэгш функц, ө. х. $f(-x) = f(x) \implies b_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$
f сондгой функц, ө. х. $f(-x) = -f(x) \implies a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Зарим Фурьегийн цувааны хүснэгт

2π урттай завсарт тодорхойлогдсон 2π үетэйгээр үргэлжлэх функцууд.

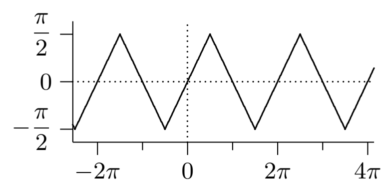
$$y = \begin{cases} x & \text{хэрэв} \quad -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{хэрэв} \quad x = \pi \end{cases}$$

$$= 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \pm \dots\right)$$



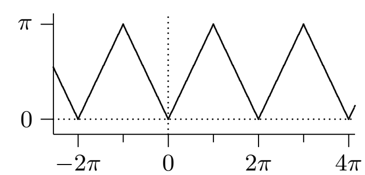
$$y = \begin{cases} x & \text{хэрэв } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{хэрэв } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} \mp \dots\right)$$



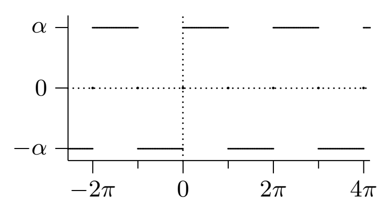
$$y = |x| \text{ хэрэв } -\pi \le x \le \pi$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$



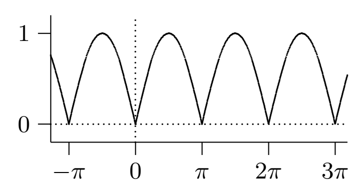
$$y = \begin{cases} -\alpha & \text{хэрэв} \quad -\pi < x < 0 \\ \alpha & \text{хэрэв} \quad 0 < x < \pi \\ 0 & \text{хэрэв} \quad x = 0, \pi \end{cases}$$

$$= \frac{4\alpha}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right)$$



$$y = |\sin x| \text{ хэрэв } -\pi \le x \le \pi$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \dots\right)$$



Санхүүгийн математик

Энгийн хүү

Тэмдэглэгээ

p	–	тухайн хугацаан дахь хүүгийн түвшин (хувиар)
t	–	тухайн хүүгийн түвшинд хамаарах нэгж хугацаа
K_0	–	анхны капитал, өнөөгийн үнэ цэнээр
K_t	–	t хугацаан дахь капиталын хэмжээ
Z_t	–	t хугацаанд олсон энгийн хүү
i	–	хүүгийн түвшин: $i = \frac{p}{100}$
T	–	өдрийн тоо

• Жилээрх хугацаа нь хамгийн их түгээмэл хэрэглэгддэг боловч хагас жил, улирал, сараар илэрхийлэгдсэн хугацааг мөн авч үздэг. Улс бүрт нэг жил эсвэл сард тооцож буй хоногийн тоо харилцан адилгүй байдаг. Ихэнх тохиолдолд, $\dfrac{30}{360}$, $\dfrac{\text{бодит}}{360}$, $\dfrac{\text{бодит}}{\text{бодит}}$ гэсэн томъёоллууд ашиглагдана. 'Бодит' гэдгээр бодит хоногийн тоог тэмдэглэв. Дараах томъёонд T хугацааг 360 хоног байхаар тооцож, нэгж сар нь 30 хоногтой байхаар томъёолов.

Хүүгийн үндсэн томъёололууд

$T = 30 \cdot (m_2 - m_1) + d_2 - d_1$	–	хүү тооцож буй хоногийн тоо; m_1, m_2 – сарууд; d_1, d_2 – өдрүүд
$Z_t = K_0 \cdot \dfrac{p}{100} \cdot t = K_0 \cdot i \cdot t$	–	энгийн хүү
$Z_T = \dfrac{K_0 \cdot i \cdot T}{360} = \dfrac{K_0 \cdot p \cdot T}{100 \cdot 360}$	–	хоногийн энгийн хүү
$K_0 = \dfrac{100 \cdot Z_t}{p \cdot t} = \dfrac{Z_t}{i \cdot t}$	–	капитал ($t = 0$ үе дэх)
$p = \dfrac{100 \cdot Z_t}{K_0 \cdot t}$	–	хүүгийн түвшин (хувиар)
$i = \dfrac{Z_t}{K_0 \cdot t}$	–	хүүгийн түвшин
$t = \dfrac{100 \cdot Z_t}{K_0 \cdot p} = \dfrac{Z_t}{K_0 \cdot i}$	–	хугацаа

t хугацаан дахь капитал

$K_t = K_0(1 + i \cdot t) = K_0 \left(1 + i \cdot \frac{T}{360}\right)$	– t хугацаан дахь капиталын хэмжээ
$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t} = \frac{K_t}{1 + i \cdot \frac{T}{360}}$	– өнөөгийн үнэ цэнэ
$i = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot t} = 360 \cdot \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot T}$	– хүүгийн түвшин
$t = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i}$	– хугацаа
$T = 360 \cdot \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i}$	– хүү төлж буй хоногийн тоо

Хугацааны төлбөр

• Анхны хугацаа $\frac{1}{m}$ урттай m хэсгүүдэд хуваагдсан бөгөөд хэсэг бүрийн эхэнд (тогтмол төлбөр) болон хугацааны эцэст (энгийн төлбөр) төлөгдөх төлбөр r бол хэсэг бүрт капитал нь дараах хэмжээтэй байна:

$$R = r\left(m + \frac{m+1}{2} \cdot i\right) \quad \text{– тогтмол төлбөр}$$

$$R = r\left(m + \frac{m-1}{2} \cdot i\right) \quad \text{– энгийн төлбөр}$$

Тухайлбал $m = 12$ (сарын төлбөр болон жилийн хүү):

$R = r(12 + 6,5i)$ – тогтмол төлбөр; $R = r(12 + 5,5i)$ – энгийн төлбөр

Хүүг тооцоолох бусад аргууд

$t_i = D_i M_i Y_i$ нь i ($i = 1$: эхлэх огноо, $i = 2$: дуусах огноо) хугацаанд хамаарах өдөр, сар, жил болон $t = t_2 - t_1$ нь эхлэхээс дуусах хүртэл хугацаанд хамаарах бодит хоногийн тоог тодорхойлдог байг; T_i нь i 'хугарах' жилийн хоногийн тоо; $i = 365$ эсвэл 366.

арга	томъёо
30/360	$t = [360 \cdot (Y_2 - Y_1) + 30 \cdot (M_2 - M_1) + D_2 - D_1]/360$
бодит/360	$t = (t_2 - t_1)/360$
бодит/бодит	$t = \frac{T_1}{\text{суурь 1}} + Y_2 - Y_1 - 1 + \frac{T_2}{\text{суурь 2}}$ *

* Хэрэв хугацаа нь жилийн дотор бол зөвхөн эхний нэмэгдэхүүн хэрэглэгдэнэ.

Нийлмэл хүү

Хэд хэдэн шилжих хугацааны үед төлж буй хүүгийн төлбөр нь капитал (ихэнхдээ шилжих хугацааны эцэст) болон ашиг дээр нэмэгдэж тооцогдож буй хүүг *нийлмэл хүү* гэнэ.

Тэмдэглэгээ

p	– нэгж хугацаан дахь хүүгийн түвшин (хувиар)
n	– шилжих хугацааны тоо
K_0	– анхны капитал, өнөөгийн үнэ цэнээр
K_n	– n хугацааны дараах капиталын хэмжээ, эцсийн үнэ цэнэ
i	– нэгж шилжих хугацаанд ноогдох (нэрлэсэн) хүүгийн түвшин: $i = \dfrac{p}{100}$
q	– хуримтлалын хүчин зүйл (1 нэгж хугацааны хувьд): $q = 1 + i$
q^n	– хуримтлалын хүчин зүйл (n нэгж хугацааны хувьд)
m	– хугацааны хэсгийн тоо
d	– дискаунт хүчин зүйл
$i_m, \hat{i}_m$	– нэгж m хугацаанд хамаарах хүүгийн түвшин
δ	– хүүгийн эрчим

Үндсэн хүчин зүйлсийг хувиргах хүснэгт

	p	i	q	d	δ
p	p	$100i$	$100(q-1)$	$100\dfrac{d}{1-d}$	$100(\mathrm{e}^{\delta}-1)$
i	$\dfrac{p}{100}$	i	$q-1$	$\dfrac{d}{1-d}$	$\mathrm{e}^{\delta}-1$
q	$1+\dfrac{p}{100}$	$1+i$	q	$\dfrac{1}{1-d}$	e^{δ}
d	$\dfrac{p}{100+p}$	$\dfrac{i}{1+i}$	$\dfrac{q-1}{q}$	d	$1-\mathrm{e}^{-\delta}$
δ	$\ln\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$	$\ln(1+i)$	$\ln q$	$\ln\left(\dfrac{1}{1-d}\right)$	δ

Үндсэн томъёо

$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n$	– нийлмэл хэмжээний томъёо
$K_0 = \dfrac{K_n}{(1+i)^n} = \dfrac{K_n}{q^n}$	– $t = 0$ хугацаан дахь нийлмэл хүүгийн өнөөгийн үнэ цэнэ
$p = 100\left(\sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K_0}} - 1\right)$	– хүүгийн түвшин (хувиар)
$n = \dfrac{\log K_n - \log K_0}{\log q}$	– хугацаа
$n \approx \dfrac{69}{p}$	– капитал 2 дахин өсөх хугацааг тооцоолох ойролцоо томъёо
$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$	– $q_j = \frac{p_j}{100}$ байх $p_j, j=1,\ldots,n$ хүүгийн түвшний өөрчлөлтийг тооцоолсон эцсийн үнэ цэнэ
$p_r = 100\left(\dfrac{1+i}{1+r} - 1\right) \approx 100(i-r)$	– r инфляцийн түвшин дэх бодит хүүгийн түвшин

Хосолмол, хэсэгчилсэн энгийн болон хэсэгчилсэн нийлмэл хүү

$K_t = K_0(1+it_1)(1+i)^N(1+it_2)$	– t хугацааны дараах капитал

• Энд N нь шилжих хугацааны интеграл тоолол бөгөөд t_1, t_2 нь энгийн хүү төлөгдөх шилжих хугацааны хэсгийн уртыг илэрхийлнэ.

• Тооцооллыг хялбарчлах үүднээс санхүүгийн математикт ихэвчлэн, хосолмол хүүгийн томъёоны оронд бүхэл бус зэрэгтэй нийлмэл томъёоллыг ашигладаг, ө. х. $K_t = K_0(1+i)^t$, энд $t = t_1 + N + t_2$.

Хүлээгдэж буй хүү (дискаунт)

Энэ тохиолдолд, хүүгийн түвшин нь **эцсийн** үнэ цэнийн нэг хэсэг болон тодорхойлогдсон болно (► дискаунт хүчин зүйл х. 33).

$d = \dfrac{K_1 - K_0}{K_1} = \dfrac{K_t - K_0}{K_t \cdot t}$	– дискаунтчлагдсан хүүгийн түвшин
$K_n = \dfrac{K_0}{(1-d)^n}$	– эцсийн үнэ цэнэ
$K_0 = K_n(1-d)^n$	– өнөөгийн үнэ цэнэ

Илүү давтагдах нийлмэл хүү

$K_{n,m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}$	–	нэг жилд m удаа шилжүүлсэн хүүгийн n жилийн дараах хэмжээ
$i_m = \frac{i}{m}$	–	нэгж хугацаанд хамаарах хүүгийн түвшин
$\hat{i}_m = \sqrt[m]{1+i} - 1$	–	нэгж хугацаан дахь жишиг хүү
$i_{\text{eff}} = (1 + i_m)^m - 1$	–	жилийн хүүгийн үр ашигтай түвшин
$p_{\text{eff}} = 100 \left[(1 + \dfrac{p}{100m})^m - 1 \right]$	–	жилийн хүүгийн үр ашигтай түвшин (хувиар)

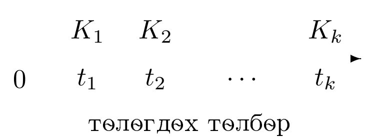
- Нэг жилээс гадна тохирох өөр хугацааг сонгон авч болно.
- Нэгж хугацаан дахь жишиг хүүгийн түвшин болох $\hat{i}_m$-ээр нэг жилд m удаа хүүг нэгтгэх нь i нэрлэсэн хүүгийн түвшинд жилд нэг удаа нэгтгэсэнтэй ижил хэмжээний эцсийн үнэ цэнийг бий болгоно; нэгж хугацаанд хамаарах хүүгийн i_m түвшнээр жилд m удаа хүүг нэгтгэх нь жилд нэг удаа үр ашигтай хүүгийн i_{eff} түвшнээр тооцоолол хийснээс илүү их эцсийн үнэ цэнийг тус тус харуулна.

Тасралтгүй нийлмэл хүү

$K_{n,\infty} = K_0 \cdot \mathrm{e}^{i \cdot n}$	–	тасралтгүй нийлмэл хүүтэй үеийн too хэмжээ
$\delta = \ln(1+i)$	–	хүүгийн эрчим (i хүүгийн түвшинтэй тэнцүү)
$i = \mathrm{e}^{\delta} - 1$	–	нэрлэсэн хүү (δ эрчимтэй)

Төлбөр төлөгдөх дундаж хугацаа

Асуулт: $K_1 + K_2 + \ldots + K_k$-тэй тэнцэх нийт өр төлбөр нь ямар t_m хугацаанд төлөгдөх вэ?



энгийн хүү:

$$t_m = \frac{K_1 + K_2 + \ldots + K_k - K_0}{i}, \quad \text{энд} \quad K_0 = \frac{K_1}{1+it_1} + \ldots + \frac{K_k}{1+it_k}$$

нийлмэл хүү:

$$t_m = \frac{\ln(K_1 + \ldots + K_k) - \ln K_0}{\ln q}, \quad \text{энд} \quad K_0 = \frac{K_1}{q^{t_1}} + \ldots + \frac{K_k}{q^{t_k}}$$

тасралтгүй нийлмэл хүү:

$$t_m = \frac{\ln(K_1 + \ldots + K_k) - \ln K_0}{\delta}, \quad \text{энд} \quad K_0 = K_1 \mathrm{e}^{-\delta t_1} + \ldots + K_k \mathrm{e}^{-\delta t_k}$$

Тогтмол төлбөр

Тэмдэглэгээ

p	–	хүүгийн түвшин
n	–	төлбөр хийгдэх хугацааны интервал эсвэл түрээслэх хугацаа
R	–	нэгж хугацаанд ноогдох түрээс буюу нэгж төлбөрийн хэмжээ
q	–	хуримтлалын хүчин зүйл: $q = 1 + \frac{p}{100}$

Үндсэн томъёо

Нөхцөл: Шилжих болон түрээсийн хугацаа нь хоорондоо ижил байна.

$F_n^{\text{due}} = R \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	–	тогтмол төлбөрийн хэмжээ, эцсийн үр дүн
$P_n^{\text{due}} = \dfrac{R}{q^{n-1}} \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	–	тогтмол төлбөрийн өнөөгийн үнэ цэнэ
$F_n^{\text{ord}} = R \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	–	энгийн төлбөрийн хэмжээ, эцсийн үнэ цэнээр
$P_n^{\text{ord}} = \dfrac{R}{q^n} \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	–	энгийн төлбөрийн өнөөгийн үнэ цэнэ
$P_\infty^{\text{due}} = \dfrac{Rq}{q - 1}$	–	ирээдүйн тогтмол мөнгөний өнөөгийн үнэ цэнэ, хугацааны эхэнд хийгдэх төлбөр
$P_\infty^{\text{ord}} = \dfrac{R}{q - 1}$	–	ирээдүйн тогтмол мөнгөний өнөөгийн үнэ цэнэ, хүүгийн түвшин нь төлөгдсөн хэмжээгээр
$n = \dfrac{1}{\log q} \cdot \log\left(F_n^{\text{ord}} \cdot \dfrac{q-1}{R} + 1\right) = \dfrac{1}{\log q} \cdot \log \dfrac{R}{R - P_n^{\text{ord}}(q-1)}$	–	хугацаа

Нэгж хугацаан дахь 1-ийн үнэ цэнийг тайлбарлах хүчин зүйлс

	тогтмол	энгийн
нэгж хугацаан дахь 1-ийн үнэ цэнэ	$\ddot{s}_{\overline{n}\rceil} = q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	$s_{\overline{n}\rceil} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$
нэгж хугацаан дахь 1-ийн өнөөгийн үнэ цэнэ	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil} = \dfrac{q^n - 1}{q^{n-1}(q - 1)}$	$a_{\overline{n}\rceil} = \dfrac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$

Шилжих хугацаа > түрээсийн хугацаа

Хэрэв нэгж хугацааны m төлбөр нь нэгж шилжих хугацаанд хийгддэг бол дээрх томъёон дахь R төлбөр нь харгалзан $R = r\left(m + \frac{m+1}{2} \cdot i\right)$ (тогтмол төлбөр) болон $R = r\left(m + \frac{m-1}{2} \cdot i\right)$ (энгийн төлбөр) болох юм. Эдгээр R хувь хэмжээнүүд нь шилжих хугацааны эцэст яригддаг тул энгийн төлбөрт хамаарагдах томъёололыг ашиглах шаардлагатай болдог.

Үндсэн тоо хэмжээ

$a_{\overline{n}\rvert}$	–	нэгж хугацаан дахь 1-ийн өнөөгийн үнэ цэнэ (энгийн төлбөр)
$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}$	–	нэгж хугацаан дахь 1-ийн өнөөгийн үнэ цэнэ (тогтмол төлбөр)
$s_{\overline{n}\rvert}$	–	нэгж хугацаан дахь 1-ийн эцсийн үнэ цэнэ (энгийн төлбөр)
$\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}$	–	нэгж хугацаан дахь 1-ийн эцсийн үнэ цэнэ (тогтмол төлбөр)
$a_{\overline{\infty}\rvert}$	–	нэгж хугацаан дахь 1-ийн өнөөгийн үнэ цэнэ (ирээдүйн тогтмол мөнгөний өнөөгийн үнэ цэнэ, хугацааны эхэнд хийгдэх төлбөр)
$\ddot{a}_{\overline{\infty}\rvert}$	–	нэгж хугацаан дахь 1-ийн өнөөгийн үнэ цэнэ (ирээдүйн тогтмол мөнгөний өнөөгийн үнэ цэнэ, хүү төлөгдсөнөөр)

Тоо хэмжээний болон өнөөгийн үнэ цэнийн хүчин зүйлс

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}\rvert} &= \frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots+\frac{1}{q^n} &&= \frac{q^n-1}{q^n(q-1)}\\
\ddot{a}_{\overline{n}\rvert} &= 1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{n-1}} &&= \frac{q^n-1}{q^{n-1}(q-1)}\\
s_{\overline{n}\rvert} &= 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} &&= \frac{q^n-1}{q-1}\\
\ddot{s}_{\overline{n}\rvert} &= q+q^2+q^3+\ldots+q^n &&= q\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\\
a_{\overline{\infty}\rvert} &= \frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots &&= \frac{1}{q-1}\\
\ddot{a}_{\overline{\infty}\rvert} &= 1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots &&= \frac{q}{q-1}
\end{aligned}
$$

Шилжих хүснэгт

	$a_{\overline{n}\rvert}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}$	q^n
$a_{\overline{n}\rvert}$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$\frac{\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}}{q}$	$\frac{s_{\overline{n}\rvert}}{1+is_{\overline{n}\rvert}}$	$\frac{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}{q(1+d\ddot{s}_{\overline{n}\rvert})}$	$\frac{q^n-1}{q^n i}$
$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}$	$qa_{\overline{n}\rvert}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}$	$\frac{qs_{\overline{n}\rvert}}{1+is_{\overline{n}\rvert}}$	$\frac{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}{1+d\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}$	$\frac{q^n-1}{q^n d}$
$s_{\overline{n}\rvert}$	$\frac{a_{\overline{n}\rvert}}{1-ia_{\overline{n}\rvert}}$	$\frac{\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}}{q(1-d\ddot{a}_{\overline{n}\rvert})}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$\frac{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}{q}$	$\frac{q^n-1}{i}$
$\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}$	$\frac{qa_{\overline{n}\rvert}}{1-ia_{\overline{n}\rvert}}$	$\frac{\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}}{1-d\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}}$	$qs_{\overline{n}\rvert}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}$	$\frac{q^n-1}{d}$
q^n	$\frac{1}{1-ia_{\overline{n}\rvert}}$	$\frac{1}{1-d\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}}$	$1+is_{\overline{n}\rvert}$	$1+d\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}$	q^n

Динамик тогтмол төлбөр

Арифметикаар өсч буй динамик тогтмол төлбөр

Мөнгөн урсгал (δ хүчин зүйлээр R төлбөртэй пропорцоор өсч буй):

R	$R(1+\delta)$		$R(1+(n-1)\delta)$	
0	1	$\cdots$	$n-1$	n

	R	$R(1+\delta)$		$R(1+(n-1)\delta)$
0	1	2	$\cdots$	n

$$F_n^{\text{due}} = \frac{Rq}{q-1}\left[q^n - 1 + \delta\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right)\right]$$

$$P_n^{\text{due}} = \frac{R}{q^{n-1}(q-1)}\left[q^n - 1 + \delta\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right)\right]$$

$$F_n^{\text{ord}} = \frac{R}{q-1}\left[q^n - 1 + \delta\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right)\right]$$

$$P_n^{\text{ord}} = \frac{R}{q^{n}(q-1)}\left[q^n - 1 + \delta\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right)\right]$$

$$P_\infty^{\text{due}} = \frac{Rq}{q-1}\left(1 + \frac{\delta}{q-1}\right), \qquad P_\infty^{\text{ord}} = \frac{R}{q-1}\left(1 + \frac{\delta}{q-1}\right)$$

Геометрээр өсч буй динамик тогтмол төлбөр

R	Rb	Rb^2		Rb^{n-1}	
0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n

	R	Rb		Rb^{n-1}
0	1	2	$\cdots$	n

Өсөлтийн түвшин s-ээр тайлбарлагдах тогтмол $b = 1 + \frac{s}{100}$ хүчин зүйл

$$F_n^{\text{due}} = Rq \cdot \frac{q^n - b^n}{q-b}, \quad b \neq q; \qquad F_n^{\text{due}} = Rnq^n, \quad b = q$$

$$P_n^{\text{due}} = \frac{R}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - b^n}{q-b}, \quad b \neq q; \qquad P_n^{\text{due}} = Rn, \quad b = q$$

$$F_n^{\text{ord}} = R \cdot \frac{q^n - b^n}{q-b}, \quad b \neq q; \qquad F_n^{\text{ord}} = Rnq^{n-1}, \quad b = q$$

$$P_n^{\text{ord}} = \frac{R}{q^n} \cdot \frac{q^n - b^n}{q-b}, \quad b \neq q; \qquad P_n^{\text{ord}} = \frac{Rn}{q}, \quad b = q$$

$$P_\infty^{\text{due}} = \frac{Rq}{q-b}, \quad b < q; \qquad P_\infty^{\text{ord}} = \frac{R}{q-b}, \quad b < q$$

Төлбөрийн хөнгөлөлтийн тооцоолол

Тэмдэглэгээ

p	–	хүүгийн түвшин (хувиар)
n	–	дахин төлбөр хийгдэх хугацааны тоо
i	–	хүүгийн түвшин: $i = \frac{p}{100}$
q	–	хуримтлалын хүчин зүйл: $q = 1 + i$
S_0	–	зээл, анхны өр төлбөр
S_k	–	k хугацааны дараах өр төлбөр
T_k	–	k-р хугацааны өр төлбөр
Z_k	–	k-р хугацааны хүүгийн төлбөр
A_k	–	k-р хугацааны нийт төлбөр

Төлбөрийн хөнгөлөлтийн төрөл

• *Тогтмол үндсэн төлбөр*: тогтмол дахин төлбөр: $T_k = T = \dfrac{S_0}{n}$, хүү буурах

• *Тогтмол төлбөр*: нийт тогтмол төлбөр: $A_k = A =$ тогтмол, хүү буурах, төлбөр нэмэгдэх

• *Буцаан төлөгдөх хугацааны эцэс дэх өрийн хөнгөлөлт*: $A_k = S_0 \cdot i$, $k = 1, \ldots, n-1$; $\quad A_n = S_0 \cdot (1+i)$

• *Хөнгөлөлтийн хуваарьт* холбогдох бүх хүү, үндсэн өр, нийт төлбөр, нэмэгдүүлсэн хүү зэрэг нь нэг хүснэгтэд нэгтгэгдсэн байдаг.

Нийт төлбөрийн үндсэн томъёо

$A_k = T_k + Z_k$	–	үндсэн төлбөр болон хүүгээс бүрдэх нийт төлбөр (тогтмол төлбөр)

Тогтмол үндсэн төлбөр (шилжих хугацаа=төлбөр хийх хугацаа)

$T_k = \dfrac{S_0}{n}$	–	k-р үеийн үндсэн төлбөр
$Z_k = S_0 \cdot \left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right) i$	–	k-р үеийн хүү
$A_k = \dfrac{S_0}{n}\left[1 - (n-k+1)i\right]$	–	k-р үеийн нийт төлбөр
$S_k = S_0 \cdot \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)$	–	k-р үеийн нэмэгдүүлсэн төлбөр
$P = \dfrac{S_0 i}{n}\left[(n+1)a_{\overline{n}\rvert} - \dfrac{1}{q^n}\left(q\dfrac{q^n-1}{(q-1)^2} - \dfrac{n}{q-1}\right)\right]$	–	нийт хүүгийн төлбөрийн өнөөгийн үнэ цэнэ

Тогтмол төлбөр (шилжих хугацаа=төлбөр хийх хугацаа)

$A = S_0 \cdot \dfrac{q^n(q-1)}{q^n-1}$	–	(нийт) төлбөр, тогтмол төлбөр
$S_0 = \dfrac{A(q^n-1)}{q^n(q-1)}$	–	анхны өр төлбөр
$T_k = T_1 q^{k-1} = (A - S_0 \cdot i)q^{k-1}$	–	үндсэн өр, дахин төлбөр
$S_k = S_0 q^k - A\dfrac{q^k-1}{q-1} = S_0 - T_1\dfrac{q^k-1}{q-1}$	–	нэмэгдүүлсэн төлбөр
$Z_k = S_0 i - T_1(q^{k-1}-1) = A - T_1 q^{k-1}$	–	хүү
$n = \dfrac{1}{\log q}\big[\log A - \log(A - S_0 i)\big]$	–	буцаан төлөх хугацааны урт

Өргөн ашиглагддаг төлбөрүүд

m хугацаа бүрт тогтмол $A^{(m)}$ төлбөр хийгддэг.

$A^{(m)} = \dfrac{A}{m + \frac{m-1}{2}i}$	–	нэгж хугацааны эцэст хийгдэх төлбөр
$A^{(m)} = \dfrac{A}{m + \frac{m+1}{2}i}$	–	нэгж хугацааны эхэнд хийгдэх төлбөр
Тухайлбал: жилийг сард шилжүүлэн тооцох төлбөр ($m = 12$)		
$A_{\text{mon}} = \dfrac{A}{12 + 5,5i}$	–	сар бүрийн эцэст хийх төлбөр
$A_{\text{mon}} = \dfrac{A}{12 + 6,5i}$	–	сар бүрийн эхэнд хийх төлбөр

Хэлбэлзэлтэй хорогдуулалт

Үндсэн төлбөр болох T_k-д α хувийн нэмэлт хэлбэлзэл (урамшуулал төлбөр) тооцсоноор $\hat{T}_k = T_k \cdot \left(1 + \dfrac{\alpha}{100}\right) = T_k \cdot f_\alpha$-г гарган авах юм. Урамшууллыг тооцсон тогтмол төлбөрийн хэлбэлзэлтэй хорогдуулалт $S_\alpha = S_0 \cdot f_\alpha$ (*хуурамч өр*), $i_\alpha = \dfrac{i}{f_\alpha}$ (*хуурмаг хүүгийн түвшин*) болон $q_\alpha = 1 + i_\alpha$ нь дээрх томъёогоор тооцоологдоно.

Үнийн тооцоолол

Тэмдэглэгээ

P	–	үнэ (хувиар)
K_{nom}	–	нэрлэсэн капитал буюу үнэ цэнэ
K_{real}	–	бодит капитал, зах зээлийн үнэ
n	–	(үлдэж буй) хугацаа, буцаан төлөх хугацаа
p, p_{eff}	–	хүүгийн нэрлэсэн (үр ашигтай) түвшин
$b_{n,\text{nom}}$; $b_{n,\text{real}}$	–	нэгж хугацаан дахь 1-ийн үнэ цэнэ (энгийн төлбөр)
$a = C - 100$	–	нэрлэсэн үнээс дээшхи хэлбэлзэл
$d = 100 - C$	–	нэрлэсэн үнээс доошхи хэлбэлзэл
R	–	буцаан төлөгдөх хугацааны эцэс дэх ашиг
$q_{\text{eff}} = 1 + \frac{p_{\text{eff}}}{100}$	–	хуримтлалын хүчин зүйл (үр ашигтай хүүгийн түвшин)

Үнийн томъёо

$P = 100 \cdot \dfrac{K_{\text{real}}}{K_{\text{nom}}}$	–	нэрлэсэн болон бодит капиталаар илэрхийлэгдсэн үнэ
$P = 100 \cdot \dfrac{b_{n,\text{real}}}{b_{n,\text{nom}}} = 100 \cdot \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{q_{\text{eff}}^k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k}}$	–	тогтмол төлбөрөөр төлөгдөж буй өр төлбөрийн үнэ
$P = \dfrac{100}{n}\left[n \cdot \dfrac{p}{p_{\text{eff}}} + b_{n,\text{real}}\left(1 - \dfrac{p}{p_{\text{eff}}}\right)\right]$	–	тогтмол үндсэн төлбөрийг төлж буй өр төлбөрийн үнэ
$P = \dfrac{1}{q_{\text{eff}}^n} \cdot \left(p \cdot \dfrac{q_{\text{eff}}^n - 1}{q_{\text{eff}} - 1} + R\right)$	–	буцаан төлөгдөх хугацааны эцэст төлөх өрийн үнэ
$P = p \cdot (p_{\text{eff}})^{-1}$	–	ирээдүйн тогтмол мөнгөний өнөөгийн үнэ цэнийн үнэ
$p_s = \dfrac{100}{C}\left(p - \dfrac{a}{n}\right) = \dfrac{100}{C}\left(p + \dfrac{d}{n}\right)$	–	дуусгавар болох хугацааны энгийн орлого;

= буцаан төлөгдөх хугацааны эцэст төлөх өрийн ойролцоох үр ашигтай хүүгийн түвшин

• Үнэт цаас, хувьцаа зэрэг нь зах зээл дээр үнээр илэрхийлэгдсэн байдаг. C гэсэн өгөгдсөн үнийн хувьд үр ашигтай хүүгийн түвшин нь дээрх тэгшитгэлээс дээд эрэмбийн олон хувьсагчтай тэгшитгэл гаргах замаар тооцоологдоно. (► х. 44).

Хөрөнгө оруулалтын шинжилгээ

Олон үет хугацааны капиталыг төсөвлөх техник нь (дискаунтчлагдсан мөнгөн урсгалын аргууд) хөрөнгө оруулалтын ашигт ажиллагааг тооцоолох арга болдог. Хамгийн түгээмэл аргууд нь *капиталын үнэлгээний* арга, *орлогын дотоод түвшний* арга, *тогтмол төлбөрийн* арга зэрэг юм. Ирээдүйн орлого болон зардлууд нь прогнозлосон үнэлгээнүүд байдаг.

Тэмдэглэгээ

I_i	–	i агшин дахь орлого
E_i	–	i агшин дахь зардал болон хөрөнгө оруулалт
C_i	–	i агшин дахь цэвэр ашиг, мөнгөн урсгал: $C_i = I_i - E_i$
K_I	–	ашгийн өнөөгийн үнэ цэнэ
K_E	–	зардлын өнөөгийн үнэ цэнэ
C	–	цэвэр өнөөгийн үнэ цэнэ, хөрөнгө оруулалтын капитал үнэ цэнэ
n	–	хугацааны тоо
p	–	хүүгийн түвшний хүлээн зөвшөөрөгдөх доод хувь хэмжээ
q	–	элэгдлийн хүчин зүйл: $q = 1 + \frac{p}{100}$

Хөрөнгийн үнэлгээний арга

$K_I = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{I_i}{q^i}$	–	ашгийн өнөөгийн үнэ цэнэ; ирээдүйн ашгийн нийт өнөөгийн үнэ цэнэ
$K_E = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{E_i}{q^i}$	–	зардлын өнөөгийн үнэ цэнэ; ирээдүйн зардлын нийт өнөөгийн үнэ цэнэ
$C = K_I - K_E = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{C_i}{q^i}$	–	цэвэр ашгийн капитал үнэ цэнэ, цэвэр өнөөгийн үнэ цэнэ

• $C = 0$ үед хөрөнгө оруулалт нь p хүүгийн түвшинд хийгдэнэ, $C > 0$ үед өгөөж нь илүү өндөр байна. Хэрэв хөрөнгө оруулалтын өөр хэд хэдэн боломжит хувилбар байвал тэдгээрээс хамгийн өндөр өнөөгийн үнэ цэнэтэйг нь сонгоно.

Орлогын дотоод түвшний арга

Орлогын дотоод түвшин нь хөрөнгө оруулалтын өнөөгийн цэвэр үнэ цэнэ нь тэгтэй тэнцүү байх тоо хэмжээ юм. Хэрэв хэд хэдэн хөрөнгө оруулалтын сонголт байгаа бол тэдгээрээс хамгийн өндөр орлогын дотоод түвшинтэйг нь сонгоно.

Тогтмол төлбөрийн арга

$F_A = \dfrac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$	–	тогтмол төлбөрийн хүчин зүйл
$A_I = K_I \cdot F_A$	–	ашгийн тогтмол төлбөр
$A = K_E \cdot F_A$	–	зардлын тогтмол төлбөр
$A_P = A_I - A$	–	цэвэр тогтмол төлбөр

• $A_I = A$ үед хөрөнгө оруулалтын өгөөж нь p-тэй тэнцүү, харин $A_I > A$ үед хөрөнгө оруулалтын өгөөж нь p-ээс илүү байна.

Элэгдэл хорогдол

Элэгдэл хорогдол нь тоног төхөөрөмж, барааны үнийн бууралтыг тодорхойлно. Анхны үнэ (өртөг, бүтээх зардал) болон элэгдэл хорогдлын хоорондын ялгаа нь *бүртгэлийн үнэлгээгээр* илэрхийлэгддэг.

n	–	хэрэглэсэн хугацаа
A	–	анхны үнэ
w_k	–	k-р жилийн элэгдэл хорогдол
R_k	–	k жилийн дараах бүртгэлийн үнэ (R_n – үлдэгдэл, эцсийн үнэ)

Шугаман (шулуун шугаман) элэгдэл хорогдол

$w_k = w = \dfrac{A - R_n}{n}$	–	жилийн элэгдэл хорогдол
$R_k = A - k \cdot w$	–	k жилийн дараах бүртгэлийн үнэ

Арифметикаар буурах элэгдэл хорогдол (жилд d хэмжээгээр буурах)

$w_k = w_1 - (k-1) \cdot d$	–	k-р жилийн элэгдэл хорогдол
$d = 2 \cdot \dfrac{nw_1 - (A - R_n)}{n(n-1)}$	–	бууралтын хэмжээ
Жилүүдийн нийлбэр (тусгай хэлбэр): $w_n = d$		
$w_k = (n-k+1) \cdot d$	–	k-р жилийн элэгдэл хорогдол
$d = \dfrac{2 \cdot (A - R_n)}{n(n+1)}$	–	бууралтын хэмжээ

Геометрээр буурах элэгдэл хорогдол (жилд өмнөх жилийн бүртгэлийн үнээс s хувиар буурах)

$R_k = A \cdot \left(1 - \frac{s}{100}\right)^k$	–	k жилийн дараах бүртгэлийн үнэ
$s = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[n]{\frac{R_n}{A}}\right)$	–	элэгдэл хорогдлын түвшин
$w_k = A \cdot \frac{s}{100} \cdot \left(1 - \frac{s}{100}\right)^{k-1}$	–	k-р жилийн элэгдэл хорогдол

Шугаман бусаас шугаман жилийн элэгдэл хорогдолд шилжүүлэх нь

$R_n = 0$ таамаглал биелэгдэж байх үед геометр прогрессийг $\lceil k \rceil$ жил хүртэл $(k = n + 1 - \frac{100}{s})$ бичээд үүний дараа шугаман прогрессийг бичнэ.

Тэгийг тодорхойлох тоон арга

Зорилго: Тасралтгүй функц $f(x)$-ийн утгыг тэг болгох x^*-г олох. Итерацийн процессийг зогсоох нарийвчлалыг ε-ээр тэмдэглэе.

Утгын хүснэгт

x-ийн сонгосон утганд функцийн утга $f(x)$-ийг олно. Функцийн график дээрээс функцийн утга тэгтэй тэнцүү байх байрлалыг ойролцоогоор тодорхойлно.

Интервалыг таллан хуваах арга

Өгөгдсөн x_L ба x_R -ийн хувьд $f(x_L) < 0$ болон $f(x_R) > 0$ байг.

1. $x_M = \frac{1}{2}(x_L + x_R)$ болон $f(x_M)$-г олох.
2. Хэрэв $|f(x_M)| < \varepsilon$ бол итерацийг зогсоож x^*-ийн ойролцоо утгаар x_M-ийг авна.
3. Хэрэв $f(x_M) < 0$ бол $x_L := x_M$ (x_R өөрчлөгдөхгүй), $f(x_M) > 0$ бол $x_R := x_M$ (x_L өөрчлөгдөхгүй). 1-р алхамд шилжих.

Хуурамч байрлалын арга (шугаман интерполяци)

Өгөгдсөн x_L ба x_R-ийн хувьд $f(x_L) < 0$ болон $f(x_R) > 0$ байг.

1. $x_S = x_L - \dfrac{x_R - x_L}{f(x_R) - f(x_L)} f(x_L)$ болон $f(x_S)$-г олох.
2. Хэрэв $|f(x_S)| < \varepsilon$ бол итерацийг зогсооно. x^*-ийн ойролцоо утга нь x_S болно.
3. Хэрэв $f(x_S) < 0$ бол $x_L := x_S$ (x_R өөрчлөгдөхгүй), $f(x_M) > 0$ бол $x_R := x_S$ (x_L өөрчлөгдөхгүй). 1-р алхам руу шилжих.

• $f(x_L) > 0$, $f(x_R) < 0$ үед дээрх аргыг мөн хэрэглэж болно.

Ньютоны арга

$x_0 \in U(x^*)$ цэг өгөгдсөн бөгөөд f функц дифференциалчлагддаг байг.

1. $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$-г олох.
2. Хэрэв $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$ бол итерацийг зогсооно. x^*-ийн ойролцоо утга нь x_{k+1} болно.
3. $k := k+1$ гэж үзээд 1-р алхам руу шилжих.

• Хэрэв зарим k-ийн хувьд $f'(x_k) = 0$ бол итерацийг өөр анхны x_0 цэгээс дахин эхлүүлнэ.

• $|x_L - x_R| < \varepsilon$ эсвэл $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ шинжүүрээр итерацийг мөн зогсоож болно.

Тэмдэг үл хайхрах дүрэм. *$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ олон гишүүнтийн эерэг язгууруудын тоо нь w эсвэл $w-2$, $w-4$ байна. Үүнд w нь a_k коэффициентуудын тэмдгээ ээлжлэн сольсон тоо (тэгийг оруулахгүй).*

Нэг хувьсагчийн функц

Үндсэн ойлголтууд

$D_f \subset \mathbb{R}$ мужийн x элемент бүрт цор ганц $y \in \mathbb{R}$ тоо харгалзуулдаг $y = f(x)$ буулгалтыг $x \in \mathbb{R}$ хувьсагчийн f бодит функц гэнэ.
Тэмдэглэгээ : $f : D_f \to \mathbb{R}$.

утгын муж	–	$W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x)$ байх $\exists\, x \in D_f\}$
харилцан нэг утгатай функц	–	$y \in W_f$ элемент бүрийн хувьд $y = f(x)$ байх цор ганц $x \in D_f$ тоо олдоно
урвуу функц	–	хэрэв f нь харилцан нэг утгатай функц бол $y = f(x)$ байх $y \to x$ буулгалт нь мөн харилцан нэг утгатай бөгөөд f-ийн урвуу функц гэж нэрлэгддэг. Тэмдэглэгээ: $f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$

Өсөх, тэгш хэмт болон үет чанар

өсөх функц	–	$f(x_1) \le f(x_2)\ \ \forall\, x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2$
буурах функц	–	$f(x_1) \ge f(x_2)\ \ \forall\, x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2$
эрс өсөх функц	–	$f(x_1) < f(x_2)\ \ \forall\, x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2$
эрс буурах функц	–	$f(x_1) > f(x_2)\ \ \forall\, x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2$
тэгш функц	–	$f(-x) = f(x)\ \ \forall\ x \in (-a, a) \cap D_f,\ a > 0$
сондгой функц	–	$f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \in (-a, a) \cap D_f, a > 0$
үет функц (p үетэй)	–	$f(x + p) = f(x)\ \ \forall x, x + p \in D_f$

• x^* цэгийн ε орчин ($=$ x^* цэгээс ε-аас бага зайд орших бүх цэгүүдийн олонлог) : $U_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x^*| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$

Зааглагдах чанар

дээрээсээ зааглагдсан функц	–	$\exists\, K : f(x) \le K\ \ \forall\, x \in D_f$
доороосоо зааглагдсан функц	–	$\exists\, K : f(x) \ge K\ \ \forall\, x \in D_f$
зааглагдсан функц	–	$\exists\, K : |f(x)| \le K\ \ \forall\, x \in D_f$

Экстремумын чанарууд

супремум	– дээд торгон хил (хамгийн бага дээд хил K); $\sup\limits_{x\in D_f} f(x)$
инфимум	– доод торгон хил (хамгийн их доод хил K); $\inf\limits_{x\in D_f} f(x)$
глобаль максимумын цэг	– $f(x^*) \geq f(x)$ $\forall x \in D_f$ байх $x^* \in D_f$ цэг
глобаль максимум	– $f(x^*) = \max\limits_{x\in D_f} f(x)$
локаль максимумын цэг	– $f(x^*) \geq f(x)$ $\forall x \in D_f \cap U_\varepsilon(x^*)$ байх $x^* \in D_f$ цэг
глобаль минимумын цэг	– $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in D_f$ байх $x^* \in D_f$ цэг
глобаль минимум	– $f(x^*) = \min\limits_{x\in D_f} f(x)$
локаль минимумын цэг	– $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in D_f \cap U_\varepsilon(x^*)$ байх $x^* \in D_f$ цэг

Муруйлтын чанарууд

гүдгэр функц	–	$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$
эрс гүдгэр функц	–	$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$
хотгор функц	–	$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$
эрс хотгор функц	–	$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

• Эдгээр тэнцэтгэл бишүүд дурын $x_1, x_2 \in D_f$ болон $\lambda \in (0,1)$ тоо бүрийн хувьд үнэн байна. Гүдгэр, хотгор чанарууд нь $\lambda = 0$ болон $\lambda = 1$ үед мөн хүчинтэй.

Бодит функцийн дүрслэл

тэг (язгуур)	–	$f(x_0) = 0$ биелэх $x_0 \in D_f$ тоо
функцийн график	–	f функцийн хувьд тэгш өнцөгт координатын системийн тусламжтайгаар $\mathbb{R}^2$ хавтгай дээр $(x, y) = (x, f(x))$ эрэмбэлэгдсэн хосууд дүрслэх
тэгш өнцөгт координатын систем	–	хэмжээсээр хуваагдсан, өөр хоорондоо ортогонал тэнхлэгүүдээс бүрдэх хавтгайн координатын систем; тэнхлэгүүдийг x, y-ээр ихэвчлэн тэмдэглээд хэвтээ *(абсцисс)* болон босоо *(ординат)* тэнхлэг гэж нэрлэнэ

Шугаман функц

$a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ байг.

шугаман функц	–	$y = f(x) = ax$
аффин шугаман функц	–	$y = f(x) = ax + b$

y $y = ax + b$

a $y = ax$

b

a

$-\frac{b}{a}$ 0 1 x

Шугаман функцийн чанарууд

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$	$f(\lambda x) = \lambda f(x)$	$f(0) = 0$

Аффин шугаман функцийн чанарууд

$\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a$	$f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0, \ \ a \neq 0$	$f(0) = b$

• Аффин шугаман функцийг ихэвчлэн шугаман функцтэй адилтгаж үздэг.
• Жигд хэмжээсээр хуваагдсан x, y тэнхлэгүүд бүхий координатын системд шугаман функцийн график нь шулуун шугам байна.

Квадрат функц $y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

y

Дискриминант: $\boxed{D = p^2 - 4q}$

энд $p = \dfrac{b}{a}, \ \ q = \dfrac{c}{a}$

$D = 0$

$D < 0$

$D > 0$

x_1 $-\frac{p}{2}$ x_2 x

Язгуурууд

$D > 0:$	$x_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{D}\right)$	2 бодит шийдтэй
$D = 0:$	$x_1 = x_2 = -\dfrac{p}{2}$	давхацсан 2 бодит шийдтэй
$D < 0:$		бодит шийдгүй

Экстремумын цэгүүд

$a > 0:$	минимумын цэгтэй	$x_{\min} = -\dfrac{p}{2}$
$a < 0:$	максимумын цэгтэй	$x_{\max} = -\dfrac{p}{2}$

• $a > 0$ (харгалзан $a < 0$) үед f функц нь эрс гүдгэр (хотгор) байхаас гадна f-ийн график нь $\left(-\dfrac{p}{2}, -\dfrac{aD}{4}\right)$ оройтой дээш (доош) харсан парабол байна.

Олон гишүүнт

$$\boxed{p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0}$$

хэлбэрийн $y = p_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцийг *бүхэл рационал функц* буюу n зэргийн *олон гишүүнт* гэнэ.

• Алгебрын үндсэн теорем ёсоор n зэргийн олон гишүүнт бүрийг

$$\boxed{p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)}$$

үржвэр дүрслэл

хэлбэрт бичиж болно. x_i нь олон гишүүнтийн бодит эсвэл комплекс тоон язгуурууд. Комплекс язгуурууд нь үргэлж хосмог хэлбэртэйгээ хамт байна. Олон гишүүнтийн үржвэр хэлбэрийн дүрслэлд $(x - x_i)$ шугаман үржвэр p удаа орж байвал x_i-г p эрэмбийн язгуур гэнэ. Олон гишүүнтийн болон түүний уламжлалын утга нь дараах томъёогоор бодогддог:

$$b_{n-1} := a_n, \quad b_i := a_{i+1} + ab_{i+1}, \quad i = n-2, \ldots, 0, \quad p_n(a) = a_0 + ab_0$$
$$c_{n-2} := b_{n-1}, \quad c_i := b_{i+1} + ac_{i+1}, \quad i = n-3, \ldots, 0, \quad p_n'(a) = b_0 + ac_0$$

Горнерын схем

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
a	$-$	ab_{n-1}	ab_{n-2}	$\ldots$	ab_2	ab_1	ab_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_1	b_0	$p_n(a)$
a	$-$	ac_{n-2}	ac_{n-3}	$\ldots$	ac_1	ac_0	
	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\ldots$	c_0	$p_n'(a)$	

Дараах харьцаа хүчинтэй:

$$\boxed{p_n(x) = p_n(a) + (x - a) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0)}$$

Бутархай рационал функц, энгийн бутархайн задаргаа

$$r(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad a_m \neq 0,\ b_n \neq 0$$

хэлбэрийн $y = r(x)$ функцийг *бутархай рационал* гэнэ. Тухайлбал $m < n$ үед *зөв* рационал $m \geq n$ үед *зөв биш* рационал гэж ангилна.

• *Зөв биш* бутархай рационал функц нь *хуваагч олон гишүүнтийн* тусламжтайгаар $\boxed{r(x) = p(x) + s(x)}$ хэлбэрт бичигдэнэ. Энд $p(x)$ нь (*асимптот*) олон гишүүнт болон $s(x)$ нь *зөв биш* бутархай рационал функц (► олон гишүүнтийн үржвэр дүрслэл).

$r(x)$-ийн язгуурууд	–	хуваарийг тэгээс ялгаатай байлгах олон гишүүнтийн хүртвэрийн бүх язгуурууд
$r(x)$-ийн туйлууд	–	хүртвэрийг тэгээс ялгаатай байлгах хуваарийн бүх язгуурууд болон хүртвэр дэх давхардлын эрэмбэ нь хуваарийнхаас бага байх хүртвэр, хуваарийн бүх ерөнхий язгуурууд
$r(x)$-ийн засагдах тасралтын цэгүүд	–	хүртвэр дэх давхардлын эрэмбэ нь хуваарийнхаас их байх хүртвэр, хуваарийн бүх ерөнхий язгуурууд

Зөв бутархай рационал функцийн **энгийн бутархайн задаргаа**

1. Хуваарь дахь олон гишүүнт $q_n(x)$-ийг бодит коэффициенттэй шугаман болон хосмог комплекс язгуурууд бүхий квадрат олон гишүүнтүүдийн үржвэр хэлбэрээр дүрслэх:

   $q_n(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+cx+d)^{\gamma}\ldots$

2. Дөхөх шийд

$$r(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2+cx+d} + \cdots + \frac{C_\gamma x + D_\gamma}{(x^2+cx+d)^\gamma} + \ldots$$

3. $A_i, B_i, C_i, D_i, \ldots$ (бодит) коэффициентуудыг тодорхойлох :
   a) Хамгийн бага ерөнхий хуваарь олоод
   b) хамгийн бага ерөнхий хуваариар үржүүлэх.
   c) $x = a$, $x = b$ орлуулгаар $\ldots A_\alpha, B_\beta, \ldots$ олдоно
   d) Коэффициентуудыг харьцуулснаар үлдэх үл мэдэгдэгчдийн хувьд шугаман тэгшитгэлүүд гарна.

Илтгэгч функц

$y = a^x$	–	илтгэгч функц, $a \in \mathbb{R},\ a > 0$
a	–	суурь
x	–	илтгэгч
Тухайн тохиолдол		$a = \mathrm{e}$:
$y = \mathrm{e}^x = \exp(x)$	–	e суурьтай илтгэгч функц

Тодорхойлогдох муж: $D_f = \mathbb{R}$

Утгын муж: $W_f = \mathbb{R}^+ = \{y \mid y > 0\}$

- $y = a^x$ илтгэгч функцийн урвуу нь $y = \log_a x$ логарифм функц байна (► х. 52).
- үйлдлийн дүрмүүд ► зэрэгт (х. 15)
- $a > 1$ үед илтгэгч функцийн өсөлт нь $y = x^n$ зэрэгт функцтэй харьцуулахад илүү байна.

y y

$f(x) = a^x$ $f(x) = a^x$

1 $a > 1$ 1 $a < 1$

0 x 0 x

өсөх илтгэгч функц буурах илтгэгч функц

Сөрөг зэрэг

$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x, \qquad a > 0$$

хувиргалтаар сөрөг (эерэг) илтгэгчтэй функцийн утга нь эерэг (сөрөг) илтгэгчтэй функцийн утгад шилжинэ.

Суурь a, $0 < a < 1$

$$b = \frac{1}{a} \quad \text{үед} \quad a^{-x} = b^x$$

дүрмээр a, $0 < a < 1$ суурьтай илтгэгч функцийг b, $b > 1$ суурьтай илтгэгч функцэд хувиргаж болно.

Логарифм функц

$y = \log_a x$	–	логарифм функц, $a \in \mathbb{R},\ a > 1$
x	–	аргумент
a	–	суурь
Тухайн тохиолдол		$a = \mathrm{e}$:
$y = \ln x$	–	натурал логарифм функц
Тухайн тохиолдол		$a = 10$:
$y = \lg x$	–	аравтын логарифм функц

Тодорхойлогдох муж: $D_f = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Утгын муж: $W = \mathbb{R}$

- $y = \log_a x$ утга нь $x = a^y$ харьцаагаар тодорхойлогдоно.
- Үйлдлийн дүрмүүд ► логарифм (х. 15).

- $y = \log_a x$ логарифм функцийн урвуу нь илтгэгч функц байна (► х. 51). Ижил хэмжээс бүхий x болон y тэнхлэгүүдтэй координатын системд $y = a^x$ функцийн график нь $y = x$ биссектриссийн хувьд $y = \log_a x$ функцийн графиктай тэгш хэмтэй байна.

y

$\log_a x$

$a > 1$

0 1 x

өсөх логарифм функц

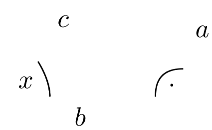
Суурь a, $0 < a < 1$

$$b = \frac{1}{a} \quad \text{үед} \quad \log_a x = -\log_b x$$

дүрмээр a, $0 < a < 1$ суурьтай логарифм функцийг b, $b > 1$ суурьтай логарифм функцэд шилжүүлж болно.

Тригонометрийн функцууд

Цацрагийн теорем ёсоор конгруэнт гурвалжнуудын хувьд талуудын харьцаа тэнцүү байдаг. Тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд эдгээр харьцаа нь аль нэг тэгш биш өнцгөөр нэг утгатай тодорхойлогдоно. Тодорхойлолт ёсоор



$$\sin x = \frac{a}{c}\,, \qquad \cos x = \frac{b}{c}\,, \qquad \tan x = \frac{a}{b}\,, \qquad \cot x = \frac{b}{a}.$$

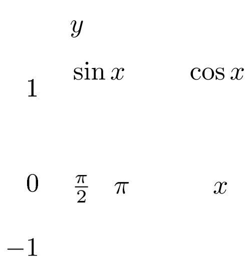
Хэрэв x нь $\frac{\pi}{2}$ болон 2π-ийн хооронд байх мохоо өнцөг бол a, b хэрчмүүдийн тэмдгийг тэгш өнцөгт координатын системийн байрлалаар нь тооцно.

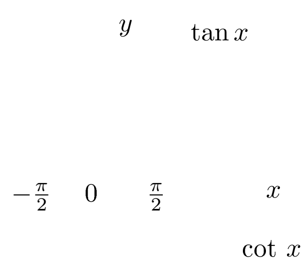
Шилжилтийн болон тэгш хэмийн чанар

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$	$\sin(\pi+x)=-\sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x$	$\cos(\pi+x)=-\cos x$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cot x$	$\tan(\pi+x)=\tan x$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\tan x$	$\cot(\pi+x)=\cot x$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$
$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cot x$	$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\tan x$

Үет чанар

$\sin(x+2\pi)=\sin x$	$\cos(x+2\pi)=\cos x$
$\tan(x+\pi)=\tan x$	$\cot(x+\pi)=\cot x$





Функцийн зарим онцгой утгууд

Өнцгийн радиан хэмжээс	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Өнцгийн градус хэмжээс	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Тригонометрийн функцуудын хувиргалт $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	–	$\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\cos x$	$\sqrt{1-\sin^2 x}$	–	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	–	$\dfrac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	–

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ (\cos x \neq 0), \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \ (\sin x \neq 0)$$

Нийлбэрийн теоремууд

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \qquad \cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$$

Давхар өнцгийн томъёонууд

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2}{\cot x - \tan x} \qquad \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x} = \frac{\cot x - \tan x}{2}$$

Хагас өнцгийн томъёонууд $(0 < x < \pi$ үед $)$

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \cot\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

Тригонометрийн функцуудын зэрэгтүүд

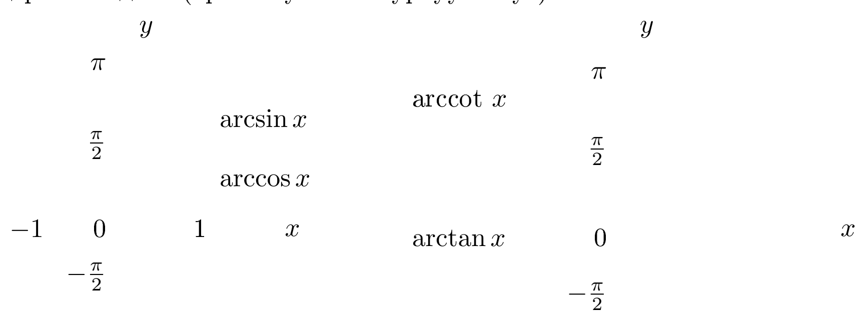
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) \qquad \cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x) \qquad \cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$$

Тригонометрийн урвуу функцууд

• Тригонометрийн урвуу функцууд нь мөн *арктригонометрийн* функцууд гэж нэрлэгддэг. Жишээ нь $x = \sin y$ харьцаанаас $y = \arcsin x$ функц тодорхойлогдоно (арк синус эсвэл урвуу синус).



Тодорхойлогдох болон утгын мужууд

тригонометрийн урвуу функц	тодорхойлогдох муж	утгын муж
$y = \arcsin x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \arctan x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arccot}\, x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$

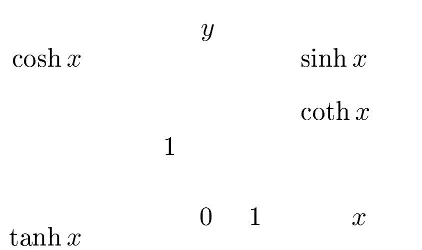
Гиперболлог функцууд

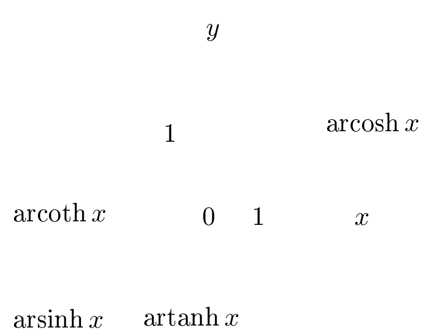
$$
\begin{aligned}
y = \sinh x &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) && - \text{ гиперболлог синус, } D_f = \mathbb{R},\ W_f = \mathbb{R} \\
y = \cosh x &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) && - \text{ гиперболлог конус, } D_f = \mathbb{R},\ W_f = [1, \infty) \\
y = \tanh x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} && - \text{ гиперболлог тангенс, } D_f = \mathbb{R},\ W_f = (-1, 1) \\
y = \coth x &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} && - \text{ гиперболлог котангенс} \\
& && \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ W_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)
\end{aligned}
$$

Урвуу гиперболлог функцууд

Гиперболлог синус, тангенс, котангенс болон баруун талт гиперболлог конус функцуудын урвуунуудыг *урвуу гиперболлог функцууд* гэж нэрлэдэг.

$$
\begin{aligned}
y &= \operatorname{arsinh} x && - \text{ урвуу гиперболлог синус, } D_f = \mathbb{R},\ W_f = \mathbb{R} \\
y &= \operatorname{arcosh} x && - \text{ урвуу гиперболлог косинус, } D_f = [1, \infty),\ W_f = [0, \infty) \\
y &= \operatorname{artanh} x && - \text{ урвуу гиперболлог тангенс, } D_f = (-1, 1),\ W_f = \mathbb{R} \\
y &= \operatorname{arcoth} x && - \text{ урвуу гиперболлог котангенс,} \\
& && \quad D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty),\ W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}
$$





Эдийн засгийн зарим функцууд

Тэмдэглэгээ

x	–	бүтээгдэхүүний тоо хэмжээ (нэгжээр)
p	–	бүтээгдэхүүний үнэ (нэгж тоон хэмжээний мөнгөн илэрхийлэл)
E	–	үндэсний орлого, үндэсний бүтээгдэхүүн (нэгж хугацааны мөнгөн илэрхийлэл)

Микро болон макро эдийн засгийн функцууд

$x = x(p)$	–	эрэлтийн функц (үнийн хариултын функц); ерөнхийдөө буурдаг; x – зарагдсан ба шаардагдах барааны тоо хэмжээ
$p = p(x)$	–	нийлүүлэлтийн функц, ерөнхийдөө өсдөг; x – нийлүүлж буй тоо хэмжээ
$U(p) = x(p) \cdot p$	–	эргэц, борлуулалт (өгөөжийн функц, орлогын функц); p үнээс хамаарна
$K(x) = K_f + K_v(x)$	–	тогтмол ба хувьсах зардлын нийлбэр болох зардлын функц
$k(x) = \dfrac{K(x)}{x}$	–	дундаж зардал; нэгжийн зардал
$k_f(x) = \dfrac{K_f}{x}$	–	дундаж тогтмол зардал; нэгжийн тогтмол зардал
$k_v(x) = \dfrac{K_v(x)}{x}$	–	дундаж хувьсах зардал; нэгжийн хувьсах зардал
$G(x) = U(x) - K(x)$	–	ашиг (үйл ажиллагааны ашиг)
$D(x) = U(x) - K_v(x)$	–	маржинал орлого
$g(x) = \dfrac{G(x)}{x}$	–	дундаж ашиг; нэгжийн ашиг
$C = C(E)$	–	(макро эдийн засгийн) хэрэглээний функц, хэрэглээний барааны зардал; гол төлөв өсдөг функц
$S(E) = E - C(E)$	–	(макро эдийн засгийн) хадгаламжийн функц

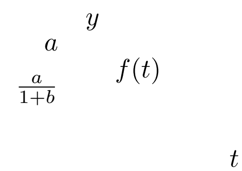
• *Дундаж функц* $\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{x}$-ийн утга нь координатын эх ба графикийн $(x, f(x))$ цэгүүдийг дайрсан шулууны өнцгийн коэффициенттэй тэнцүү. Энэ нь нэгж x-д харгалзах функцийн утгыг илэрхийлнэ.

• $G(x) = 0$ үед $U(x) = K(x)$ тэгшитгэлийг хангаж буй x цэгийг *хугарлын цэг* гэж нэрлэнэ. Энэ цэгийг олохдоо (*хугарлын цэгийн шинжилгээ*) ойролцоо тооцон бодох аргыг ашигладаг.

• Нэгжийн ашиг нь нэгжийн үнэ ба нэгжийн зардлын ялгавартай тэнцүү: $g(x) = p(x) - k(x)$. *Нэгжийн маржинал орлого* нь үнэ ба нэгж хувьсах зардлын ялгавар юм.

Логистик функц

$$\boxed{y = f(t) = \frac{a}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-ct}}, \quad a,\, b,\, c > 0}$$

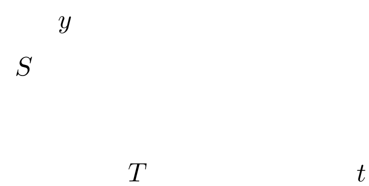


Энэ функцийн хувьд $\varrho_f(t) = \frac{y'}{y} = p(a - y)$ болон $y' = py(a - y)$ (▶ дифференциал тэгшитгэл) хамаарлууд биелнэ. Үүнд p – пропорционалийн коэффициент, y – импулсийн хүчин зүйл, $(a - y)$ – сааруулагч хүчин зүйл.

• Өсөлтийн хурд болох $\varrho_f(t)$ нь дурын t хугацаанд сааруулагч хүчин зүйлтэй шууд пропорциональ. f функцийн өсөлт нь импулсийн болон сааруулагч хүчин зүйлсийн үржвэртэй шууд пропорциональ.

Нөөцийн функц ("хөрөө шүдэт функц")

$$\boxed{\begin{array}{l} y = f(t) = iS - \dfrac{S}{T}t, \\ (i-1)T \le t < iT, \\ T > 0, \;\; i = 1, 2, \ldots \end{array}}$$



• Хугацааны iT, $i = 0, 1, 2, \ldots$ агшинд агуулах нь дүүргэгдсэн үед барааны (нөөцийн) нийлүүлэлт тогтмол хугацаанд $[(i-1)T, iT)$ интервалтай хэрэгжинэ.

Комперц-Макэхамын функц (мөхлийн хууль)

$$\boxed{y = f(t) = a \cdot b^t \cdot c^{d^t}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \;\; d > 0}$$

• Энэ функц нь $y' = p(t)y$ (▶ дифференциал тэгшитгэл) тэгшитгэлийг $p(t) = p_1 + p_2 \cdot d^t = \ln|b| + \ln|c| \cdot \ln d \cdot d^t$ пропорционалийн коэффициенттайгаар хангадаг. $[t, t+\mathrm{d}t]$ хугацаанд хорогдох хүн амын тоо нь t насанд амьдарч буй $y = f(t)$ хүн амын тоотой пропорциональ.

Үечилсэн хэлбэлзэлтэй хандлагын функц

$$y = f(t) = a + bt + c \cdot \sin dt,$$
$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

y $f(t)$ $a + bt$ a 0 $\frac{\pi}{d}$ t

• Улирлын (жилийн) хэлбэлзлийг тодорхойлж буй $\sin dt$ үет функцтэй шугаман хандлагын $a + bt$ функц давхацна.

Тасралтгүй (экспоненциаль) өсөлт

$$y = f(t) = a_0 \cdot q^{\alpha t}$$

Энэ функц нь цаг хугацаанаас хамаарсан өсөлтийн төлөв байдлыг (хүн ам, мөнгөн хөрөнгө гэх мэт) илэрхийлнэ; үүнд a_0 – $t = 0$ үеийн анхны утга, α – өсөлтийн хурд.

Өргөтгөсөн экспоненциаль өсөлт

$$y = f(t) = a + b \cdot q^t,$$
$$a, b > 0, \ \ q > 1$$

• Функц болон функцийн өөрчлөлтийн (өсөлтийн) хурд $\varrho_f(t) = \dfrac{y'}{y}$ (▶ х. 68) нь хоёулаа өсдөг. Түүнчлэн $\lim\limits_{t \to \infty} \varrho_f(t) = \ln q$.

Кобб-Дугласын үйлдвэрлэлийн функц (нэг орцтой тохиолдолд)

Тогтмол мэдрэмжтэй функц (▶ х. 68)

$$x = f(r) = c \cdot r^{\alpha}, \quad c, \alpha > 0$$

r орц ба гарцын (тоо хэмжээний нэгжийн хувьд) хоорондох хамаарлыг илэрхийлнэ (▶ х. 116).

Хязгаарлалттай үйлдвэрлэлийн функц (нэг хүчин зүйлийн хувьд)

$$x = f(r) = \begin{cases} a \cdot r & \text{if} \quad r \le \hat{r} \\ b & \text{if} \quad r > \hat{r}, \end{cases} \qquad a, b > 0$$

• Энэ функц нь нэг хүчин зүйлийг тогтмол гэж үзсэн үед бусад хүчин зүйлсээс хамаардаг.

Нэг хувьсагчийн функцийн дифференциал тоолол

Функцийн хязгаар

x_0 цэг рүү нийлдэг $x_n \in D_f$ байх **дурын** $\{x_n\}$ дарааллын хувьд $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ бол $a \in \mathbb{R}$ тоог x_0 цэг дээрх f функцийн ***хязгаар*** гэнэ. Тэмдэглэгээ: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ (эсвэл $x \to x_0$ үед $f(x) \to a$).

• Дээрх тодорхойлолтод нэмэлт $x_n > x_0$ ($x_n < x_0$) хязгаарласан нөхцөл биелдэг бол ***баруун өрөөсгөл*** (***зүүн өрөөсгөл***) хязгаарын тухай яригдана. Тэмдэглэгээ: $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = a$ ($\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = a$). Функцийн хязгаар оршдог бол баруун болон зүүн өрөөсгөл хязгаарууд тэнцүү.

• Хэрэв $\{f(x_n)\}$ дараалал сарнидаг бол f функцийг x_0 цэг дээр хязгааргүй гэнэ. Хэрэв функцийн утга ямар нэг цэг дээр хязгаарлалтгүй өсдөг (буурдаг) (***өргөтгөсөн*** хязгаар) бол $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (харгалзан $-\infty$) тэмдэглэл хэрэглэгддэг.

Хязгаарын үйлдлийн дүрмүүд

Хэрэв $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ болон $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ хязгаарууд оршдог бол:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \qquad \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \quad g(x) \neq 0, \quad b \neq 0.$$

$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ болон $\frac{\infty}{\infty}$ хувьд Лопиталийн дүрэм

f, g функцууд x_0 цэгийн орчинд дифференциалчлагдаад $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ (төгсгөлгүй утга авч болно) хязгаар оршдог, мөн $g'(x) \neq 0$ байг. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ эсвэл $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$ нөхцлүүдийн аль нэг нь биелдэг бол $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ харьцаа хүчинтэй.

• $x \to \pm\infty$ тохиолдол боломжтой.

• $0{\cdot}\infty$ эсвэл $\infty{-}\infty$ тохиолдлууд нь $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ хэлбэрүүдийн аль нэгд шилжинэ. 0^0, ∞^0 эсвэл 1^∞ тохиолдлууд нь $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$ хувиргалтаар $0 \cdot \infty$ хэлбэрт шилжинэ.

Зарим чухал хязгаарууд

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0,$	$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x=\infty,$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0,$
$\lim\limits_{x\to\infty}x^n=\infty\ \ (n\ge 1),$	$\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty,$	$\lim\limits_{x\downarrow 0}\ln x=-\infty,$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{\alpha x}}=0\quad(\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha>0,\ n\in\mathbb{N}),$		$\lim\limits_{x\to\infty}q^x=0\ \ (0<q<1),$
$\lim\limits_{x\to\infty}q^x=\infty\ \ (q>1),$		$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x=\mathrm{e}^\alpha\ \ (\alpha\in\mathbb{R})$

Тасралтгүй чанар

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ биелдэг бол $f:D_f\to\mathbb{R}$ функцийг $x_0\in D_f$ цэг дээр *тасралтгүй* гэнэ.

• Эн чацуу тодорхойлолт: дурын (хангалттай бага) $\varepsilon>0$ тооны хувьд $\delta>0$ тоо олдоод $|x-x_0|<\delta$ үед $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ нөхцөл биелдэг бол f функцийг x_0 цэг дээр *тасралтгүй.*

• Хэрэв $x\in D_f$ цэг бүр дээр функц тасралтгүй бол түүнийг *тасралтгүй функц* гэдэг.

Тасралтын чанарууд

төгсгөлөг үсрэлт	–	$\lim\limits_{x\downarrow x_0}f(x)\neq\lim\limits_{x\uparrow x_0}f(x)$
төгсгөлгүй үсрэлт	–	аль нэг өрөөсгөл хязгаар нь төгсгөлгүй
туйл	–	$\left\lvert\lim\limits_{x\downarrow x_0}f(x)\right\rvert=\left\lvert\lim\limits_{x\uparrow x_0}f(x)\right\rvert=\infty$
$p\in\mathbb{N}$ эрэмбийн туйл	–	$\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^p f(x)$ хязгаар оршдог, тэгээс ялгаатай, төгсгөлөг байх x_0 цэг
засагдах тасралт	–	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ оршдог боловч f нь $x=x_0$ дээр тодорхойлогдоогүй эсвэл $f(x_0)\neq a$

• Бутархай рационал функцийн хувьд хүртвэрийг тэгээс ялгаатай байлгах хуваарийн язгуур болдог цэгүүд туйл болно (▶ бутархай рационал функц, х. 50).

Тасралтгүй функцийн чанарууд

• f болон g функцууд харгалзан D_f, D_g мужууд дээр тасралтгүй бол $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ болон $\dfrac{f}{g}$ функцууд $D_f\cap D_g$ муж дээр тасралтгүй байна (сүүлийн функцийн хувьд $g(x)\neq 0$).

• f функц $[a,b]$ битүү завсарт тасралтгүй бол $f_{\max}$ хамгийн их болон $f_{\min}$ хамгийн бага утгуудаа өгөгдсөн завсар дээр авна. $f_{\min}$ болон $f_{\max}$-ийн хооронд орших тоо бүр ядаж нэг цэг дээрх функцийн утгатай тэнцүү.

Тасралтгүй функцийн хязгаарын хувьд үйлдлийн дүрмүүд

Хэрэв f тасралтгүй бол $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$.

Тухайн тохиолдлууд:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n, \qquad \lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)}, \quad a>0$$

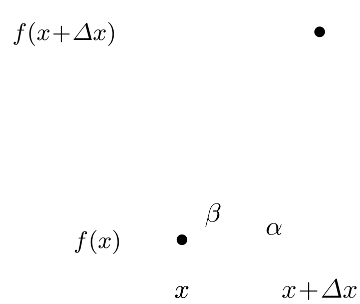
$$\lim_{x\to x_0} \ln f(x) = \ln\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right), \qquad f(x)>0$$

Дифференциалчлал

Ялгаварт харьцаа болон уламжлал

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \tan\beta$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \tan\alpha$$



Хэрэв дээрх хязгаар оршдог бол f функцийг x *цэг дээр дифференциалчлагддаг* гэнэ. Энэ тохиолдолд уг функц нь мөн тасралтгүй. Хэрэв $\forall x \in D_f$ хувьд f дифференциалчлагддаг бол түүнийг D_f дээр *дифференциалчлагддаг* гэнэ.

Дээрх хязгаарыг *уламжлал* гэж нэрлээд $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$-ээр (эсвэл $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $y'(x)$, $f'(x)$) тэмдэглэе. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *ялгаварт харьцаа* нь $(x, f(x))$ болон $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ цэгүүдийг дайрсан огтлогчийн өнцгийн коэффициентийг тодорхойлно.

Уламжлал нь f функцийн графикийн хувьд $(x, f(x))$ цэг дээр татсан шүргэгчийн өнцгийн коэффициент болно.

Уламжлалын дүрмүүд

	функц	уламжлал
тогтмол үржигдэхүүн	$a \cdot u(x)$	$a \cdot u'(x)$, a – бодит тоо
нийлбэрийн дүрэм	$u(x) \pm v(x)$	$u'(x) \pm v'(x)$
үржвэрийн дүрэм	$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
ноогдворын дүрэм	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
онцгой тохиолдол:	$\dfrac{1}{v(x)}$	$-\dfrac{v'(x)}{[v(x)]^2}$
давхар функцийн дүрэм	$u(v(x))$ (харг. $y=u(z)$, $z=v(x)$)	$u'(z) \cdot v'(x)$ $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$
урвуу функцээр дифференциалчлах	$f(x)$	$\dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$ $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \Big/ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)$
логарифм дифференциалчлал	$f(x)$	$(\ln f(x))' \cdot f(x)$
далд функц	$F(x, y) = 0$ байх $y = f(x)$ өгөгдсөн	$f'(x) = -\dfrac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$
ерөнхий илтгэгч функц	$u(x)^{v(x)}$ $(u > 0)$	$u(x)^{v(x)} \times$ $\times \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)$

• Хэрэв урвуу эсвэл $\ln f(x)$ функц нь анхны функцаас илүү “хялбар” замаар дифференциалчлагддаг бол урвуу болон логарифм функцийн дифференциалчлал хэрэглэгдэнэ.

Элементар функцуудын уламжлалууд

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c =$ тогтмол	0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x	1	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \log_a \mathrm{e}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\lg x$	$\frac{1}{x} \lg \mathrm{e}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\cot x$	$-1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
x^x	$x^x(\ln x + 1)$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$
$\coth x$	$1 - \coth^2 x$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$		

Дифференциал

x_0 цэг дээр дифференциалчлагддаг f функцийн хувьд

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \mathrm{o}(\Delta x)$$

томъёо хүчинтэй. Энд $\mathrm{o}(\cdot)$ ("бага о") нь $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\mathrm{o}(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ харьцаа биелэх *Ландаугийн тэмдэгт.*

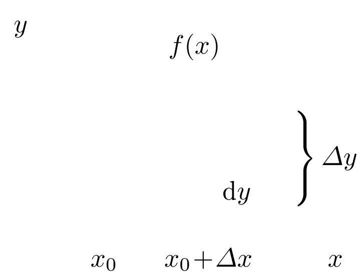
$$\boxed{\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

эсвэл

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x}$$

гэж тодорхойлогдох харьцааг f функцийн x_0 цэг дээрх *дифференциал* гэнэ. Энэ нь x_0 аргументыг Δx-ээр өөрчлөхөд функцийн өсөлтийн гол хэсгийг тодорхойлдог:

$$\boxed{\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x\,.}$$



I эрэмбийн уламжлалын эдийн засгийн утга

• Эдийн засагт функцийн I эрэмбийн уламжлыг *ахиу функц* (үзүүлэлт) гэж нэрлэдэг. Энэ нь үл хамаарах x-ийг нэг нэгжээр нэмэгдүүлэхэд, ө.х. $\Delta x = 1$ (►дифференциал) үед функцийн утгын өөрчлөлтийг ойролцоогоор илэрхийлнэ. Ахиу функцийн гол санаа нь дараах томъёо юм.

$$\boxed{\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)}$$

• Ахиу функцийн тусламжтайгаар эдийн засгийн асуудлуудыг судлах нь *ахиу шинжилгээнд* хамаардаг. Иймд хувьсагчдын **нэгжийг** тодорхойлох нь чухал. Тухайлбал:

$$\boxed{f'\text{-ийн хэмжих нэгж} \quad = \quad f\text{-ийн хэмжих нэгж} \;\; / \;\; x\text{-ийн хэмжих нэгж}}$$

Эдийн засгийн функцуудын хэмжих нэгж ба ахиу функцууд

т.н. – тоо хэмжээний нэгж, м.н. – мөнгөний нэгж, х.н. – хугацааны нэгж

функц $f(x)$	f-ийн нэгж	x-ийн хэмжих нэгж	ахиу функц $f'(x)$	f'-ийн нэгж
зардал	м.н.	т.н.	ахиу зардал	$\frac{\text{м.н.}}{\text{т.н.}}$
нэгжийн зардал	$\frac{\text{м.н.}}{\text{т.н.}}$	т.н.	нэгжийн ахиу зардал	$\frac{\text{м.н./т.н.}}{\text{т.н.}}$
эргэц, борлуулалт(тоон хамааралтай)	м.н.	т.н.	ахиу эргэц	$\frac{\text{м.н.}}{\text{т.н.}}$
эргэц (үнээс хамааралтай)	м.н.	$\frac{\text{м.н.}}{\text{т.н.}}$	ахиу эргэц	$\frac{\text{м.н.}}{\text{м.н./т.н.}}$
үйлдвэрлэлийн функц	$\text{т.н.}^{(1)}$	$\text{т.н.}^{(2)}$	ахиу бүтээгдэхүүн	$\frac{\text{т.н.}^{(1)}}{\text{т.н.}^{(2)}}$
дундаж өгөөж	$\frac{\text{т.н.}^{(1)}}{\text{т.н.}^{(2)}}$	$\text{т.н.}^{(2)}$	ахиу дундаж өгөөж	$\frac{\text{т.н.}^{(1)}/\text{т.н.}^{(2)}}{\text{т.н.}^{(2)}}$
ашиг	м.н.	т.н.	ахиу ашиг	м.н./т.н.
нэгжийн ашиг	м.н./т.н.	т.н.	нэгжийн ахиу ашиг	$\frac{\text{м.н./т.н.}}{\text{т.н.}}$
хэрэглээний функц	м.н./х.н.	$\frac{\text{м.н.}}{\text{х.н.}}$	ахиу хэрэглээний харьцаа	100 %
хадгаламж	$\frac{\text{м.н.}}{\text{х.н.}}$	$\frac{\text{м.н.}}{\text{х.н.}}$	ахиу хадгаламжийн харьцаа	100 %

Өөрчлөлтийн хэмжээ болон мэдрэмж

Ойлголтууд

$\dfrac{\Delta x}{x}$	– x-ийн дундаж харьцангуй өөрчлөлт ($x \neq 0$)
$\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	– f-ийн дундаж харьцангуй өөрчлөлт (ялгаварт харьцаа)
$R_f(x) = \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \dfrac{1}{f(x)}$	– f-ийн x цэг дээрх өөрчлөлтийн дундаж хэмжээ
$E_f(x) = \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \dfrac{x}{f(x)}$	– f-ийн x цэг дээрх дундаж мэдрэмж
$\varrho_f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} R_f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	– f-ийн x цэг дээрх өөрчлөлтийн хэмжээ; өсөлтийн хэмжээ
$\varepsilon_f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} E_f(x) = x \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	– f-ийн x цэг дээрх (цэгэн) мэдрэмж

• Дундаж мэдрэмж ба мэдрэмж нь x болон $f(x)$-ийн хэмжээсийн нэгжийн сонголтоос хамаарахгүй (хэмжээсгүй хэмжигдэхүүн) юм. Мэдрэмж нь x-ийг 1 %-аар ихэсгэхэд $f(x)$-ийн өөрчлөлтийн хувийг (харьцангуй өөрчлөлт) ойролцоогоор тодорхойлдог.

• Хэрэв $y = f(t)$ нь t хугацаанаас хамаарсан эдийн засгийн хэмжигдэхүүний өсөлтийг (өөрчлөлт) тодорхойлдог бол $\varrho_f(t)$ нь t агшин дахь хугацааны нэгж өөрчлөлтөд $f(t)$-ийн ойролцоо өөрчлөлтийн хувийг заана.

• f функц нь (x цэг дээр)

мэдрэмжтэй	хэрэв $\lvert\varepsilon_f(x)\rvert > 1$	$f(x)$ нь x-ээс харьцангуй хүчтэй өөрчлөгддөг,
пропорционал мэдрэмжтэй	хэрэв $\lvert\varepsilon_f(x)\rvert = 1$	x болон $f(x)$-ийн харьцангуй өөрчлөлтүүд ойролцоогоор тэнцүү,
мэдрэмжгүй	хэрэв $\lvert\varepsilon_f(x)\rvert < 1$	$f(x)$ нь x-ээс харьцангуй сул өөрчлөгддөг,
төгс мэдрэмжгүй	хэрэв $\varepsilon_f(x) = 0$	шугаман дөхөлтийн үед x өөрчлөгдөхөд $f(x)$ нь өөрчлөгдөхгүй бол

гэж тус тус нэрлэгдэнэ.

Мэдрэмж болон өөрчлөлтийн хэмжээний хувьд үйлдлийн дүрмүүд

дүрэм	мэдрэмж	өөрчлөлтийн хэмжээ
тогтмол хэмжигдэхүүн	$\varepsilon_{cf}(x) = \varepsilon_f(x) \quad (c \in \mathbb{R})$	$\varrho_{cf}(x) = \varrho_f(x) \quad (c \in \mathbb{R})$
нийлбэр	$\varepsilon_{f+g}(x) = \frac{f(x)\varepsilon_f(x)+g(x)\varepsilon_g(x)}{f(x)+g(x)}$	$\varrho_{f+g}(x) = \frac{f(x)\varrho_f(x)+g(x)\varrho_g(x)}{f(x)+g(x)}$
үржвэр	$\varepsilon_{f\cdot g}(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$	$\varrho_{f\cdot g}(x) = \varrho_f(x) + \varrho_g(x)$
ноогдвор	$\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)$	$\varrho_{\frac{f}{g}}(x) = \varrho_f(x) - \varrho_g(x)$
давхар функц	$\varepsilon_{f\circ g}(x) = \varepsilon_f(g(x)) \cdot \varepsilon_g(x)$	$\varrho_{f\circ g}(x) = g(x)\varrho_f(g(x))\varrho_g(x)$
урвуу функц	$\varepsilon_{f^{-1}}(y) = \dfrac{1}{\varepsilon_f(x)}$	$\varrho_{f^{-1}}(y) = \dfrac{1}{\varepsilon_f(x) \cdot f(x)}$

Дундаж функцийн мэдрэмж

$\boxed{\varepsilon_{\bar{f}}(x) = \varepsilon_f(x) - 1}$ $\bar{f}$ – дундаж функц $\left(\bar{f}(x) = \dfrac{f(x)}{x},\ x \neq 0\right)$

• Хэрэв тухайн тохиолдолд $U(p) = p \cdot x(p)$ нь гүйлгээ болон $x(p)$ нь эрэлтийг тодорхойлдог бол $\overline{U}(p) = x(p)$ учир эрэлтийн үнийн мэдрэмж нь гүйлгээний үнийн мэдрэмжээс үргэлж нэгээр бага байна.

Аморос-Робинсоны ерөнхий тэгшитгэл

$$\boxed{f'(x) = \bar{f}(x) \cdot \varepsilon_f(x) = \bar{f}(x) \cdot \big(1 + \varepsilon_{\bar{f}}(x)\big)}$$

Аморос-Робинсоны тухайн тэгшитгэл

$$\boxed{V'(y) = x \cdot \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_N(x)}\right)}$$

x – үнэ,
$y = N(x)$ – эрэлт,
N^{-1} – N-ийн урвуу функц,
$U(x) = x \cdot N(x) = V(y) = y \cdot N^{-1}(y)$ – гүйлгээ
V' – маржинал гүйлгээ,
$\varepsilon_N(x)$ – гүйлгээний үнийн мэдрэмж

Дундаж утгын теорем

Дифференциал тооллын дундаж утгын теорем

f функц нь $[a,b]$ дээр тасралтгүй болон (a,b) дээр дифференциалчлагддаг бол $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)}$ нөхцөл биелэх (ядаж нэг) $\xi \in (a,b)$ тоо олдоно.

Дифференциал тооллын ерөнхий дундаж утгын теорем

f, g функцууд нь $[a,b]$ хэрчим дээр тасралтгүй болон (a,b) дээр дифференциалчлагддаг байг. Мөн $x \in (a,b)$ бүрийн хувьд $g'(x) \neq 0$ биелдэг бол $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}$ нөхцлийг хангах (ядаж нэг) $\xi \in (a,b)$ тоо олдоно.

Дээд эрэмбийн уламжлалууд болон Тейлорын задаргаа

Дээд эрэмбийн уламжлалууд

f', $f'' := (f')'$, $f''' := (f'')'$, $\dots$, $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ уламжлалууд нь оршин байдаг бол f функцийг *n удаа дифференциалчлагдддаг* гэнэ; $f^{(n)}$-ийг f-ийн *n-р эрэмбийн уламжлал* $(n = 1, 2, \dots)$ гэж уншихаас гадна $f^{(0)}$-оор f-ийг ойлгоно.

Тейлорын теорем

f функц нь x_0 цэгийн $U_\varepsilon(x_0)$ орчинд $n+1$ удаа дифференциалчлагддаг байг. Мөн $x \in U_\varepsilon(x_0)$ гэж үзье. Тэгвэл

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}}$$

биелэх ξ тоо (“дундаж утга”) x_0 болон x-ийн хооронд олдох бөгөөд сүүлийн гишүүн нь Лагранжийн хэлбэр дэх *үлдэгдэл* гэж нэрлэгдээд $f(x)$-ийг дээрх n зэргийн олон гишүүнтээр солиход гарах алдааг тодорхойлдог.

• Мөн (x цэг дээрх задаргаанд x_0 цэгийн оронд $x+\zeta h$, $0 < \zeta < 1$ дундаж утгыг ашиглах замаар) дараах томъёогоор өгөгдөж болно

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x+\zeta h)}{(n+1)!}h^{n+1}}$$

• Тейлорын томъёоны *Маклорены хэлбэр* ($x_0 = 0$, ζx, $0 < \zeta < 1$ -дундаж утга):

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\zeta x)}{(n+1)!}x^{n+1}}$$

Элементар функцуудын Тейлорын томъёонууд ($x_0 = 0$ цэг дээрх задаргаа)

функц	Тейлорын олон гишүүнт	үлдэгдэл гишүүн
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$	$\frac{e^{\zeta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$
a^x $(a > 0)$	$1 + \frac{\ln a}{1!}x + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n$	$\frac{a^{\zeta x}(\ln a)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} \pm \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	$(-1)^n \frac{\cos \zeta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(-1)^{n+1} \frac{\cos \zeta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$	$(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\zeta x)^{n+1}}$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 \pm \ldots + (-1)^n x^n$	$\frac{(-1)^{n+1}}{(1+\zeta x)^{n+2}}x^{n+1}$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \binom{\alpha}{1} x + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n$	$\binom{\alpha}{n+1} (1+\zeta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

Ойролцоо томъёонууд

Хангалттай “бага” x-ийн хувьд, ө.х. хэрэв $|x| \ll 1$ бол $x_0 = 0$ цэг дээрх Тейлорын олон гишүүнтийн үндсэн гишүүд нь (харгалзан шугаман болон квадратлаг дөхөлт) хэрэглээний олон тохиолдолд хангалттай ойролцоо дөхөлт болдог. Хүснэгтээс $|x| \leq a$ үед алдаа нь $\varepsilon < 0,001$ байх боломжит a хязгааруудыг харж болно (▶ Тейлорын цуваа).

Функцуудын дөхөлтийн томъёонуудын хүснэгт

функц, түүний дөхөлтийн томъёо	боломжит хязгаар a
$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$	$0,031$
$\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{n}$	$0,036\sqrt{n}\ \ (x > 0)$
$\sin x \approx x$	0,181
$\tan x \approx x$	0,143
$a^x \approx 1 + x \ln a$	$0,044 \cdot (\ln a)^{-1}$
$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}$	
$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$	
$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	0,394
$\mathrm{e}^x \approx 1 + x$	0,044
$\ln(1+x) \approx x$	0,045

Уламжлалуудын тусламжтайгаар функцийг ангилах

Монотон чанар

f функц $[a, b]$ завсарт тодорхойлогдсон бөгөөд уламжлалтай байг. Тэгвэл

$f'(x) = 0$	$\forall\, x \in [a, b]$	$\iff$	f нь $[a, b]$ дээр тогтмол
$f'(x) \geq 0$	$\forall\, x \in [a, b]$	$\iff$	f нь $[a, b]$ дээр өсөх
$f'(x) \leq 0$	$\forall\, x \in [a, b]$	$\iff$	f нь $[a, b]$ дээр буурах
$f'(x) > 0$	$\forall\, x \in [a, b]$	$\implies$	f нь $[a, b]$ дээр эрс өсөх
$f'(x) < 0$	$\forall\, x \in [a, b]$	$\implies$	f нь $[a, b]$ дээр эрс буурах

• Сүүлийн 2 чанарын урвуу өгүүлбэрүүд нь зөвхөн суларсан хэлбэрт хүчинтэй: хэрэв f нь $[a,b]$ дээр эрс өсөх (буурах) функц бол $f'(x) \geq 0$ (харгалзан $f'(x) \leq 0$) байна.

Экстремумын зайлшгүй нөхцөл

Хэрэв f функц $x_0 \in (a,b)$ цэг дээр (локаль эсвэл глобаль) экстремумын цэгтэйгээс гадна энэ цэг дээр дифференциалчлагддаг бол $\boxed{f'(x_0) = 0}$ байна. Энэ тэгшитгэлийг хангах x_0 цэг бүрийг f функцийн *сэжигтэй цэгүүд* гэдэг.

• Дээрх чанар зөвхөн f функц дифференциалчлагддаг цэгүүд дээр хэрэглэгдэнэ. Тодорхойлогдох мужийн хилийн болон f функц дифференциалчлагддаггүй цэгүүд нь мөн экстремумын цэг байж болно.

Экстремумын хүрэлцээтэй нөхцөл

Хэрэв f функц $(a,b) \subset D_f$ завсарт n удаа дифференциалчлагддаг болон n нь тэгш тоо үед

$\boxed{f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0}$ харьцаанууд биелдэг бол f нь $x_0 \in (a,b)$ цэг дээр экстремумын цэгтэй байна.

x_0 цэгийн хувьд $f^{(n)}(x_0) < 0$ биелдэг бол максимумын, $f^{(n)}(x_0) > 0$ үед минимумын цэг болно.

• Тухайлбал :

$f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) < 0$	$\Longrightarrow$	f функц нь x_0 цэг дээр локаль максимумтай,
$f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) > 0$	$\Longrightarrow$	f функц нь x_0 цэг дээр локаль минимумтай.

• Хэрэв f функц нь a, b хилийн цэгүүд дээр тасралтгүй, дифференциалчлагддаг бол

$f'(a) < 0 \ \ (f'(a) > 0)$	$\Longrightarrow$	f функц нь a цэг дээр локаль максимумтай (минимум),
$f'(b) > 0 \ \ (f'(b) < 0)$	$\Longrightarrow$	f функц нь b цэг дээр локаль максимумтай (минимум).

• Хэрэв f функц x_0 сэжигтэй цэгийн $U_\varepsilon(x_0) = \{x \,|\, |x - x_0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ ***орчинд*** дифференциалчлагдаад энэ цэг дээрх f' уламжлал нь тэмдгээ өөрчилдөг бол x_0 нь экстремумын цэг болно. Тухайлбал $x < x_0$ үед

$f'(x) > 0$ болон $x > x_0$ үед $f'(x) < 0$ бол максимумын цэг, хэрэв уламжлалын тэмдэг нь сөрөгөөс эерэг рүү шилждэг бол локаль минимумын цэг.

• Хэрэв $U_\varepsilon(x_0)$ орчинд f'-ийн тэмдэг өөрчлөгдөхгүй тогтмол бол f функц нь x_0 цэг дээр **экстремумгүй.** Энэ тохиолдолд *босоо нугаралтын цэгтэй* гэж ярьдаг.

Өсөх чанар

• Хэрэв $[a,b]$ завсарт $f'(x) > 0$ болон $f''(x) \geq 0$ нөхцлүүд биелдэг бол f функцийг *өсдөг гүдгэр* , $f'(x) > 0$ болон $f''(x) \leq 0$ нөхцлүүд биелэх үед *өсдөг хотгор* гэнэ.

Функцийн муруйлтын шинж чанарууд

f функц нь (a,b) завсарт 2 удаа дифференциалчлагддаг байг. Тэгвэл

f нь (a,b) завсарт	$\Longleftrightarrow$	$f''(x) \geq 0 \, \forall\, x \in (a,b)$
гүдгэр функц	$\Longleftrightarrow$	$f(y) - f(x) \geq (y-x)f'(x) \, \forall\, x,y \in (a,b)$
f нь (a,b) завсарт	$\Longleftarrow$	$f''(x) > 0 \, \forall\, x \in (a,b)$
эрс гүдгэр функц	$\Longleftrightarrow$	$f(y) - f(x) > (y-x)f'(x) \, \forall\, x,y \in (a,b), x \neq y$
f нь (a,b) завсарт	$\Longleftrightarrow$	$f''(x) \leq 0 \, \forall\, x \in (a,b)$
хотгор функц	$\Longleftrightarrow$	$f(y) - f(x) \leq (y-x)f'(x) \, \forall\, x,y \in (a,b)$
f нь (a,b) завсарт	$\Longleftarrow$	$f''(x) < 0 \, \forall\, x \in (a,b)$
эрс хотгор функц	$\Longleftrightarrow$	$f(y) - f(x) < (y-x)f'(x) \, \forall\, x,y \in (a,b), x \neq y$

Муруйлт

Муруйн чиглэл ба x тэнхлэгийн хоорондох α өнцгийн өөрчлөлт $\Delta\alpha$ болон бүрхсэн нумын уртын өөрчлөлт Δs ийн харьцааны $\Delta s \to 0$ үеийн хязгаарыг муруйн *муруйлт* гэнэ:

$$C = \lim_{\Delta s \downarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\,.$$

муруйн дүрслэл	муруйлт C
тэгш өнцөгт системийн хэлбэр $y = f(x)$	$\dfrac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}$
параметрт хэлбэр $x = x(t)$, $y = y(t)$	$\dfrac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t))^{3/2}}$ энд $\dot{x}(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\dot{y}(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

• Муруйлт C нь $y = f(x)$ муруйг $P(x, f(x))$ цэгт шүргэх тойргийн радиусын урвуутай тэнцүү байна.

• Хэрэв муруй гүдгэр бол муруйлт C сөрөг биш, хотгор бол эерэг биш байна.

Нугаралтын цэгийн зайлшгүй нөхцөл

Хэрэв f функц (a, b) завсарт 2 удаа дифференциалчлагдаад x_w цэг дээр *нугаралтын цэгтэй* (гүдгэр болон хотгор байх завсруудын уулзвар цэг) бол $\boxed{f''(x_w) = 0.}$

Нугаралтын цэгийн хүрэлцээтэй нөхцөл

f нь (a, b) завсарт 3 удаа тасралтгүй дифференциалчлагддаг функц байг. $f''(x_w) = 0$ нөхцлийг хангах x_w-ийн хувьд $\boxed{f'''(x_w) \neq 0}$ нөхцөл биелдэг бол нугаралтын цэг болно.

Эдийн засгийн функцийн шинжилгээ, ашгийн максимум

Тэмдэглэгээ

$\bar{f}(x) = \dfrac{f(x)}{x}$	− дундаж функц
$f'(x)$	− ахиу функц
$K(x) = K_v(x) + K_f$	− нийт зардал=хувьсах зардал + тогтмол зардал
$k(x) = \dfrac{K(x)}{x}$	− нэгжийн нийт зардал
$k_v(x) = \dfrac{K_v(x)}{x}$	− нэгжийн хувьсах зардал
$G(x) = U(x) - K(x)$	− ашиг = борлуулалт − зардал
$g(x) = \dfrac{G(x)}{x}$	− нэгжийн ашиг

• $x = 1$ үед $\bar{f}(1) = f(1)$ тул функцийн утга нь дундаж утгатай ижил байна.

Дундаж болон ахиу функц

$$\boxed{\bar{f}'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \bar{f}(x)}$$ (оновчтой байх зайлшгүй нөхцөл)

• Дундаж функц нь ахиу функцтэй тэнцүү цэг дээр л экстремумын цэгтэй байна.

Тухайлбал: $\boxed{K_v'(x_m) = k_v(x_m) = k_{v,\min}}$

• Хамгийн бага дундаж зардлын x_m цэг дээр нэгжийн ахиу зардал болон хувьсах зардал нь тэнцүү (богино хугацааны доод үнэ, далд үнийн хязгаар).

$$\boxed{K'(x_0) = k(x_0) = k_{\min}}$$

• Нэгжийн хамгийн бага нийт зардлын хувьд ахиу зардал болон дундаж зардал хоорондоо тэнцүү (оновчтой зардал; урт хугацааны доод үнэ).

Полиполь ба монополь зах зээл дэх ашгийн максимум

$G(x) = U(x) - K(x) = p \cdot x - K(x) \ \to\ \max$ гэсэн экстремаль бодлогын шийд нь x^* болог.

• *Полиполь* (төгс өрсөлдөөнт) зах зээлд нийлүүлэгчийн талаас бүтээгдэхүүний үнэ p-г тогтмол гэж үзнэ. *Монополь (нийлүүлэлтийн)* зах зээлд үнийн функц $p = p(x)$ нь зах зээлийн нийт эрэлтийн функц болно.

Полиполь; нийт ашгийн максимум

$$\boxed{K'(x^*) = p, \qquad K''(x^*) > 0}$$ (максимум байх хүрэлцээтэй нөхцөл)

• Ахиу зардал нь зах зээлийн үнэтэй тэнцүү x^* цэг дээр төгс өрсөлдөөнт зах зээлийн нийлүүлэгч нь хамгийн их ашиг олно. Зардлын функцийн гүдгэр байх муж дээр максимумын цэг x^* олдоно.

Полиполь; нэгжийн ашгийн максимум

$$\boxed{g'(x_0)=k'(x_0)=0, \quad g''(x_0)=-k''(x_0)<0}$$ (максимум байх хүрэлцээтэй нөхцөл)

• Дундаж зардал хамгийн бага байх цэг дээр нэгжийн ашиг максимум байна (оновчтой зардал).

Полиполь; шугаман нийт зардлын функц, хүчин чадлын хязгаар x_0

$$\boxed{x^* = x_0}$$

• Хүчин чадлын хязгаар дээр ашгийн максимум оршино. Энэ нь *хугарлын цэг* (х. 58-д үз) $(0, x_0)$ завсар дээр эерэг байх нөхцөл юм.

• Нэгжийн минимум зардал ба нэгжийн максимум ашиг нь хамт хүчин чадлын хязгаар дээр оршино.

Монополь; нийт ашгийн максимум

$$\boxed{K'(x^*) = U'(x^*), \quad G''(x^*) < 0}$$

(максимум байх хүрэлцээтэй нөхцөл)

• Максимум ашгийн цэг дээр ахиу орлого ба ахиу зардал хоорондоо тэнцүү (*Курнагийн цэг*).

Монополь; нэгжийн ашгийн максимум

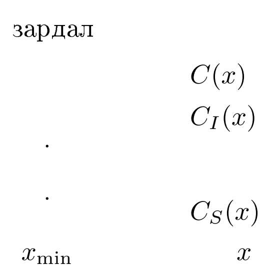
$$\boxed{p'(\hat{x}) = k'(\hat{x}), \qquad g''(\hat{x}) < 0}$$

(максимум байх хүрэлцээтэй нөхцөл)

• Үнийн болон дундаж зардлын функцуудын графикт татсан шүргэгчүүдийн өнцгийн коэффициент тэнцүү байх $\hat{x}$ цэг дээр нэгжийн ашгийн максимум утгаа авна.

Оновчтой хэмжээ (захиалгын оновчтой хэмжээ)

c_s	–	захиалга тус бүрийн захиалгын зардал (м.н.)
c_i	–	нөөцийн өртөг (т.н. нэгжийн, т.н., х.н.)
d	–	эрэлт, нөөцийн бууралт (т.н./х.н.)
r	–	үйлдвэрлэлийн түвшин (хурд), нөөцийн нэмэгдэлт (т.н./х.н.)
T	–	хугацааны үргэлжлэл (х.н.)
x	–	(үл мэдэгдэгч) захиалгын хэмжээ (т.н.)



м.н., т.н., х.н. – харгалзан мөнгөн, тоон болон хугацааны нэгжүүд

• Нөөцийн бууралтын түвшин d, нөөцийн нэмэгдэлтийн түвшин $c > d$ нь тогтмол гэж үзнэ ($c = d$ үед “онолын” хувьд нөөц хэрэггүй)

• Захиалгын болон нөөцийн зардлаас бүрдэх тодорхой хугацааны нийт зардал минимум байх захиалгын хэмжээ x^*-г олох шаардлагатай байг.

Үйлдвэрлэлийн хэмжээ ихсэх тусам захиалгын зардал бага байх боловч нөөцийн зардал өндөр байна.

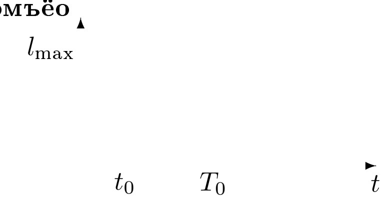
- Дараагийн хүснэгтэд энэ загварын мэдээллүүд өгөгдсөн.

Холбогдох тоон мэдээ

$t_0 = \dfrac{x}{r}$	– захиалгын үйлдвэрлэлтийн хугацаа
$T_0 = \dfrac{x}{d}$	– үйлдвэрлэлтийн болон нөөцийн үе шатны урт
$l_{\max} = \left(1 - \frac{d}{r}\right) x$	– нөөцийн хамгийн их хэмжээ
$\bar{l} = \left(1 - \dfrac{d}{r}\right) \cdot \dfrac{x}{2}$	– дундаж нөөц
$D = d \cdot T$	– $[0, T]$ завсар дахь нийт эрэлт
$n = \dfrac{D}{x} = \dfrac{dT}{x}$	– $[0, T]$ завсарт үйлдвэрлэгдэх захиалгын тоо
$C_S(x) = \dfrac{D}{x} \cdot c_s$	– $[0, T]$ завсар дахь захиалгын зардал
$C_I(x) = \left(1 - \dfrac{d}{r}\right) \cdot \dfrac{x}{2} \cdot c_i \cdot T$	– $[0, T]$ завсар дахь нийт нөөц
$C(x) = C_S(x) + C_I(x)$	– үе шатны нийт зардал

Захиалгын оновчтой хэмжээний томъёо

$$\boxed{x^* = \sqrt{\frac{2dc_s}{\left(1 - \frac{d}{r}\right) c_i}}}$$



- Хэрэв нөөцийн бүх нэмэгдэл ($r \to \infty$) нөөцийн циклийн эхэнд байсан бол

$$\boxed{x^* = \sqrt{\frac{2dc_s}{c_i}}}$$ **Харри Вилсоны захиалгын хэмжээний томъёо**

үед $l_{\max} = x$ (“хөрөөний шүдэн муруй”, х. 58) биелнэ.

- Худалдан авч хадгалсан бараа үйлдвэрлэлийн процесст үргэжлэн ашиглагдаж байгаа үед захиалгын **оновчтой хэмжээний бодлого** адил бүтэцтэй: тогтмол захиалгын зардал цөөнхийг санал болгоно, гэхдээ том захиалгууд нөөцөөс хамаардаг учир ихийг санал болгоно.

Нэг хувьсагчийн функцийн интеграл тоолол

Тодорхойгүй интеграл

Дурын $x \in (a,b)$ цэгийн хувьд $F'(x) = f(x)$ харьцаа биелдэг байх $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ функц бүрийг $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ функцийн *эх функц* гэнэ. Бүх эх функцуудын олонлог $\{F + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}$ нь f-ийн (a,b) завсар дээрх *тодорхойгүй* интеграл гэж нэрлэгддэг; C нь интегралчлалын тогтмол. Тэмдэглэгээ: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,.$

Интегралчлалын дүрмүүд

тогтмол үржигдэхүүн	$\displaystyle\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x,$	$\lambda \in \mathbb{R}$
нийлбэр	$\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$	
хэсэгчлэн интегралчлах	$\displaystyle\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$	
орлуулан интегралчлах	$\displaystyle\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(z)\,\mathrm{d}z,$ (хувьсагчийг солих)	$z = g(x)$
тухайн тохиолдол $f = \frac{1}{g}$	$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert g(x)\rvert + C,$	$g(x) \neq 0$
шугаман орлуулга	$\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$ (F нь f-ийн эх функц)	$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Бутархай рационал функцийг интегралчлах

$$\int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\,\mathrm{d}x$$

Олон гишүүнтийн хуваалт болон энгийн бутархайн задаргаа нь олон гишүүнт болон тусгай *энгийн функцуудыг* интегралчлахад хэрэглэгдэнэ. Энгийн функцууд нь ► тодорхойгүй интегралуудын хүснэгт дэх томъёонуудын тусламжтайгаар интегралчлагддаг. Чухал заримаас нь дурдвал ($x - a \neq 0$, $k > 1$, $p^2 < 4q$ гэж үзнэ):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

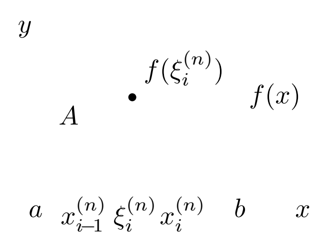
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(B - \frac{1}{2}Ap\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}$$

Тодорхой интеграл

x тэнхлэгийн $[a,b]$ завсар болон зааглагдсан f функцийн графикаар хашигдсан мужийн талбай A нь $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}$ нийлбэрээр ойролцоогоор илэрхийлэгдэнэ, энд $\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$ болон $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^{(n)} = b - a$.



Тодорхой угтвар нөхцөл биелэх үед $n \to \infty$ болон $\Delta x_i^{(n)} \to 0$ үеийн хязгаар авахад мужийн талбай A-тай тэнцүү байх f функцийн $[a,b]$ хэрчмээр авсан *тодорхой (Риманы)* интеграл: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$ гарна.

Үйлдлийн чанарууд болон дүрмүүд

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad a < b$$

Интеграл тооллын 1-р дундаж утгын теорем

Хэрэв f нь $[a,b]$ дээр тасралтгүй бол

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)}$$

нөхцөл биелэх ядаж нэг $\xi \in [a,b]$ тоо олдоно.

Интеграл тооллын ерөнхийлсөн 1-р дундаж утгын теорем

Хэрэв f нь $[a,b]$ дээр тасралтгүй, g нь $[a,b]$ дээр интегралчлагддаг бөгөөд дурын $x \in [a,b]$-ийн хувьд $g(x) \geq 0$ эсвэл $g(x) \leq 0$ нөхцөл биелдэг бол

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

байх ядаж нэг $\xi \in [a,b]$ тоо олдоно.

Хэрэв f нь $[a,b]$ дээр тасралтгүй бол $x \in [a,b]$-ийн хувьд $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ нь дифференциалчлагдана, үүнд $\boxed{F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \implies F'(x) = f(x)\,.}$

Интеграл тооллын үндсэн теорем

Хэрэв f нь $[a,b]$ дээр тасралтгүй, мөн F нь f-ийн $[a,b]$ дээрх эх функц бол

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

харьцаа биелнэ.

Тодорхой интегралуудын хүснэгт

Үндсэн интегралууд (тогтмолоос интегралчлахыг оруулаагүй.)

зэрэгт функцууд

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1,\ x \neq 0 \quad n < 0)$$

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1,\ x > 0)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| \qquad (x \neq 0)$$

илтгэгч болон логарифм функцууд

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x \qquad (x > 0)$$

тригонометрийн функцууд

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| \qquad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| \qquad (x \neq k\pi)$$

тригонометрийн урвуу функцууд

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\ \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \qquad (|x| \leq 1)$$

$$\int \arccos x\,\mathrm{d}x = x\ \arccos x - \sqrt{1-x^2} \qquad (|x| \leq 1)$$

$$\int \arctan x\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\int \operatorname{arccot} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

рационал функцууд

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \qquad (|x| > 1)$$

иррациональ функцууд

иррационал функцууд	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$	$(\lvert x\rvert < 1)$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$(\lvert x\rvert > 1)$
гипербол функцууд	
$\displaystyle\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x$	
$\displaystyle\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x$	
$\displaystyle\int \tanh x\,\mathrm{d}x = \ln\cosh x$	
$\displaystyle\int \coth x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sinh x\rvert$	$(x \neq 0)$
урвуу гипербол функцууд	
$\displaystyle\int \mathrm{arsinh}x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{arsinh}x - \sqrt{1+x^2}$	
$\displaystyle\int \mathrm{arcosh}x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{arcosh}x - \sqrt{x^2-1}$	$(x > 1)$
$\displaystyle\int \mathrm{artanh}x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{artanh}x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$	$(\lvert x\rvert < 1)$
$\displaystyle\int \mathrm{arcoth}x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{arcoth}x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$	$(\lvert x\rvert > 1)$

Рационал функцуудын интегралууд

$$\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$$

$$\int \frac{ax+b}{fx+g}\,\mathrm{d}x = \frac{ax}{f} + \frac{bf-ag}{f^2}\ \ln|fx+g|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{ag-bf}\left(\int \frac{a}{ax+b}\,\mathrm{d}x - \int \frac{f}{fx+g}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{1}{(b-a)(c-a)}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} + \frac{1}{(a-b)(c-b)}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+b} + \frac{1}{(a-c)(b-c)}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+c}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\dfrac{2ax+b}{4ac-b^2} & \text{хэрэв } b^2<4ac \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left(\ln(1-\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}) - \ln(1+\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}})\right) & \text{хэрэв } 4ac<b^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} = \frac{2ax+b}{n(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^n} + \frac{(4n-2)a}{n(4ac-b^2)}\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} = \frac{bx+2c}{n(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^n} + \frac{(2n-1)b}{n(b^2-4ac)}\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\pm x^2} = \frac{1}{a}\,S \ \text{ энд } \ S = \begin{cases} \arctan\dfrac{x}{a} & \text{хэрэв “}+\text{”} \\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+x}{a-x} & \text{хэрэв “}-\text{” болон } |x|<|a| \\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+a}{x-a} & \text{хэрэв “}-\text{” болон } |x|>|a| \end{cases}$$

$(a \neq 0)$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2\pm x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(a^2\pm x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2\pm x^2)^n}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^3\pm x^3} = \pm\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a\pm x)^2}{a^2\mp ax+x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\ \arctan\frac{2x\mp a}{a\sqrt{3}}$$

Иррационал функцуудын интегралууд

$$\int \sqrt{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a(2+n)}\sqrt{(ax+b)^{n+2}} \qquad (n \neq -2)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} \right| & \text{хэрэв} \quad b>0 \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{-b}} \arctan \sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} & \text{хэрэв} \quad b<0 \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)$$

$$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)$$

$$\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + 2ax + b\right| & \text{хэрэв } a > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \dfrac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} & \text{хэрэв } a < 0,\ 4ac < b^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \frac{2ax + b}{4a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Тригонометрийн функцуудын интегралууд

$$\int \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \sin^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \sin^n ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{na}\sin^{n-1} ax \cos ax + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\int x^n \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}x^n \cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n ax} = -\frac{\cos ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2} ax} \qquad (n > 1)$$

$$\int \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$\int \cos^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \cos^n ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{na}\sin ax\cos^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^n \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^n \sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n ax} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{\sin ax}{a\cos^{n-1} ax} + (n-2)\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2} ax}\right] \qquad (n>1)$$

$$\int \sin ax\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$$

$$\int \sin ax\cos bx\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} \qquad (|a|\neq|b|)$$

$$\int \tan ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax|$$

$$\int \tan^n ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a(n-1)}\tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax\,\mathrm{d}x \qquad (n\neq 1)$$

$$\int \cot ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|$$

$$\int \cot^n ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a(n-1)}\cot^{n-1} ax - \int \cot^{n-2} ax\,\mathrm{d}x \qquad (n\neq 1)$$

Илтгэгч болон логарифм функцуудын интегралууд

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$$

$$\int x^n \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^n\mathrm{e}^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \ln ax\,\mathrm{d}x = x\ln ax - x$$

$$\int \frac{\ln^n x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} x$$

$$\int x^m \ln^n x\,\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x \qquad (m\neq -1,\ n\neq -1)$$

Өргөтгөсөн интеграл

$x = b$ цэг f функцийн туйл байг. Мөн f нь зааглагдсан бөгөөд $0 < \varepsilon < b - a$ байх $[a, b - \varepsilon]$ завсарт интегралчлагддаг гэж үзье. Хэрэв f-ийн $[a, b-\varepsilon]$ дээрх интеграл нь $\varepsilon \to 0$ үед хязгаартай бол энэ хязгаарыг f-ийн $[a, b]$ дээр *өргөтгөсөн интеграл* гэж нэрлэнэ:

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ (интегралын доорх функц зааглагдаагүй)

• Хэрэв $x = a$ нь f-ийн туйл бол дээрхтэй төстэйгээр:

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ (интегралын доорх функц зааглагдаагүй)

• Хэрэв $[a, b]$ хэрчмийн дотоод цэг $x = c$ нь туйл бол f-ийн $[a, b]$ дээрх өргөтгөсөн интеграл нь f-ийн $[a, c]$ болон $[c, b]$ дээрх өргөтгөсөн интегралуудын нийлбэртэй тэнцүү.

• f функц нь $x \geq a$-ийн хувьд тодорхойлогдоод $[a, b]$ завсар бүрт интегралчлагддаг гэж үзье. Хэрэв $b \to \infty$ үед f-ийн $[a, b]$ дээрх интегралын хязгаар оршин байдаг бол түүнийг f-ийн $[a, \infty)$ дээрх *өргөтгөсөн интеграл* гэнэ ($a \to -\infty$ үед төстэйгээр):

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(зааглагдаагүй завсар)

Параметрт интеграл

Хэрэв $a \leq x \leq b$, $c \leq t \leq d$ үед $f(x, t)$ функц нь t-ийн бэхлэгдсэн утганд $[a, b]$ хэрчим дээр x-ээр интегралчлагддаг бол t-ээс хамаарах $F(t) = \int\limits_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}x$ функцийг *параметрт интеграл гэнэ* (t параметртэй).

• Хэрэв f нь t хувьсагчаар тухайн дифференциалчлагддаг болон f_t тухайн уламжлал нь тасралтгүй бол F функц (t хувьсагчийн хувьд) дифференциалчлагдаад дараах харьцаа хүчинтэй:

$$\dot{F}(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,.$$

• φ, ψ нь $c \leq t \leq d$ дээр дифференциалчлагддаг функцууд байг. Хэрэв $f(x, t)$ нь $\varphi(t) < x < \psi(t)$, $c \leq t \leq d$ муж дээр t хувьсагчаар тасралтгүй тухайн уламжлалтай бол f-ийн $\varphi(t)$ болон $\psi(t)$ хилүүдтэй параметрт интеграл нь $c \leq t \leq d$ завсарт t хувьсагчаар дифференциалчлагдана, үүнд

$$F(t) = \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x \qquad \Longrightarrow$$

$$\dot{F}(t) = \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + f(\psi(t),t)\dot{\psi}(t) - f(\varphi(t),t)\dot{\varphi}(t)\,.$$

- Тухайн тохиолдол: $F(x) = \int\limits_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = f(x)$

Интеграл тооллын эдийн засгийн хэрэглээ

Нийт ашиг

$$\boxed{G(x) = \int_0^x [e(\xi) - k(\xi)]\,\mathrm{d}\xi}$$

$k(x)$ – x нэгжийн ахиу зардал;
$e(x)$ – x нэгжийн ахиу орлого

Хэрэглэгчийн илүүдэл ((x_0, p_0) тэнцвэрийн цэгийн хувьд)

$$\boxed{K_R(x_0) = E^* - E_0 = \int_0^{x_0} p_N(x)\,\mathrm{d}x - x_0 \cdot p_0}$$

$p_N : x \to p(x)$ – буурч буй эрэлтийн функц, $p_0 = p_N(x_0)$,
$E_0 = x_0 \cdot p_0$ – жинхэнэ нийт орлого,
$E^* = \displaystyle\int_0^{x_0} p_N(x)\,\mathrm{d}x$ – онолын боломжит нийт орлого

- Хэрэглэгчийн илүүдэл гэдэг нь онолын боломжит болон жинхэнэ нийт орлогын зөрүү. Энэ нь (хэрэглэгчийн талаас үзвэл) тэнцвэрийн цэг дээрх ашгийн хэмжүүр юм.

Үйлдвэрлэгчийн илүүдэл ((x_0, p_0) тэнцвэрийн цэгийн хувьд)

$$\boxed{P_R(x_0) = E_0 - E^* = x_0 \cdot p_0 - \int_0^{x_0} p_A(x)\,\mathrm{d}x}$$

$p_A : x \to p_A(x)$ – өсөж буй нийлүүлэлтийн функц,
$p_N : x \to p_N(x)$ – буурч буй эрэлтийн функц,
$p_A(x_0) = p_N(x_0) =: p_0$ нь зах зээлийн тэнцвэрийн цэгийг тодорхойлно;
E_0, E^* – жинхэнэ болон онолын боломжит нийт орлого.

- Үйлдвэрлэгчийн илүүдэл нь жинхэнэ ба онолын боломжит нийт орлогуудын зөрүү юм. Энэ нь (үйлдвэрлэгчийн талаас үзвэл) тэнцвэрийн цэг дээрх борлуулалтын ашгийг харуулна.

Тасралтгүй мөнгөн гүйлгээ

$K(t)$ – хугацаанаас хамаарсан төлбөрийн хэмжээ,
$R(t) = K'(t)$ – хугацаанаас хамаарсан мөнгөн гүйлгээ,
α – хүүгийн тасралтгүй түвшин (эрчим)

$K_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} R(t)\,\mathrm{d}t$	– $[t_1, t_2]$ завсар дахь төлбөрийн хэмжээ
$K_{[t_1,t_2]}(t_0) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} R(t)\,\mathrm{d}t$	– $t_0 < t_1$ үе дэх өнөөгийн үнэ цэнэ
$K_{[t_1,t_2]}(t_0) = \dfrac{R}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t_0}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t_1} - \mathrm{e}^{-\alpha t_2}\right)$	– $R(t) \equiv R$ =тогтмол үе дэх өнөөгийн үнэ цэнэ
$K_{t_1}(t_0) = \int_{t_1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} R(t)\,\mathrm{d}t$	– цаг хугацааны хувьд хязгаарлагдаагүй $R(t)$-ийн өнөөгийн үнэ цэнэ
$K_{t_1}(t_0) = \dfrac{R}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha(t_1-t_0)}$	– цаг хугацааны үед хязгаарлагдаагүй $R(t) \equiv R$ үе дэх тогтмол мөнгөн гүйлгээний өнөөгийн үнэ

Өсөлтийн явц

Зарим эдийн засгийн үзүүлэлт биелэх $y = f(t) > 0$ нь $f(0) = y_0$ гэсэн анхны нөхцлөөр тодорхойлогдоно.

- Хэрэв $[0, t]$ завсар дээрх абсолют өсөлт нь энэ завсрын урттай пропорциональ бол:

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y = f(t) = \frac{c}{2}t^2 + y_0} \qquad (c \text{ – пропорционалийн коэффициент})$$

- *Өсөлтийн хурд* $\frac{f'(t)}{f(t)}$ тогтмол, ө. х $\frac{f'(t)}{f(t)} = \gamma$ бол :

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y = f(t) = y_0\mathrm{e}^{\gamma t}} \qquad (\gamma \text{ – өсөлтийн эрчим })$$

тухайн тохиолдол: капиталын тасралтгүй нийлмэл хүүтэй үед:

$$\Longrightarrow \quad \boxed{K_t = K_0\mathrm{e}^{\delta t}}$$

($K_t = K(t)$ – t үе дэх капитал; K_0 – анхны капитал; δ хүүгийн эрчим)

- Хэрэв өсөлтийн хурд зарим интегралчлагддаг $\gamma(t)$ функцтэй тэнцүү, ө. х. $\frac{f'(t)}{f(t)} = \gamma(t)$ бол:

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y = f(t) = y_0\mathrm{e}^{\int_0^t \gamma(z)\,\mathrm{d}z} = y_0\mathrm{e}^{\bar{\gamma}t}\,,}$$

үүнд $\bar{\gamma} = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \gamma(z)\,\mathrm{d}z$ нь $[0,t]$ дээрх *өсөлтийн дундаж эрчим* юм.

Дифференциал тэгшитгэл

n эрэмбийн ердийн дифференциал тэгшитгэл

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$	–	далд хэлбэр
$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$	–	ил хэлбэр

• $a \le x \le b$ завсрын x бүрийн хувьд дээрх дифференциал тэгшитгэлийг хангах n удаа тасралтгүй дифференциалчлагддаг $y(x)$ функцийг $[a, b]$ завсарт дифференциал тэгшитгэлийн *(тухайн) шийд* гэнэ. Дифференциал тэгшитгэл болон дифференциал тэгшитгэлийн системийн бүх шийдүүдийн олонлогийг *ерөнхий шийд* гэж нэрлэнэ.

• Хэрэв $x = a$ цэг дээр шийдийн хувьд нэмэлт нөхцлүүд тавигдсан бол *анхны утгын бодлого* гарна. Хэрэв нэмэлт нөхцлүүд нь a болон b цэгүүд дээр өгөгдвөл *захын бодлогын* тухай яригдана.

I эрэмбийн дифференциал тэгшитгэл

$$\boxed{y' = f(x, y) \text{ эсвэл } P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \text{ эсвэл } P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0}$$

• x, y хавтгайн цэг бүрт $f(x, y)$-ийн тусламжтайгаар шийдийн муруйн шүргэгч чиглэлийг харгалзуулах замаар *чиглэлийн талбайг* тодорхойлдог. Ижил чиглэл бүхий чиглэлийн талбайн муруйнуудыг *изоклинууд* гэнэ.

Ялгагддаг дифференциал тэгшитгэл

$$\boxed{y' = r(x)s(y) \quad \text{эсвэл} \quad P(x) + Q(y)y' = 0 \quad \text{эсвэл} \quad P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0}$$

хэлбэрийн дифференциал тэгшитгэлийг *хувьсагчуудыг нь ялгах* замаар үргэлж $\boxed{R(x)\,\mathrm{d}x = S(y)\,\mathrm{d}y}$ хэлбэрт бичиж болно. Энэ нь y'-ийг $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$-ээр сольж тэгшитгэлийг хувиргасан хэлбэр юм. 2 талаас нь “интеграл” авсны дараа ерөнхий шийд нь:

$$\boxed{\int R(x)\mathrm{d}x = \int S(y)\mathrm{d}y \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x) = \psi(y) + C}$$

I эрэмбийн шугаман дифференциал тэгшитгэл

$$\boxed{y' + a(x)y = r(x)}$$

$r(x) \not\equiv 0$ – нэгэн төрлийн бус дифференциал тэгшитгэл ;

$r(x) \equiv 0$ – нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэл

• Ерөнхий шийд нь харгалзах нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийд y_h болон нэгэн төрлийн бус тэгшитгэлийн тухайн шийд y_s-ийн нийлбэр байна:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_s(x)}$$

Нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийд

$y' + a(x)y = 0$ тэгшитгэлийн ерөнхий шийд $y_h(x)$ нь хувьсагчуудыг ялгах замаар олдоно

$$\boxed{y_h(x) = C\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad C = \text{ тогтмол}}$$

Нэгэн төрлийн бус дифференциал тэгшитгэлийн тухайн шийд

$y' + a(x)y = r(x)$ тэгшитгэлийн тухайн шийд $y_s(x)$ нь $y_s(x) = C(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$ (*тогтмолыг хувьсгах*) орлуулгын тусламжтайгаар бодогдоно. Орлуулгын үр дүнд, $C(x)$ нь

$$\boxed{C(x) = \int r(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}$$

гэж олдоно.

n-р эрэмбийн шугаман дифференциал тэгшитгэл

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x),\ a_n(x) \not\equiv 0}$$

$r(x) \not\equiv 0$ – нэгэн төрлийн бус дифференциал тэгшитгэл,
$r(x) \equiv 0$ – нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэл

• Нэгэн төрлийн бус дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь харгалзах нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийд y_h болон нэгэн төрлийн бус дифференциал тэгшитгэлийн тухайн шийд y_s-ийн нийлбэр байна:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_s(x)}$$

Нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийд

Хэрэв a_k коэффициент функцууд нь тасралтгүй бол y_k, $k = 1, \ldots, n$ (*функцуудын фундаментал систем*) гэсэн n функцууд олдоод харгалзах нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийд $y_h(x)$ нь дараах хэлбэрт бичигдэнэ:

$$\boxed{y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)}$$

• $y_1, \ldots, y_n$ функцууд нь фундаментал систем байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь y_k функцууд нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн шийдүүд байх бөгөөд ядаж нэг $x_0 \in \mathbb{R}$ цэг дээр *Бронскийн тодор-*

хойлогч

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

тэгээс ялгаатай байх явдал. Эдгээр функцуудыг дараах n анхны утгын бодлогуудыг бодох замаар олж болно ($k = 1, \dots, n$):

$$\boxed{\begin{aligned} & a_n(x)y_k^{(n)} + \dots + a_1(x)y_k' + a_0(x)y_k = 0, \\ & y_k^{(i)}(x_0) = \begin{cases} 0, & i \neq k-1 \\ 1, & i = k-1 \end{cases} \qquad i = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}}$$

• (*Эрэмбийг бууруулах*). Хэрэв n-р эрэмбийн нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн тухайн шийд $\bar{y}$ мэдэгдэж байхад $y(x) = \bar{y}(x) \int z(x)\,\mathrm{d}x$ гэсэн орлуулгаар n-р эрэмбийн шугаман (нэгэн төрлийн эсвэл нэгэн төрлийн бус) дифференциал тэгшитгэлийг $(n-1)$-р эрэмбийн тэгшитгэлд шилжүүлнэ.

Нэгэн төрлийн бус дифференциал тэгшитгэлийн тухайн шийд

Хэрэв $\{y_1, \dots, y_n\}$ нь фундаментал систем бол

$$\boxed{y_s(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)} \qquad \textbf{тогтмолыг хувьсгах}$$

аргыг ашиглан $C_1, \dots, C_n$ функцуудын уламжлалуудын хувьд дараах шугаман тэгшитгэлийн систем бодох замаар нэгэн төрлийн бус дифференциал тэгшитгэлийн тухайн шийдийг олно:

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1C_1' & + & y_2C_2' & + & \dots & + & y_nC_n' & = & 0 \\ y_1'C_1' & + & y_2'C_2' & + & \dots & + & y_n'C_n' & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n-2)}C_1' & + & y_2^{(n-2)}C_2' & + & \dots & + & y_n^{(n-2)}C_n' & = & 0 \\ y_1^{(n-1)}C_1' & + & y_2^{(n-1)}C_2' & + & \dots & + & y_n^{(n-1)}C_n' & = & \dfrac{r(x)}{a_n(x)} \end{array}$$

Эцэст нь интегралчлах замаар $C_1, \dots, C_n$ функцууд олдоно.

Эйлерийн дифференциал тэгшитгэл

Хэрэв n эрэмбийн ерөнхий шугаман дифференциал тэгшитгэлд коэффициент функцууд нь $a_k(x) = a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$ хэлбэртэй бол

$$\boxed{a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y \;=\; r(x).}$$

• $x = \mathrm{e}^{\xi}$ орлуулга нь (урвуу хувиргалт $\xi = \ln x$) $y(\xi)$-ийн хувьд тогтмол коэффициенттэй шугаман дифференциал тэгшитгэлд хүргэнэ. Харгалзах *характеристик тэгшитгэл* нь

$$\boxed{a_n\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)+\dots+a_2\lambda(\lambda-1)+a_1\lambda+a_0=0}$$

Тогтмол коэффициенттэй шугаман дифференциал тэгшитгэл

$$\boxed{a_n y^{(n)}+\dots+a_1y'+a_0=r(x), \qquad a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}}$$

• Ерөнхий шийд нь харгалзах нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийд болон нэгэн төрлийн бус дифференциал тэгшитгэлийн тухайн шийдийн нийлбэр болно:

$$\boxed{y(x)=y_h(x)+y_s(x)}$$

Нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийд

Фундаментал системийн y_k гэсэн n функцууд нь $\boxed{y=\mathrm{e}^{\lambda x}}$ (*дөхөх шийд*) хэлбэртэйгээр сонгогдоно. λ_k нь

$$\boxed{a_n\lambda^n+\dots+a_1\lambda+a_0=0}$$

гэсэн характеристик олон гишүүнтийн n язгуурууд байг. Характеристик тэгшитгэлийн λ_k гэсэн n язгууруудад харгалзах фундаментал системийн n функцууд нь дараах хүснэгтээр тодорхойлогддог:

язгуурын хэлбэр	язгуурын эрэмбэ	фундаментал системийн функцууд
λ_k бодит	энгийн	$\mathrm{e}^{\lambda_k x}$
	p-давхардсан	$\mathrm{e}^{\lambda_k x},\ x\mathrm{e}^{\lambda_k x},\dots,\ x^{p-1}\mathrm{e}^{\lambda_k x}$
$\lambda_k=a\pm b\mathrm{i}$ хосмог комплекс	энгийн	$\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\ \mathrm{e}^{ax}\cos bx$
	p-давхардсан	$\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\ x\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\ \dots,\ x^{p-1}\mathrm{e}^{ax}\sin bx,$ $\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\ x\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\ \dots,\ x^{p-1}\mathrm{e}^{ax}\cos bx$

Нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийд y_h нь

$\boxed{y_h(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\dots+C_ny_n(x)}$ хэлбэрт бичигдэнэ.

Нэгэн төрлийн бус дифференциал тэгшитгэлийн тухайн шийд

Хэрэв баруун тал r нь энгийн хэлбэртэй бол тухайн шийд y_s нь дараах хүснэгтэд тодорхойлсон аргын тусламжтайгаар тодорхойлогдоно:

$r(x)$	дөхөх шийд $y_s(x)$	*чичиргээний* тохиолдолд дөхөх шийд
$A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0$	$b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$	Хэрэв дөхөх шийдийн нэмэгдэхүүн нь нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийг хангаж байвал аль ч нэмэгдэхүүн нь нэгэн төрлийн дифференциал тэгшитгэлийн шийд биш болох хүртэл дөхөх шийдийг x-ээр үржүүлнэ.
$A\mathrm{e}^{\alpha x}$	$a\mathrm{e}^{\alpha x}$	
$A\sin\omega x$ $B\cos\omega x$ $A\sin\omega x + B\cos\omega x$	$a\sin\omega x + b\cos\omega x$	
эдгээр функцуудын хослол	харгалзах дөхөх шийдүүдийн хослол	Зөвхөн чичиргээний тохиолдлыг агуулж байгаа хэсэгт дээрх дүрмийг хэрэглэж болно.

Тогтмол коэффициенттэй I эрэмбийн шугаман дифференциал тэгшитгэлийн систем

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1' & = & a_{11}y_1 & + & \ldots & + & a_{1n}y_n & + & r_1(x) \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 & + & \ldots & + & a_{nn}y_n & + & r_n(x) \end{array} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Вектор тэмдэглэгээ

$\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}$ энд

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y'} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• Ерөнхий шийд нь $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_s(x)$ хэлбэртэй байна. Энд $\boldsymbol{y}_h$ нь $\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ нэгэн төрлийн системийн ерөнхий шийд, $\boldsymbol{y}_s$ нь $\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}$ нэгэн төрлийн бус системийн тухайн шийд.

Нэгэн төрлийн системийн ерөнхий шийд

I тохиолдол $\boldsymbol{A}$ нь диагональ хэлбэрт шилждэг, зөвхөн бодит λ_k, $k = 1, \ldots, n$ хувийн утгуудтай (давхардсан хувийн утгууд нь тусдаа тооцогдоно) болон $\boldsymbol{v}_k$ нь харгалзах хувийн векторууд нь байг. Тэгвэл нэгэн төрлийн системийн ерөнхий шийд нь

$$\boxed{\boldsymbol{y}_h(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}\boldsymbol{v}_n}$$

II тохиолдол $\boldsymbol{A}$ нь диагональ хэлбэрт шилждэг, харгалзах хувийн векторууд нь $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\mathrm{i}$, $\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\mathrm{i}$ байх $\lambda_k = \alpha + \beta\mathrm{i}$, $\lambda_{k+1} = \alpha - \beta\mathrm{i}$ хосмог комплекс хувийн утгуудтай байг. Тэгвэл $\boldsymbol{y}_h$ ерөнхий шийдэд k, $k+1$ гишүүд нь дараах хэлбэртэй бичигдэнэ:

$$\boxed{\boldsymbol{y}_h(x) = \ldots + C_k \mathrm{e}^{\alpha x}(\boldsymbol{a}\cos\beta x - \boldsymbol{b}\sin\beta x) + C_{k+1}\mathrm{e}^{\alpha x}(\boldsymbol{a}\sin\beta x + \boldsymbol{b}\cos\beta x) + \ldots}$$

III тохиолдол $\boldsymbol{A}$ нь диагональ хэлбэрт шилждэггүй, $\boldsymbol{V}$ нь $\boldsymbol{A}$-аас Жорданы нормаль хэлбэрт шилжүүлэх төсөөтэй хувиргалтын матриц байг. $\boldsymbol{J}(\lambda_k, n_k)$, $k = 1, \ldots, s$ гэсэн Жорданы блокийн хэмжээс n_k-г анхаарвал $\boldsymbol{V}$ матрицийг багануудаар нь бичиж болно:

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{v}_{11}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1n_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{kn_k}, \ldots, \boldsymbol{v}_{s1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{sn_s}).$$

Нэгэн төрлийн системийн ерөнхий шийд нь

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{y}_h(x) \;=\; & \ldots + C_{k1}\mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_{k1} + C_{k2}\mathrm{e}^{\lambda_k x}\left[\frac{x}{1!}\boldsymbol{v}_{k1} + \boldsymbol{v}_{k2}\right] + \ldots \\ & + C_{kn_k}\mathrm{e}^{\lambda_k x}\left[\frac{x^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\boldsymbol{v}_{k1} + \ldots + \frac{x}{1!}\boldsymbol{v}_{k,n_k-1} + \boldsymbol{v}_{kn_k}\right] + \ldots\end{aligned}}$$

$\boldsymbol{v}_{k1}$ *хувийн векторуудыг* тооцоолох : $(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{E})_{k1} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{v}_{kj}$ *гол векторуудыг* тооцоолох : $(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{E})\boldsymbol{v}_{kj} = \boldsymbol{v}_{k,j-1}$, энд $j = 2, \ldots, n_k$

Хэрэв комплекс хувийн утгууд тааралдвал II тохиолдолтой адилаар гүйцэтгэнэ.

Нэгэн төрлийн бус системийн тухайн шийд

Тухайн шийд нь тогтмолыг хувьсгах арга эсвэл дөхөх шийдийн тусламжтайгаар олдоно (► хүснэгт х. 95), энд **бүх** координатуудын хувьд $r(x)$-ийн **бүх** тохиолдлуудыг авч үзнэ. Чичиргээний тохиолдолд анхны дөхөлт нь x-ээр үржигдсэн дөхөлтийн функцээр өргөтгөгдөнө.

Ялгаварт тэгшитгэл

I эрэмбийн шугаман ялгаварт тэгшитгэл

$$\boxed{\Delta y = a(n)y + b(n)} \qquad (*)$$

Хэрэв $\Delta f(n) = a(n)f(n) + b(n)$ тэнцэтгэл $\forall n \in D_f$, $D_f \subset \mathbb{N}_0$ хувьд биелдэг бол $y = f(n)$ функцийг $(*)$ ялгаварт тэгшитгэлийн *шийд* гэнэ, үүнд $\Delta y = y(n+1) - y(n) = f(n+1) - f(n)$.

- Хэрэв $\{a(n)\}$, $\{b(n)\}$ нь бодит тоон дараалллууд бол $(*)$ нь

$$\boxed{y = f(n) = y_0 \cdot \prod_{k=0}^{n-1}[a(k)+1] + \sum_{k=0}^{n-2} b(k) \cdot \prod_{l=k+1}^{n-1}[a(l)+1] + b(n-1)}$$

гэсэн шийдтэй. Үүнд $f(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ дурын байдлаар сонгогдохоос гадна:

$$\prod_{k=0}^{n-1}[a(k)+1] := \begin{cases} [a(0)+1] \cdot \ldots \cdot [a(n-1)+1] & n = 1, 2, \ldots \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

$$\prod_{l=k+1}^{n-1}[a(l)+1] := \begin{cases} [a(k+1)+1] \cdot \ldots \cdot [a(n-1)+1] & n = k+2, \ldots \\ 1 & n = k+1 \end{cases}$$

$a(n) \equiv a =$ тогтмол, $b(n) \equiv b =$ тогтмол байх тухайн тохиолдолд $(*)$ ялгаварт тэгшитгэлийн шийд нь дараах хэлбэртэй

$$\boxed{y = f(n) = \begin{cases} y_0 \cdot \prod_{k=0}^{n-1}[a(k)+1] & \text{хэрэв } b(n) \equiv b = 0 \\ y_0(a+1)^n + \sum_{k=0}^{n-1} b(k)(a+1)^{n-1-k} & \text{хэрэв } a(n) \equiv a \\ y_0(a+1)^n & \text{хэрэв } a(n) \equiv a,\ b(n) \equiv 0 \\ y_0(a+1)^n + b \cdot \dfrac{(a+1)^n - 1}{a} & \text{хэрэв } a(n) \equiv a \neq 0,\ b(n) \equiv b \\ y_0 + b \cdot n & \text{хэрэв } a(n) \equiv 0,\ b(n) \equiv b \end{cases}}$$

Эдийн засгийн загварууд

$y(n)$	–	үндэсний орлого,	$n = 0, 1, 2, \ldots$
$c(n)$	–	хэрэглээ,	$n = 0, 1, 2, \ldots$
$s(n)$	–	хадгаламжийн нийлбэр,	$n = 0, 1, 2, \ldots$
$i(n)$	–	хөрөнгө оруулалт,	$n = 0, 1, 2, \ldots$

Булдингийн үндэсний орлогын өсөлт

Загварын томъёолол:

$y(n) = c(n) + i(n), \qquad c(n) = \alpha + \beta y(n), \qquad \Delta y(n) = \gamma i(n)$

α – орлогоос үл хамаарах хэрэглээний хэсэг, $\alpha \geq 0$

β – орлогоос хамаарах хэрэглээний пропорционалийн коэффициент, $0 < \beta < 1$

γ – хөрөнгө оруулалтын давтамж, $\gamma > 0$

$$\boxed{\Delta y(n) = \gamma(1-\beta)y(n) - \alpha\gamma, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$ **Булдингийн загвар**

Загварын шийд: $$\boxed{y = f(n) = \frac{\alpha}{1-\beta} + \left(y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)(1 + \gamma(1-\beta))^n}$$

- $y(0) = y_0 > c(0)$ үед $y = f(n)$ функц эрс өснө.

Харродсын үндэсний орлогын өсөлт

Загварын томъёолол:

$s(n) = \alpha y(n), \qquad i(n) = \beta \Delta y(n), \qquad i(n) = s(n)$

$\alpha y(n)$ – үндэсний орлогын хадгаламжийн хэсэг, $0 < \alpha < 1$

β – хөрөнгө оруулалт ба үндэсний орлогын өсөлт хоёрын пропорционалийн коэффициент, $\beta > 0, \beta \neq \alpha$

Харродсын загвар

$$\boxed{\Delta y(n) = \frac{\alpha}{\beta} y(n), \; y(0) = y_0, \quad n = 1, 2, \ldots}$$

Энэ загварын шийд нь: $$\boxed{y = f(n) = y_0 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n}$$

Эцекидын загвар

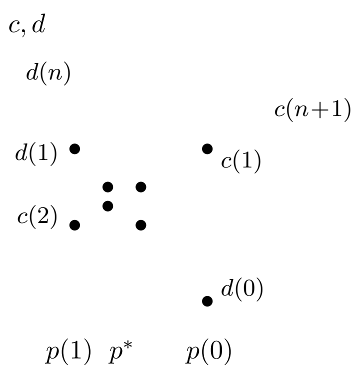
Томъёолол:
$d(n) = \alpha - \beta p(n), \quad d(n) = n$ $\qquad$ $d(n)$ – эрэлт,
$q(n+1) = \gamma + \delta p(n)$ $\qquad$ $p(n)$ – үнэ
$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \delta > 0$ $\qquad$ $q(n)$ – нийлүүлэлт

Эрэлт ба нийлүүлэлтийг тэнцүү гэж үзнэ.

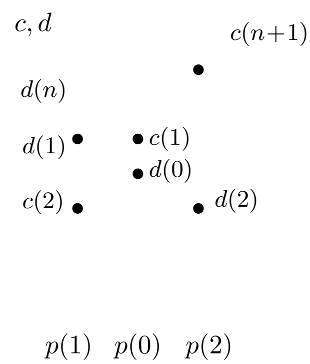
$$\boxed{\Delta p(n) = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} - \left(1 + \frac{\delta}{\beta}\right) p(n),\ \ p(0) = p_0, \qquad n = 1, 2, \ldots}$$ **ковебын загвар**

Загварын шийд: $$\boxed{y = p(n) = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta} + \left(p_0 - \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^n}$$

• $p(n)$-ийн утга нь $p^* = \dfrac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}$ тогтмолын ойролцоо хэлбэлзэнэ. Шийд нь $\delta \geq \beta$ үед сарнина, $\delta < \beta$ үед *тэнцвэрийн үнэ* p^* рүү нийлнэ.



нийлэх



сарних

II эрэмбийн шугаман ялгаварт тэгшитгэл

$$\boxed{\Delta^2 y + a\Delta y + by = c(n), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}} \qquad (*)$$

хэлбэрийн тэгшитгэлийг *тогтмол коэффициенттэй II эрэмбийн шугаман ялгаварт тэгшитгэл* гэнэ. $\Delta^2 f(n) := f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$ нь *II эрэмбийн ялгавар*.

- Хэрэв $c(n) = 0\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$ бол *нэгэн төрлийн*, бусад тохиолдолд *нэгэн төрлийн бус* тэгшитгэл болно.
- $\Delta^2 f(n) + a\Delta f(n) + bf(n) = c(n)\ \forall n \in D_f$ бол $D_f \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$ байх f функцийг $(*)$ тэгшитгэлийн шийд гэж нэрлэнэ.
- $(*)$ нэгэн төрлийн бус шугаман ялгаварт тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь харгалзах $\Delta^2 y + a\Delta y + by = 0$ нэгэн төрлийн тэгшитгэлийн ерөнхий шийд болон $(*)$-ийн тухайн шийдийн нийлбэр байна.

II эрэмбийн нэгэн төрлийн ялгаварт тэгшитгэлийн ерөнхий шийд

$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$ *характеристик тэгшитгэл* авч үзье.

Шийд нь $\lambda_{1,2} = -\dfrac{a}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$ томъёогоор бодогдоно. $D = a^2 - 4b$ дискриминантаас хамаараад 2 бодит эсвэл давхардсан 2 бодит мөн хосмог комплекс шийдүүдтэй байж болно. Иймээс $(*)$-д харгалзах нэгэн төрлийн ялгаварт тэгшитгэлийн ерөнхий шийдийг дүрслэхдээ 3 тохиолдлуудад хуваадаг, үүнд C_1, C_2 нь дурын бодит тогтмолууд.

$\boxed{\textbf{I тохиолдол}}$ $D > 0$: $\quad \lambda_1 = \dfrac{1}{2}\left(-a + \sqrt{D}\right), \quad \lambda_2 = \dfrac{1}{2}\left(-a - \sqrt{D}\right)$

Шийд: $\boxed{y = f(n) = C_1(1 + \lambda_1)^n + C_2(1 + \lambda_2)^n}$

$\boxed{\textbf{II тохиолдол}}$ $D = 0$: $\quad \lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda = -\dfrac{a}{2}$

Шийд: $\boxed{y = f(n) = C_1(1 + \lambda)^n + C_2 n(1 + \lambda)^n}$

$\boxed{\textbf{III тохиолдол}}$ $D < 0$: $\quad \alpha := -\dfrac{a}{2}, \quad \beta := \dfrac{1}{2}\sqrt{-D}$

Шийд:

$$\boxed{y = f(n) = C_1\left[(1 + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{\frac{n}{2}} \cos\varphi n + C_2\left[(1 + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{\frac{n}{2}} \sin\varphi n}$$

энд $\tan\varphi = \dfrac{\beta}{1 + \alpha} \quad (\alpha \neq -1)$ ба $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \quad (\alpha = -1)$.

II эрэмбийн нэгэн төрлийн бус ялгаварт тэгшитгэлийн ерөнхий шийд

Нэгэн төрлийн бус тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь нэгэн төрлийн тэгшитгэлийн ерөнхий шийд болон $(*)$ нэгэн төрлийн бус тэгшитгэлийн тухайн шийдийн нийлбэр байна. Баруун тал $c(n)$-ийн тодорхой бүтцээс хамаарсан чиг хандлагын функцэд харгалзах *чиг хандлагын аргаар* тухайн шийдийг олж болно. Үл мэдэгдэх коэффициентууд нь *харьцуулалтын* үр дүнд тооцоологддог.

баруун тал	дөхөх шийд
$c(n) = a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0$	$C(n) = A_k n^k + \ldots + A_1 n + A_0$
$c(n) = a\cos\omega n + b\sin\omega n$ ($\alpha\neq 0$ буюу $\beta\neq\omega$; III тох. үз, х. 101)	$C(n) = A\cos\omega n + B\sin\omega n$

Эдийн засгийн загварууд

$y(n)$ – үндэсний орлого	$c(n)$ – хэрэглээ
$i(n)$ – хувийн хөрөнгө оруулалт	H – нийгмийн зардал

Загварын томъёолол $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$y(n)=c(n)+i(n)+H$	үндэсний орлого нь хэрэглээ, хувийн хөрөнгө оруулалт, нийгмийн зардал гэж хуваагдана
$c(n)=\alpha_1 y(n-1)$	$0 < \alpha_1 < 1$; хэрэглээ нь өнгөрсөн үеийн үндэсний орлоготой пропорциональ (α_1 *үржигч*)
$i(n)=\alpha_2[c(n)-c(n-1)]$	$\alpha_2 > 0$; хувийн хөрөнгө оруулалт нь хэрэглээний өсөлттэй пропорциональ (α_2 *хурдасгагч*)

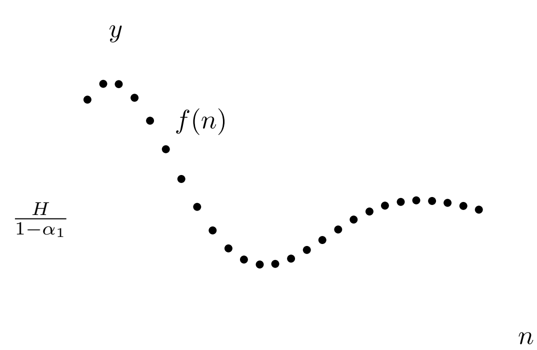
Самуэльсэний үржигч хурдасгагчтай загвар

$$\boxed{\Delta^2 y + (2-\alpha_1-\alpha_1\alpha_2)\Delta y + (1-\alpha_1)y = H}$$

$\alpha_1 \le \alpha_2 < 1$ үеийн шийд :

$$\boxed{y = f(n) = \frac{H}{1-\alpha_1} + (\alpha_1\alpha_2)^{\frac{n}{2}}(C_1\cos\varphi n + C_2\sin\varphi n)}$$

• f шийд нь хязгаар $\dfrac{H}{1-\alpha_1}$-ийн орчинд буурах далайцтай хэлбэлзэнэ.



Тогтмол коэффициенттэй n-р эрэмбийн шугаман ялгаварт тэгшитгэл

$$\boxed{y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = c(k)} \qquad (k \in \mathbb{N}) \qquad (1)$$

• $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ тогтмол коэффициентуудтай (1) хэлбэрийн шугаман ялгаварт тэгшитгэлийг $a_0 \neq 0$ үед *n-р эрэмбийн* гэнэ.

• Хэрэв n-ийн хувьд дараалсан k анхны утгууд өгөгдсөн бол n-р эрэмбийн (1) ялгаварт тэгшитгэл нь цор ганц $y_k = f(k)$ шийдтэй.

• $f_1(k)$, $f_2(k)$,…, $f_n(k)$ нь

$$\boxed{y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k \;=\; 0} \qquad (2)$$

нэгэн төрлийн ялгаварт тэгшитгэлийн дурын шийдүүд бол $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ (дурын) тогтмолууд бүхий

$$\boxed{f(k) \;=\; \gamma_1 f_1(k) \;+\; \gamma_2 f_2(k) \;+\; \ldots \;+\; \gamma_n f_n(k)} \qquad (3)$$

шугаман эвлүүлэг нь мөн (2) нэгэн төрлийн ялгаварт тэгшитгэлийн шийд болно.

• Хэрэв (2) тэгшитгэлийн $f_1(k)$, $f_2(k)$,…, $f_n(k)$, n шийдүүд нь *фундаментал систем*, ө. х. $\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & \ldots & f_n(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(n-1) & f_2(n-1) & \ldots & f_n(n-1) \end{vmatrix} \neq 0$ нөхцөл биелдэг бол (3) нь (2) нэгэн төрлийн ялгаварт тэгшитгэлийн ерөнхий шийд байна.

• Хэрэв $y_{k,s}$ нь (1) нэгэн төрлийн бус шугаман ялгаварт тэгшитгэлийн тухайн шийд, $y_{k,h}$ нь харгалзах (2) нэгэн төрлийн шугаман ялгаварт тэгшитгэлийн ерөнхий шийд бол (1) нэгэн төрлийн шугаман бус ялгаварт тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь $\boxed{y_k = y_{k,h} + y_{k,s}}$ хэлбэрт бичигдэнэ.

n-р эрэмбийн нэгэн төрлийн ялгаварт тэгшитгэлийн ерөнхий шийд

$$\boxed{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \;=\; 0}$$

характеристик тэгшитгэлийн язгуурууд нь $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ байг. Тэгвэл эдгээр язгууруудын төрлөөс хамаарч тодорхойлогдох $f_1(k), \ldots, f_n(k)$ гэсэн n шугаман хамааралгүй шийдүүд нь фундаментал систем үүсгэнэ. (► II эрэмбийн ялгаварт тэгшитгэлтэй төстэйгээр, х. 100).

n-р эрэмбийн нэгэн төрлийн бус ялгаварт тэгшитгэлийн тухайн шийд

(1) нэгэн төрлийн бус ялгаварт тэгшитгэлийн тухайн шийдийг олоход ихэнх тохиолдолд чиг хандлагын арга үр дүнтэй байдаг. Энэ тохиолдолд чиг хандлагын функцийг баруун тал нь ямар хэлбэртэйгээс хамаарч сонгоно (► II эрэмбийн ялгаварт тэгшитгэл, х. 100). Чиг хандлагын

функцийг (1)-д орлуулан, *коэффициентуудын харьцуулалт* хийх замаар үл мэдэгдэх коэффициентуудыг тодорхойлно.

Олон хувьсагчийн функцийн дифференциал тоолол

Үндсэн ойлголт

$\mathbb{R}^n$ дэх функц

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ векторыг $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ бодит тоонд харгалзуулах нэг утгатай буулгалтыг *(бодит) олон хувьсагчийн бодит тоон функц* гэнэ. Тэмдэглэгээ: $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$.

$D_f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, y \in \mathbb{R} : y = f(\boldsymbol{x})\}$	–	тодорхойлогдох муж
$W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, \boldsymbol{x} \in D_f : y = f(\boldsymbol{x})\}$	–	утгын муж

График дүрслэл

(x_1, x_2, y) координатын системд x_1, x_2 үл хамаарах 2 хувьсагчийн $y = f(x_1, x_2)$ функцуудыг 3 хэмжээст дүрслэлд харуулж болно.

f функцийг тасралтгүй гэж үзвэл (x_1, x_2, y) цэгүүдийн олонлог нь *гадаргууг* үүсгэнэ. $f(x_1, x_2) = C$ =тогтмол байх (x_1, x_2) цэгүүдийн олонлогийг f функцийн C өндөрт (түвшин) харгалзах *өндрийн шугам* эсвэл *түвшний шугам* гэнэ. Эдгээр шугамууд x_1, x_2 хавтгайд байрладаг.

y

x_1 x_2

$\mathbb{R}^n$ огторгуйн цэгүүдийн олонлог

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ нь харгалзан $(x_1, \ldots, x_n)$ болон $(y_1, \ldots, y_n)$ координаттай $\mathbb{R}^n$ огторгуйн цэгүүд байг. Энэ цэгүүдийг тэдгээр рүү чиглэсэн $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ болон $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ бэхлэгдсэн векторуудтай адилтгаж болно.

$\lVert\boldsymbol{x}\rVert_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$	–	$\boldsymbol{x}$ векторын Евклидийн норм, мөн $\lvert x\rvert$-ээр тэмдэглэнэ ► вектор, х. 118
$\lVert\boldsymbol{x}\rVert_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lvert x_i\rvert$	–	$\boldsymbol{x}$ векторын нийлбэр норм
$\lVert\boldsymbol{x}\rVert_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \lvert x_i\rvert$	–	$\boldsymbol{x}$ векторын максимум норм
$\lVert\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rVert$	–	$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ цэгүүдийн хоорондох зай
$U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \lVert\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\rVert < \varepsilon\}$	–	$\boldsymbol{x}$ цэгийн ε орчин, $\varepsilon > 0$

• Дээрх нормуудын хувьд $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_2 \le \|\boldsymbol{x}\|_1$ тэнцэтгэл биш хүчинтэй; $\|\boldsymbol{x}\|$-ээр дурын норм, ихэнх тохиолдолд $\|\boldsymbol{x}\|_2$ гэсэн Евклидийн нормыг тэмдэглэдэг.

• Хэрэв M олонлогт агуулагдах ямар нэг $U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ орчин олдож байвал $\boldsymbol{x}$-г $M \subset \mathbb{R}^n$ олонлогийн *дотоод цэг* гэнэ. M-ийн бүх дотоод цэгүүдийн олонлогийг M-ийн *дотор* гэж нэрлээд $\operatorname{int} M$-ээр тэмдэглэе. $U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ орчин бүрт $\boldsymbol{x}$-ээс ялгаатай M-ийн цэг олддог бол $\boldsymbol{x}$-ийг M олонлогийн *хязгаарын* цэг гэнэ.

• $\operatorname{int} M = M$ бол M олонлог нь *задгай*, харин бүх хязгаарын цэгүүдээ агуулдаг бол *битүү* гэж нэрлэгдэнэ.

• Хэрэв $\boldsymbol{x} \in M$ бүрийн хувьд $\|\boldsymbol{x}\| \le C$ байх C тоо олддог бол $M \subset \mathbb{R}^n$ олонлогийг *зааглагдсан* гэнэ.

Хязгаар болон тасралтгүй чанар

Цэгэн дараалал

$\mathbb{N}$-г $\mathbb{R}^n$-д буулгасан буулгалтыг $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *цэгэн дараалал* гэнэ. Дараалын $\boldsymbol{x}_k$ элементүүдийн байгуулагчуудыг $x_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$ гэж тэмдэглэе.

$\boldsymbol{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k \iff \lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| = 0$	– $\{\boldsymbol{x}_k\}$ цэгэн дарааллын $\boldsymbol{x}$ хязгаарын цэг рүү нийлэлт

• $\{\boldsymbol{x}_k\}$ цэгэн дараалал $\boldsymbol{x}$ хязгаарын цэг рүү нийлэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\{x_i^{(k)}\}$, $i = 1, \ldots, n$ дараалал бүр нь $\boldsymbol{x}$-ийн i-р байгуулагч x_i рүү нийлэх явдал.

Тасралтгүй чанар

$\boldsymbol{x}_k \ne \boldsymbol{x}_0$ болон $\boldsymbol{x}_k \in D_f$ байх, $\boldsymbol{x}_0$ цэг рүү нийлдэг $\{\boldsymbol{x}_k\}$ цэгэн дарааллын хувьд $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = a$ харьцаа биелдэг бол $a \in \mathbb{R}$ тоог f функцийн $\boldsymbol{x}_0$ цэг дээрх *хязгаар* гэнэ. Тэмдэглэгээ: $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = a$.

• f функц $\boldsymbol{x}_0$ цэг дээр хязгаартай (ө. х. $\boldsymbol{x}_0$ руу нийлдэг ямар нэг дараалын хувьд харгалзах функцийн утгын дараалал нь нэгэн ижил утга руу нийлдэг) бөгөөд тэр нь $\boldsymbol{x}_0$ цэг дээрх функцийн утгатай тэнцүү бол уг функцийг $\boldsymbol{x}_0 \in D_f$ *цэг дээр тасралтгүй* гэнэ:

$$\boxed{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) \iff \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}_0)\ \forall \{\boldsymbol{x}_k\} \text{ энд } \boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0}$$

• Эн чацуу тодорхойлолт: Хэрэв ямар нэг дурын $\varepsilon > 0$ тооны хувьд $\delta > 0$ олдоод $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$ гэдгээс $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$ нөхцөл биелнэ гэж мөрддөг бол f функц $\boldsymbol{x}_0$ *цэг дээр тасралтгүй.*

• f функц $\boldsymbol{x} \in D_f$ цэг бүр дээр тасралтгүй бол түүнийг D_f дээр *тасралтгүй* гэнэ.

• Хэрэв f, g функцууд нь харгалзан D_f, D_g тодорхойлогдох мужууд дээрээ тасралтгүй бол $f \pm g$, $f \cdot g$ болон $\dfrac{f}{g}$ функцууд нь $D_f \cap D_g$ дээр тасралтгүй, сүүлийн функцийн хувьд энэ чанар зөвхөн $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ байх $\boldsymbol{x}$-ийн утгууд дээр хүчинтэй.

Нэгэн төрлийн функц

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha \cdot f(x_1, \ldots, x_n) \quad \forall\, \lambda \geq 0$$

– f нь $\alpha \geq 0$ зэргийн нэгэн төрөл

$$f(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) = \lambda^{\alpha_i} f(x_1, \ldots, x_n) \;\; \forall\, \lambda \geq 0$$

– f нь $\alpha_i \geq 0$ зэргийн тухайн нэгэн төрөл

$\alpha = 1$: шугамлаг нэгэн төрөл

$\alpha > 1$: дээд эрэмбийн шугамлаг нэгэн төрөл

$\alpha < 1$: доод эрэмбийн шугамлаг нэгэн төрөл

• Шугамлаг нэгэн төрлийн функцийн хувьд хувьсагчуудын пропорциональ өсөлтөд функцийн утгын пропорциональ өсөлт харгалзана. Энэ шалтгаанаар мөн орлуулалтын тогтмол мэдрэмжтэй функцууд гэж нэрлэгддэг.

Олон хувьсагчийн функцийн дифференциалчлал

Дифференциалчлалын ойлголт

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0})^\top \Delta\boldsymbol{x}}{\|\Delta\boldsymbol{x}\|} = 0$$

нөхцлийг хангах $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0})$ вектор олддог бол $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ функцийг $\boldsymbol{x}_0$ цэг дээр *(бүтэн) дифференциалчлагддаг* функц гэнэ.

• Хэрэв дээрх $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0})$ вектор олддог бол түүнийг *градиент гэж нэрлээд* $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ эсвэл grad $f(\boldsymbol{x}_0)$-ээр тэмдэглэе. f функц $\boldsymbol{x} \in D_f$ цэг дээр дифференциалчлагддаг бол түүнийг D_f дээр *дифференциалчлагддаг* гэнэ.

Тухайн уламжлал

Хэрэв $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ функцийн хувьд $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^\top$ цэг дээр

$$\lim_{\Delta x_i\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\Delta x_i}$$

хязгаар оршдог бол түүнийг f функцийн $\boldsymbol{x}_0$ цэг дээрх x_i хувьсагчаар авсан *(I эрэмбийн) тухайн уламжлал* гэж нэрлээд $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$, $f_{x_i}(\boldsymbol{x}_0)$ эсвэл $\partial_{x_i} f$-ээр тэмдэглэдэг.

• f функц нь $\boldsymbol{x} \in D_f$ цэг бүр дээр бүх хувьсагчийнхаа хувьд тухайн уламжлалуудтай бол түүнийг *тухайн уламжлагддаг* гэнэ. Бүх тухайн уламжлалууд нь тасралтгүй тохиолдолд f функц нь *тасралтгүй тухайн дифференциалчлагддаг* гэж нэрлэгдэнэ.

• Тухайн уламжлал бодох үед дифференциалчилж байгаагаас бусад бүх хувьсагчуудыг тогтмол гэж үзнэ. Иймээс нэг хувьсагчийн функцийн дифференциалчлах дүрэм хэрэглэгддэг (тухайлбал тогтмол нэмэгдэхүүн болон тогтмол үржигдэхүүнтэй үед дифференциалчлах дүрэм , ► х. 63, 65).

Градиент

Хэрэв $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ функц нь D_f дээр тасралтгүй тухайн дифференциалчлагддаг бол мөн уг мужид бүтэн дифференциалчлагдана, энд градиент нь тухайн уламжлалуудаас зохиосон багана вектор:

$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)^\top$	– $\boldsymbol{x}$ цэг дээрх f функцийн градиент (мөн $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})$ гэж тэмдэглэнэ)

• Хэрэв f функц бүтэн дифференциалчлагддаг бол

$$\boxed{f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{r}) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{x})}{t}}$$

чиглэлийн уламжлалын хувьд (энэ тохиолдолд дурын $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n$ чиглэлийн хувьд оршдог) $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{r}) = \nabla f(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{r}$ тэнцэтгэл хүчинтэй, $\nabla f(\boldsymbol{x})$ нь f-ийн $\boldsymbol{x}$ цэг дээрх эрс буулгалтын чиглэл юм.

• Градиент $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ нь $n = 2$ үед f-ийн $f(\boldsymbol{x}_0)$ түвшин дэх шугамын $\boldsymbol{x}_0$ цэгт татсан шүргэгчтэй, эсвэл $n > 2$ үед $\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)\}$ олонлогийн $\boldsymbol{x}_0$ цэгт харгалзах $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ шүргэгч хавтгайтай ортогональ байна. $n = 2$ үед түвшний шугамын шүргэгчийн чиглэл дэх чиглэлийн уламжлал нь тэг утгатай байх бөгөөд энэ нь функцийн шугаман дөхөлтийн утга энэ чиглэлүүдэд тогтмол болохыг харуулна.

Давхар функцийн уламжлалын дүрэм

n хувьсагчийн $u_k = g_k(x_1,\dots,x_n)$, $k=1,\dots,m$ болон m хувьсагчийн f функцууд харгалзан $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)^\top$, $\boldsymbol{u} = (u_1,\dots,u_m)^\top$ цэгүүд дээр бүтэн дифференциалчлагддаг байг. Тэгвэл

$$F(x_1,\dots,x_n) = f(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n))$$

давхар функц нь $\boldsymbol{x}$ цэг дээр бүтэн дифференциалчлагдана, үүнд

$$\nabla F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G'}(\boldsymbol{x})^\top \nabla f(\boldsymbol{u}) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} F_{x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ F_{x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g_1(\boldsymbol{x}) \ \dots \ \partial_{x_1} g_m(\boldsymbol{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \partial_{x_n} g_1(\boldsymbol{x}) \ \dots \ \partial_{x_n} g_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{u_1}(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ f_{u_m}(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_k}(g(\boldsymbol{x})) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$ – байгуулагчаар

Тухайн тохиолдол $m = n = 2$; $f(u,v)$ нь $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ байх функц :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

• $\boldsymbol{G'}(\boldsymbol{x})$ нь *функцэн матриц* эсвэл $\{g_1,\dots,g_m\}$ функцуудын системийн *Якобын матриц* гэж нэрлэгдэнэ.

Дээд эрэмбийн уламжлалууд

Тухайн уламжлалууд нь мөн функцууд учир тодорхой нөхцөл биелэх үед тухайн уламжлалуудтай байна.

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)$$ – II эрэмбийн тухайн уламжлалууд

$$\frac{\partial^3 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = f_{x_i x_j x_k}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$ – III эрэмбийн тухайн уламжлалууд

Шварцийн теорем (дифференциалчлалын байр солих). Хэрэв $f_{x_i x_j}$ болон $f_{x_j x_i}$ тухайн уламжлалууд нь $\boldsymbol{x}$ цэгийн орчинд тасралтгүй бол дараах харьцаа хүчинтэй: $\boxed{f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) = f_{x_j x_i}(\boldsymbol{x})\,.}$

• Ерөнхийлөл: Хэрэв k-р эрэмбийн тухайн уламжлалууд оршдог бөгөөд тэдгээр нь тасралтгүй бол тухайн уламжлалуудыг тооцоолоход дифференциалчлах дараалал нөлөөлөхгүй.

Гессийн матриц

$H_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{x}) \\ f_{x_2x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_2x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & f_{x_2x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_nx_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$	– 2 удаа тухайн дифференциалчлагддаг f функцийн $\boldsymbol{x}$ цэг дээрх Гессийн матриц

• Шварцийн теоремийн нөхцөл биелэх үед Гессийн матриц нь тэгш хэмтэй.

Бүтэн дифференциал

Хэрэв $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ функц нь $\boldsymbol{x}_0$ цэг дээр бүтэн дифференциалчлагддаг (► х. 107) бол дараах харьцаа биелнэ:

$$\Delta f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)^\top \Delta\boldsymbol{x} + \mathrm{o}(\|\Delta\boldsymbol{x}\|)$$

Үүнд $\mathrm{o}(\cdot)$ нь $\lim\limits_{\Delta\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \dfrac{\mathrm{o}(\|\Delta\boldsymbol{x}\|)}{\|\Delta\boldsymbol{x}\|} = 0$ чанарыг хангах Ландаугийн тэмдэгт.

$\mathrm{d}x_i$, $i = 1, \dots, n$-ээр үл хамаарах хувьсагчийн n байгуулагчуудын өөрчлөлтүүдийг тэмдэглэвэл f функцийн $\boldsymbol{x}_0$ цэг дээрх бүтэн дифференциал

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^\top \Delta\boldsymbol{x} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}x_n$$

нь функцийн гол өсөлтийг тодорхойлно (шугаман дөхөлт); $\mathrm{d}x_i$ – дифференциал, Δx_i – төгсгөлөг (бага) өөрчлөлт:

$$\Delta f(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \cdot \Delta x_i$$

Шүргэгч хавтгайн тэгшитгэл

Хэрэв $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ функц $\boldsymbol{x}_0$ цэг дээр дифференциалчлагддаг бол түүний график нь $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))$ (шугаман дөхөлт) цэг дээр

$$\begin{pmatrix} \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \\ -1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \\ y - f(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{эсвэл} \qquad y = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

тэгшитгэл бүхий *шүргэгч хавтгайтай* байна .

Тухайн мэдрэмж

$f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ функц тухайн дифференциалчлагддаг бол хэмжээсгүй хэмжигдэхүүн $\varepsilon_{f,x_i}(\boldsymbol{x})$ (*тухайн мэдрэмж*) нь i-р байгуулагч x_i-ийн харьцангуй өөрчлөлтөөс хамаарах функцийн утгын харьцангуй өсөлтийг ойролцоогоор илэрхийлдэг:

$\boxed{\varepsilon_{f,x_i}(\boldsymbol{x}) = f_{x_i}(\boldsymbol{x})\dfrac{x_i}{f(\boldsymbol{x})}}$	**f функцийн $\boldsymbol{x}$ цэг дээрх $\boldsymbol{i}$-р тухайн мэдрэмж**

Тухайн мэдрэмжтэй холбоотой харьцаанууд

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \alpha \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$	–	Эйлерийн нэгэн төрлийн харьцаа; f нь α зэргийн нэгэн төрлийн функц
$\varepsilon_{f,x_1}(\boldsymbol{x}) + \ldots + \varepsilon_{f,x_n}(\boldsymbol{x}) = \alpha$	–	тухайн мэдрэмжүүдийн нийлбэр= нэгэн төрлийн зэрэг
$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{f_1,x_1}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \varepsilon_{f_1,x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \varepsilon_{f_2,x_1}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \varepsilon_{f_2,x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{f_m,x_1}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \varepsilon_{f_m,x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$	–	$f_1, \ldots, f_m$ функцийн мэдрэмжүүдийн матриц

• $\varepsilon_{f_i,x_j}(\boldsymbol{x})$ хэмжигдэхүүн нь $i = j$ үед *шууд* , $i \neq j$ үед *нийт* мэдрэмж гэж нэрлэгдэнэ.

Заагланттгүй экстремаль бодлого

Хүрэлцээтэй олон удаа (тухайн) дифференциалчлагддаг $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ функц өгөгдсөн байг. f-ийн локаль экстремумын цэг (▶ х. 47) $\boldsymbol{x}_0$-ийг олох бодлого авч үзье, үүнд $\boldsymbol{x}_0$ нь D_f-ийн дотоод цэг.

Экстремумын зайлшгүй нөхцөл

$\boldsymbol{x}_0$ локаль экстремумын цэг	$\Longrightarrow \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \iff f_{x_i}(\boldsymbol{x}_0) = 0,\ i = 1, \ldots, n$	
$\boldsymbol{x}_0$ локаль минимумын цэг	$\Longrightarrow \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \wedge H_f(\boldsymbol{x}_0)$	сөрөг биш тодорхойлогдсон
$\boldsymbol{x}_0$ локаль максимумын цэг	$\Longrightarrow \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \wedge H_f(\boldsymbol{x}_0)$	эерэг биш тодорхойлогдсон

• $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$ байх $\boldsymbol{x}_0$ цэгүүдийг f функцийн *сэжигтэй цэгүүд* гэнэ. $\boldsymbol{x}_0$ сэжигтэй цэгийн ямар нэг орчинд $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) < f(\boldsymbol{y})$ байхаар $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ цэгүүд олддог бол $\boldsymbol{x}_0$ нь f функцийн *суудлын цэг* гэж нэрлэгдэнэ. Суудлын цэгүүд нь экстремумын цэг болохгүй.

• D_f мужийн хилийн цэгүүд болон f функцийн уламжлал оршдоггүй цэгүүдийг тусад нь судлах шаардлагатай (жишээ нь $\boldsymbol{x}_0$ цэгийн орчинд функцийн утгуудыг шинжлэх замаар). Эерэг болон сөрөг биш тодорхойлогдсон матрицийн талаар ► х. 124-д үз.

Экстремумын хүрэлцээтэй нөхцөл

$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \;\wedge\; H_f(\boldsymbol{x}_0)$ эерэг тодорхойлогдсон	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{x}_0$ локаль минимумын цэг
$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \;\wedge\; H_f(\boldsymbol{x}_0)$ сөрөг тодорхойлогдсон	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{x}_0$ локаль максимумын цэг
$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \;\wedge\; H_f(\boldsymbol{x}_0)$ аль нь ч биш	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{x}_0$ суудлын цэг

Тухайн тохиолдол $n = 2$

$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$:

$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \;\wedge\; \mathcal{A} > 0 \;\wedge\; f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}_0) > 0$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{x}_0$ локаль минимумын цэг
$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \;\wedge\; \mathcal{A} > 0 \;\wedge\; f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}_0) < 0$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{x}_0$ локаль максимумын цэг
$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \;\wedge\; \mathcal{A} < 0$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{x}_0$ суудлын цэг

Энд $\mathcal{A} = \det H_f(\boldsymbol{x}_0) = f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdot f_{x_2x_2}(\boldsymbol{x}_0) - [f_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}_0)]^2$. $\mathcal{A} = 0$ ед $\boldsymbol{x}_0$-ийг сэжигтэй цэг эсэх талаар дүгнэлт хийх боломжгүй.

Заагалалттай экстремаль бодлого

Нэг эсвэл 2 удаа тасралтгүй (тухайн) дифференциалчлагддаг $f : D \to \mathbb{R}$, $g_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m < n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ функцууд өгөгдсөн ба $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ байг. Заагалалттай экстремаль бодлогын эктремумын цэгүүдийг олох бодлого авч үзье:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\boldsymbol{x}) \quad \longrightarrow \quad \max / \min \\ g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \;\ldots,\; g_m(\boldsymbol{x}) = 0 \end{array}} \tag{C}$$

• $G = \{\boldsymbol{x} \in D \,|\, g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, g_m(\boldsymbol{x}) = 0\}$ нь (C) бодлогын *боломжит цэгүүдийн* олонлог юм.

• $\operatorname{rank} \boldsymbol{G'} = m$ байх *регуляр нөхцөл* биелдэг байг, энд $\boldsymbol{G'}$ нь $m \times n$ хэмжээст, $\{g_1, \ldots, g_m\}$ ► функцуудын системийн функцэн матриц болон $\boldsymbol{G'}$ матрицийн m шугаман хамааралгүй багануудыг $i_1, \ldots, i_m$, үлдэх багануудыг $i_{m+1}, \ldots, i_n$ гэж дугаарлая.

Ялган зайлуулах арга

1. x_{i_j}, $j=1,\dots,m$ хувьсагчуудыг (C) бодлогын $g_i(\boldsymbol{x})=0$, $i=1,\dots,m$ заагалалтуудаас ялгах: $x_{i_j} = \tilde{g}_{i_j}(x_{i_{m+1}},\dots,x_{i_n})$.
2. x_{i_j}, $j = 1,\dots,m$ хувьсагчуудыг f функцэд орлуулах: $f(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}(x_{i_{m+1}},\dots,x_{i_n})$.
3. $n - m$ хувьсагчтай $\tilde{f}$ функцийн сэжигтэй цэгүүдийг олж экстремумын төрлийг тодорхойлох (► х. 111 дахь нөхцлүүд).
4. (C) бодлогын сэжигтэй цэгүүдийг олохын тулд 1. алхам ёсоор үлдэгдэл x_{i_j}, $j = 1,\dots,m$ гэсэн m хувьсагчуудыг тооцоолох.

• $\tilde{f}$ функцийн хувьд гаргасан экстремумын төрлийн дүгнэлт нь (C) бодлогын хувьд мөн хүчинтэй.

Лагранжийн үржигдэхүүний арга

1. $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ заагалалт бүрт $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,m$ гэсэн *Лагранжийн үржигдэхүүнийг* (олох ёстой) харгалзуулах.
2. (C) бодлогод харгалзах *Лагранжийн функцийг* бичих, энд $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)^\top$:
$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}).$$
3. $\boldsymbol{x}$ болон $\boldsymbol{\lambda}$ хувьсагчаас хамаарсан $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$ функцийн хувьд $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda_0})$ сэжигтэй цэгүүдийг
$$\boxed{L_{x_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = 0,\ \ i=1,\dots,n; \quad L_{\lambda_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ \ i=1,\dots,m}$$
(ерөнхий тохиолдолд шугаман бус) тэгшитгэлийн системээс олох.

   $\boldsymbol{x}_0$ нь (C) бодлогын сэжигтэй цэг болно.
4. Хэрэв $n \times n$ хэмжээст $\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$ (L функцийн Гессийн матрицийн x хувьсагчаар авсан хэсэг) нь $T=\{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\boldsymbol{x}_0)^\top \boldsymbol{z} = 0,\ i = 1,\dots,m\}$ олонлог дээр эерэг тодорхойлогдсон , тухайлбал
$$\boldsymbol{z}^\top \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda_0})\boldsymbol{z} > 0 \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in T,\ \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0},$$
бол $\boldsymbol{x}_0$ нь (C) бодлогын хувьд локаль минимумын, $\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$ нь сөрөг тодорхойлогдсон тохиолдолд $\boldsymbol{x}_0$ локаль максимумын цэг болно.

Лагранжийн үржигдэхүүний эдийн засгийн тайлбар

Дараах (өдөөгч параметртэй) бодлогын экстремумын цэг $\boldsymbol{x}_0$ нь

$$\boxed{\begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}) \to \max / \min; \\ & g_i(\boldsymbol{x}) - b_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}} \qquad (\mathrm{C}_{\boldsymbol{b}})$$

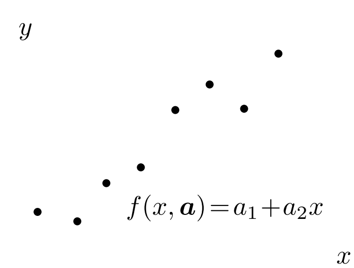
$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0$ үед цор ганц оршдог бөгөөд $\boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)^\top$ нь $\boldsymbol{x}_0$ цэгт харгалзах Лагранжийн үржигдэхүүний вектор байг. Мөн $\operatorname{rank} \boldsymbol{G'} = m$ гэсэн регуляр нөхцөл биелдэг гэж үзье (х. 112-ийг үз). $f^*(\boldsymbol{b})$-оор $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^\top$ баруун талын вектороос хамаарсан $(\mathrm{C}_{\boldsymbol{b}})$ бодлогын оновчтой утгыг тэмдэглэвэл

$$\boxed{\frac{\partial f^*}{\partial b_i}(\boldsymbol{b_0}) = -\lambda_i^0,}$$

ө. х. $-\lambda_i^0$ нь $(\mathrm{C}_{\boldsymbol{b}})$ бодлогын оновчтой утгын өөрчлөлт дэх баруун талын i-р байгуулагчийн нөлөөг (ойролцоогоор) илэрхийлнэ.

Хамгийн бага квадратын арга

(x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$ (x_i – хэмжилтийн буюу хугацааны цэгүүд, y_i – хэмжилтийн утгууд) хос цэгүүд өгөгдсөн байг. Хэмжилтийн утгуудыг боломжит сайн дөхсөн $y = f(x, \boldsymbol{a})$ *хандлагын* функцийг олох, үүнд $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_M)$ вектор оновчтой байдлаар хандлагын функцийг тодорхойлох M параметрээс бүрдэнэ.



- $[z_i] = \sum\limits_{i=1}^{N} z_i$ нь *Гауссийн хаалтыг* тэмдэглэе.

$S = \sum\limits_{i=1}^{N} (f(x_i, \boldsymbol{a}) - y_i)^2 \longrightarrow \min$ –	алдааны квадратуудын нийлбэрийг минимальчлах
$\sum\limits_{i=1}^{N} (f(x_i, \boldsymbol{a}) - y_i) \cdot \dfrac{\partial f(x_i, \boldsymbol{a})}{\partial a_j} = 0$ –	минимумын зайлшгүй нөхцөл (нормаль тэгшитгэл) , $j = 1, 2, \ldots, M$

- Минимумын зайлшгүй нөхцөл нь $\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0$ харьцаанаас гарах бөгөөд f хандлагын функцийн тодорхой хэлбэрээс хамаарна. $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ байх ерөнхий хэлбэрийн $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ хандлагын функцийн хувьд төстэй тэгшитгэлүүд бичигддэг.

Хандлагын функцийн зарим хэлбэр

$f(x, a_1, a_2) = a_1 + a_2 x$	– шугаман функц
$f(x, a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$	– квадрат функц
$f(x, \boldsymbol{a}) = \sum\limits_{j=1}^{M} a_j \cdot g_j(x)$	– өргөтгөсөн шугаман функц

• Дээрх тохиолдлуудад **нормаль тэгшитгэлүүдийн шугаман систем** гарна:

шугаман хандлагын функц	квадрат хандлагын функц
$\begin{aligned} a_1 \cdot N \quad &+ a_2 \cdot [x_i] \;= [y_i] \\ a_1 \cdot [x_i] &+ a_2 \cdot [x_i^2] = [x_i y_i] \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_1 \cdot N \quad &+ a_2 \cdot [x_i] \; + a_3 \cdot [x_i^2] = [y_i] \\ a_1 \cdot [x_i] \; &+ a_2 \cdot [x_i^2] + a_3 \cdot [x_i^3] = [x_i y_i] \\ a_1 \cdot [x_i^2] &+ a_2 \cdot [x_i^3] + a_3 \cdot [x_i^4] = [x_i^2 y_i] \end{aligned}$

Шугаман хандлагын функцийн хувьд ил шийд

$$a_1 = \frac{[x_i^2] \cdot [y_i] - [x_i y_i] \cdot [x_i]}{N \cdot [x_i^2] - [x_i]^2}, \qquad a_2 = \frac{N \cdot [x_i y_i] - [x_i] \cdot [y_i]}{N \cdot [x_i^2] - [x_i]^2}$$

Хялбарчлал

• $x_i' = x_i - \frac{1}{N}[x_i]$ хувиргалтаар $[x_i'] = 0$ болох учир нормаль тэгшитгэлийн систем хялбарчлагдана.

• $y = f(x) = a_1 \cdot \mathrm{e}^{a_2 x}$ **илтгэгч** дөхөлтийн функцийн хувьд $T(y) = \ln y$ хувиргалтаар ($f(x) > 0$ үед) нормаль тэгшитгэлүүдийн шугаман системд шилждэг.

• $f(x) = a \cdot (1 + b\mathrm{e}^{-cx})^{-1}$ $(a, b, c > 0)$ **логистик функцийн** хувьд a мэдэгддэг бол $\frac{a}{y} = b\mathrm{e}^{-cx} \implies Y = \ln \frac{a-y}{y} = \ln b - cx$ хувиргалт нь $a_1 = \ln b$, $a_2 = -c$ гэж орлуулах замаар нормаль тэгшитгэлүүдийн шугаман системд шилжүүлнэ.

Алдааны тархалт

Алдааны тархалт нь функцийн утгын тооцоонд гарах үл хамаарах хувьсагчийн алдааны нөлөөг судална.

Тэмдэглэгээ

жинхэнэ утга	–	$y, x_1, \ldots, x_n$ энд $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$
ойролцоо утга	–	$\tilde{y}, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, энд $\tilde{y} = f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$
абсолют алдаа	–	$\delta y = \tilde{y} - y, \quad \delta x_i = \tilde{x}_i - x_i, \quad i = 1, \ldots, n$
абсолют алдааны хил Δ	–	$\lvert\delta y\rvert \le \Delta y, \quad \lvert\delta x_i\rvert \le \Delta x_i, \quad i = 1, \ldots, n$
харьцангуй алдаа	–	$\frac{\delta y}{y}, \ \frac{\delta x_i}{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$
харьцангуй алдааны хил	–	$\left\lvert\frac{\delta y}{y}\right\rvert \le \frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}, \quad \left\lvert\frac{\delta x_i}{x_i}\right\rvert \le \frac{\Delta x_i}{\lvert x_i\rvert}, \quad i = 1, \ldots, n$

• f функц бүтэн дифференциалчлагддаг бол түүний абсолют алдаан дахь үл хамаарах хувьсагчийн алдаа δx_i-ийн тархалтын хувьд:

$$\Delta y \approx \left|\frac{\partial f(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \ldots + \left|\frac{\partial f(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_n}\right| \Delta x_n$$

– $f(\tilde{x})$-ийн абсолют алдааны хил

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx \left|\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{y}} \cdot \frac{\partial f(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_1}\right| \cdot \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \ldots + \left|\frac{\tilde{x}_n}{\tilde{y}} \cdot \frac{\partial f(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_n}\right| \cdot \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

– $f(\tilde{x})$-ийн харьцангуй алдааны хил

Эдийн засгийн хэрэглээ

Кобб-Дугласын үйлдвэрлэлийн функц

$y = f(\boldsymbol{x}) = c \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$	x_i – i-р хүчин зүйлийн орц
$(c, a_i \ge 0)$	y – гарц

• Кобб-Дугласын функц нь $r = a_1 + \ldots + a_n$ зэргийн ► нэгэн төрлийн функц. $f_{x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{a_i}{x_i} f(\boldsymbol{x})$, ө.х. $\varepsilon_{f,x_i}(\boldsymbol{x}) = a_i$ биелэх учир a_i зэргүүд нь *үйлдвэрлэлийн (тухайн) мэдрэмжүүд* болно.

Орлуулалтын ахиу хурд

Үйлдвэрлэлийн функц $y = f(x_1, \ldots, x_n)$-ийн y_0-тэй тэнцүү ► түвшний шугам (*изоквант*) авч үзэж буй үед k-р хүчин зүйлийг нэг нэгжээр нэмэгдүүлэхэд ижилхэн гарцтай байлгахын тулд бусад нь тогтмол үед x_i хувьсагчийг хэдэн нэгжээр өөрчлөх вэ гэсэн бодлого авч үзье. Зарим таамаглал биелэгдэж байхад $x_k = \varphi(x_i)$ функцийг ил хэлбэрээр (► ил функц) тодорхойлж болно. Энэ функцийн уламжлалыг *орлуулалтын ахиу хурд* гэж тэмдэглэнэ:

$\boxed{\varphi'(x_i) = -\dfrac{f_{x_i}(\boldsymbol{x})}{f_{x_k}(\boldsymbol{x})}}$	**орлуулалтын ахиу хурд** (k-р хүчин зүйлийг i-ээр орлуулна)

Колл опционы үнийн мэдрэмж

Блак-Шольцын томъёо $\boxed{P_{\text{call}} = P \cdot \Phi(d_1) - S \cdot \mathrm{e}^{-iT} \cdot \Phi(d_2)}$

үүнд $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln \frac{P}{S} + T \cdot \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]$ ба $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Энэ томъёо нь хувьцааны талаарх колл опционы P_{call} үнийг P (одоо байгаа жинхэнэ үнэ), S (худалдагдах үнэ), i (хүүгийн эрсдэлгүй түвшин, тасралгүй нийлмэл), T (опционы үлдэгдэл хэсэг), σ^2 (хувьцаа олгох үе бүрийн вариац) зэрэг орцуудаас хамааруулж олдог. Үүнд Φ нь стандарт нормаль тархалтын функц ба φ нь түүний нягтын функц: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

i-р орц Δx_i-ээр өөрчлөгдсөн (бусад нь тогтмол) үед колл үнийн өөрчлөлтийг $\dfrac{\partial P_{\text{call}}}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i$ *тухайн уламжлалын* тусламжтай олно, үүнд

$\Delta = \dfrac{\partial P_{\text{call}}}{\partial P} = \Phi(d_1) > 0$ –	делта; хувьцааны үнэ P-ийн өөрчлөлтөөс хамаарах мэдрэмж
$\Lambda = \dfrac{P_{\text{call}}}{\partial \sigma} = P \cdot \varphi(d_1) \cdot \sqrt{T} > 0$ –	ламбда; σ-ийн өөрчлөлтөөс хамаарсан колл үнийн мэдрэмж

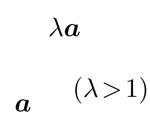
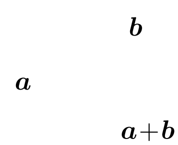
Шугаман алгебр

Вектор

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$	–	a_i байгуулагчуудтай n хэмжээст вектор
$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	–	координатын системийн суурь векторууд, нэгж векторууд

• $\mathbb{R}^n$ нь n хэмжээст векторуудын огторгуй; $\mathbb{R}^1$ – тоон шулуун; $\mathbb{R}^2$ – хавтгай; $\mathbb{R}^3$ – (3 хэмжээст) огторгуй.

Үйлдлийн дүрмүүд

$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$	λ бодит тоогоор үржүүлэх	
$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$	нэмэх, хасах	
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$	скаляр үржвэр	
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a}^\top = (a_1, \ldots, a_n)$	скаляр үржвэрийн өөр тэмдэглэл; $\boldsymbol{a}^\top$ нь $\boldsymbol{a}$-ийн ***хөрвөсөн*** вектор	
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$-ийн хувьд вектор үржвэр	
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert = \sqrt{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$	$\boldsymbol{a}$ векторын модуль	

• $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ вектор бүрийн хувьд $\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n \boldsymbol{e}_n$ харьцаа хүчинтэй.

Скаляр үржвэр болон модулийн чанарууд

$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}^\top(\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{b}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$	
$\boldsymbol{a}^\top(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{c}$	$\lvert\lambda \boldsymbol{a}\rvert = \lvert\lambda\rvert \cdot \lvert\boldsymbol{a}\rvert$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{b} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert \cdot \lvert\boldsymbol{b}\rvert \cdot \cos\varphi$	$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3;$ зургийгүз)	φ $\boldsymbol{a}$
$\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert \le \lvert\boldsymbol{a}\rvert + \lvert\boldsymbol{b}\rvert$	гурвалжны тэнцэтгэл биш	
$\lvert\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{b}\rvert \le \lvert\boldsymbol{a}\rvert \cdot \lvert\boldsymbol{b}\rvert$	Коши-Шварцийн тэнцэтгэл биш	

Векторуудын шугаман эвлүүлэг

Хэрэв $\boldsymbol{b}$ нь $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ векторуудын $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ скаляр коэффициентуудаар харгалзан үржигдсэн нийлбэр, ө. х.

$$\boxed{\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m} \qquad (*)$$

бол түүнийг $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ векторуудын *шугаман эвлүүлэг* гэж нэрлэдэг.

• Хэрэв $(*)$-д $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1$ болон $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$ нөхцлүүд биелдэг бол $\boldsymbol{b}$-г $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ векторуудын *гүдгэр шугаман эвлүүлэг* гэж нэрлэнэ.

• Хэрэв $(*)$-д $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1$ нөхцөл биелдэг харин λ_i, $i = 1, \ldots, m$ нь дурын тоонууд бол $\boldsymbol{b}$ нь $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ векторуудын *аффин шугаман эвлүүлэг* болох юм.

• Хэрэв $(*)$-д $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$ нөхцөл биелдэг бол $\boldsymbol{b}$ нь $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ векторуудын *конус шугаман эвлүүлэг* гэж нэрлэгдэнэ.

Шугаман хамаарал

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ гэсэн m векторуудын хувьд

$$\boxed{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}}$$

байх, нэгэн зэрэг тэг биш $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ тоонууд олддог бол тэдгээрийг *шугаман хамааралтай* гэнэ.

Эсрэг тохиолдолд $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ векторууд нь *шугаман хамааралгүй.*

• $\mathbb{R}^n$ огторгуйд шугаман хамааралгүй векторууд хамгийн ихдээ n байна.

• Хэрэв $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ векторууд нь шугаман хамааралгүй бол тэдгээр нь $\mathbb{R}^n$ огторгуйн *суурь* болно, ө. х. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ вектор бүр нь нэг утгатайгаар

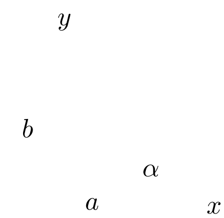
$$\boxed{\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n}$$

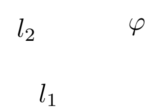
хэлбэрт бичигддэг.

Шулуун болон хавтгайн тэгшитгэл

$\mathbb{R}^2$ дахь шулуун

$Ax + By + C = 0$	–	ерөнхий хэлбэр
$y = mx+n,\ m=\tan\alpha$	–	ил хэлбэр
$y - y_1 = m(x - x_1)$	–	цэг-чиглэлт хэлбэр
$\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	–	2 цэгт хэлбэр
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)$ $-\infty < \lambda < \infty$	–	2 цэгт хэлбэрийн параметрт дүрслэл $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2ed \end{pmatrix}$; х. 120-д $\mathbb{R}^3$ дахь 2 цэгт хэлбэртэй харьцуул
$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	–	хэрчимт тэгшитгэл
$\tan\varphi = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$	–	огтлолцсон l_1, l_2 2 шулууны хоорондох өнцөг
$l_1 \parallel l_2 :\ m_1 = m_2$	–	паралелл байх нөхцөл
$l_1 \perp l_2 :\ m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$	–	ортогональ байх нөхцөл



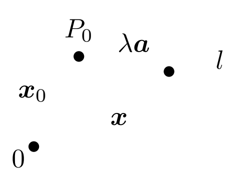


$\mathbb{R}^3$ дахь шулуун

цэг-чиглэлт (параметрт) хэлбэр: $\boldsymbol{x}_0$ бэхлэгдсэн векторт харгалзах l шулууны $P_0(x_0, y_0, z_0)$ цэг болон $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)^\top$ чиглүүлэгч вектор өгөгдсөн

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{a}$
$-\infty < \lambda < \infty$

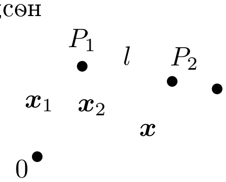
байгууллагчаар : $x = x_0 + \lambda a_x$, $y = y_0 + \lambda a_y$, $z = z_0 + \lambda a_z$



2 цэгт хэлбэр: $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ бэхлэгдсэн векторуудад харгалзах l шулууны $P_1(x_1, y_1, z_1)$ болон $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 2 цэгүүд өгөгдсөн

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\lambda(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)$
$-\infty < \lambda < \infty$

байгууллагчаар : $x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$, $z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$



$\mathbb{R}^3$ дахь хавтгай

параметрт хэлбэр: $\boldsymbol{x_0}$ бэхлэгдсэн векторт харгалзах хавтгайн $P_0(x_0, y_0, z_0)$ цэг болон $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)^\top$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)^\top$ 2 чиглүүлэгч векторууд өгөгдсөн

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$	байгуу-	$x = x_0 + \lambda a_x + \mu b_x$
$-\infty < \lambda < \infty$	лаг-	$y = y_0 + \lambda a_y + \mu b_y$
$-\infty < \mu < \infty$	чаар:	$z = z_0 + \lambda a_z + \mu b_z$

$\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{x}_0$ $\boldsymbol{x}$ 0

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$ хавтгайн нормаль вектор :

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

P_0 цэгийг агуулсан хавтгайн тэгшитгэлийн нормаль хэлбэр

$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = D$ энд $D = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{n} = (A, B, C)^\top$

байгуулагчаар: $Ax + By + Cz = D$

$\boldsymbol{n}$ E

Гессийн нормаль хэлбэр

$$\frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} - D}{|\boldsymbol{n}|} = 0$$

байгуулагчаар: $$\frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = D$ хавтгай болон $\boldsymbol{p}$ бэхлэгдсэн векторт харгалзах P цэгийн хоорондох зайн вектор $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} - D}{|\boldsymbol{n}|^2}\,\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = D$ хавтгай болон $\boldsymbol{p}$ бэхлэгдсэн векторт харгалзах P цэгийн хоорондох δ хамгийн бага зай (тэмдэг тооцсон)

$\boldsymbol{d}$ P E

$$\delta = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} - D}{|\boldsymbol{n}|}$$

Матриц

a_{ij}, $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$ гэсэн $m \cdot n$ бодит тоонуудын (*элемент*) тэгш өнцөгт хүснэгтийг (m, n) хэмжээст ***матриц*** гээд $\boldsymbol{A}$-аар тэмдэглэе:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

i – мөрийн дугаар, j – баганын дугаар; $(m, 1)$ хэмжээст матрицийг *багана*, $(1, n)$ хэмжээст матрицийг ***мөр вектор*** гэнэ.

• $\boldsymbol{A}$ матрицийн шугаман хамааралгүй мөр векторуудын хамгийн их тоо нь ***мөрийн***, шугаман хамааралгүй багана векторуудын хамгийн их тоо нь *баганын ранг* болно.
• Мөрийн ранг=баганын ранг нөхцөл биелнэ, ө. х. rank $(\boldsymbol{A})$=мөрийн ранг=баганын ранг.

Үйлдлийн дүрмүүд

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ $\iff$	$a_{ij} = b_{ij} \; \forall\, i, j$	–	тэнцүү байх
$\lambda \boldsymbol{A}$:	$(\lambda \boldsymbol{A})_{ij} = \lambda a_{ij}$	–	бодит тоогоор үржүүлэх
$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}$:	$(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B})_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$	–	нэмэх, хасах
$\boldsymbol{A}^\top$:	$(\boldsymbol{A}^\top)_{ij} = a_{ji}$	–	хөрвүүлэх
$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$:	$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{p} a_{ir} b_{rj}$	–	үржүүлэх

Нөхцөл: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ матрицууд *нийцтэй*, ө. х. $\boldsymbol{A}$ нь (m, p) хэмжээст матриц, $\boldsymbol{B}$ нь (p, n) хэмжээст матриц бол $\boldsymbol{AB}$ үржвэр матриц нь (m, n) хэмжээстэй байна.

Матрицуудыг үржүүлэх Фалкийн схем

$$\begin{array}{cc|c|c}
 & & \begin{matrix} b_{11} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{matrix}} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & & \ldots & b_{pn} \end{matrix} & \boldsymbol{B} \\
\hline
\boldsymbol{A} & \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \;\; \ldots \;\; a_{ip}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mp} \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \ldots\ldots\ldots \;\; c_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{p} a_{ir} b_{rj} \end{matrix} & \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}
\end{array}$$

Үйлдлийн дүрмүүд ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{O} = (a_{ij})$ нь $a_{ij} = 0 \,\forall\, i,j$ байх тэг матриц)

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$	$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$
$(\boldsymbol{A}^\top)^\top=\boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^\top=\boldsymbol{A}^\top+\boldsymbol{B}^\top$
$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$	$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\lambda(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$
$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$	$\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$
$(\boldsymbol{AB})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$	$(\lambda\boldsymbol{A})^\top=\lambda\boldsymbol{A}^\top$

Тусгай матрицууд

квадрат матриц	–	мөр болон баганын тоонууд тэнцүү
$\boldsymbol{I}$ нэгж матриц	–	$a_{ii}=1$, $i\neq j$ бол $a_{ij}=0$ байх квадрат матриц
$\boldsymbol{D}$ диагональ матриц	–	$i\neq j$ бол $d_{ij}=0$ байх квадрат матриц, тэмдэглэгээ: $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(d_i)$, $d_i=d_{ii}$
тэгш хэмт матриц	–	$\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{A}$ байх квадрат матриц
үл бөхөх матриц	–	$\det\boldsymbol{A}\neq 0$ байх квадрат матриц
бөхөх матриц	–	$\det\boldsymbol{A}=0$ байх квадрат матриц
$\boldsymbol{A}$-ийн урвуу матриц	–	$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$ байх $\boldsymbol{A}^{-1}$ матриц
ортогональ матриц	–	$\boldsymbol{AA}^\top=\boldsymbol{I}$ байх үл бөхөх матриц
эерэг тодорхой-логдсон матриц	–	$\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ хувьд $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Ax}>0$ байх тэгш хэмт матриц
сөрөг биш тодорхой-логдсон матриц	–	$\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ хувьд $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Ax}\geq 0$ байх тэгш хэмт матриц
сөрөг тодорхой-логдсон матриц	–	$\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ хувьд $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Ax}<0$ байх тэгш хэмт матриц
эерэг биш тодорхой-логдсон матриц	–	$\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ хувьд $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Ax}\leq 0$ байх тэгш хэмт матриц

Зарим үл бөхөх матрицуудын чанарууд

$\boldsymbol{I}^\top=\boldsymbol{I}$	$\det\boldsymbol{I}=1$	$\boldsymbol{I}^{-1}=\boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$	$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$
$(\boldsymbol{A}^{-1})^\top=(\boldsymbol{A}^\top)^{-1}$	$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$	$\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\dfrac{1}{\det\boldsymbol{A}}$

Урвуу матриц

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det \boldsymbol{A}_{11} \ \dots (-1)^{1+n} \det \boldsymbol{A}_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (-1)^{n+1} \det \boldsymbol{A}_{1n} \dots (-1)^{n+n} \det \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_{ik}$ нь $\boldsymbol{A}$ матрицаас i-р мөр болон k-р баганыг дарахад гарах дэд матриц (►х. 129 тоон алгоритмийг үз)

Матрицийн тодорхойлогдох шинжүүд

• Бодит тэгш хэмт (n, n) хэмжээст $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ матриц эерэг тодорхойлогдох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний n гол минорууд эерэг байх явдал:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad k = 1, \dots, n.$$

• Бодит тэгш хэмт (n, n) хэмжээст $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ матриц сөрөг тодорхойлогдох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний n гол минорыудын дараалал сөрөгөөс эхлээд тэмдэг сөөлжилсөн байх явдал (эсвэл эн чацуугаар: хэрэв $-\boldsymbol{A}$ нь эерэг тодорхойлогдсон бол):

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad k = 1, \dots, n.$$

• Бодит тэгш хэмт матриц нь эерэг тодорхойлогдох (сөрөг биш, сөрөг, эерэг биш тодорхойлогдох) зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний бүх хувийн утгууд (► хувийн утгын бодлого х. 130) нь эерэг (сөрөг биш, сөрөг, эерэг биш) байх явдал.

Тодорхойлогч

Квадрат (n, n) хэмжээст $\boldsymbol{A}$ матрицийн хувьд

$$D = \det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}(-1)^{i+1} \det \boldsymbol{A}_{i1} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \det \boldsymbol{A}_{in}$$

гэж рекурсиваар тодорхойлогдох D тоог түүний *тодорхойлогч* гэнэ. Энд $\boldsymbol{A}_{ik}$ нь $\boldsymbol{A}$ матрицаас i-р мөр, k-р баганыг дарахад гарах матриц. $(1, 1)$ хэмжээст матрицийн тодорхойлогч нь түүний цор ганц элемент байна. Дээрх тодорхойлолтоор тодорхойлогчийг тооцоолохыг i-р мөрийн хувьд *Лапласийн задаргаа* гэдэг.

• Дурын мөр буюу багана, тухайлбал k-р баганад харгалзах задаргааг ашиглаж D-ийн мөн ижил утгыг олж болно:

$$D = \det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}(-1)^{1+j} \det \boldsymbol{A}_{1j} + \dots + a_{nj}(-1)^{n+j} \det \boldsymbol{A}_{nj} \,.$$

Тухайн тохиолдлууд (Саррюсийн дүрэм)

$n = 2$:

$$\begin{array}{cccc} & a_{11} & a_{12} & \\ & & \times & \\ & a_{21} & a_{22} & \\ \swarrow & & & \searrow \\ - & & & + \end{array}$$

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n = 3$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} & \\ & & \searrow & & \times & & \times & & \swarrow & & \\ & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} & \\ & & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & & \\ & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} & \\ \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ - & & - & & - & & + & & + & & + \end{array}$$

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

***n*-р эрэмбийн тодорхойлогчийн чанарууд**

• Матрицийн 2 мөр эсвэл 2 багануудын байрыг солиход тодорхойлогч нь тэмдгээ өөрчилнө.

• Хэрэв матрицийн 2 мөр (багана) хоорондоо тэнцүү бол тодорхойлогчийн утга нь тэгтэй тэнцүү.

• Матрицийн аль нэг мөр (багана) дээр түүний өөр мөрийг (баганыг) тоогоор үржүүлж нэмэхэд тодорхойлогч нь өөрчлөгдөхгүй.

• Хэрэв матрицийн аль нэг мөрийг (баганыг) тоогоор үржүүлэхэд түүний тодорхойлогчийн утга нь мөн тэр тоогоор үржигдэнэ.

• Дараах харьцаанууд хүчинтэй:

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^{\top}, \qquad \det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B},$$

$$\det(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda^n \det \boldsymbol{A} \qquad (\lambda \text{ – бодит тоо}).$$

Шугаман тэгшитгэлийн систем

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \text{байгуулагчаар:} \qquad \begin{array}{c} a_{11}x_1 \;+ \dots +\; a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_m = b_m \end{array} \qquad (*)$$

шугаман тэгшитгэлийн системийн хувьд хэрэв $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ бол (байгуулагчаар: $b_i = 0 \;\; \forall\, i = 1, \dots, m$) *нэгэн төрлийн*, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ бол (байгуулагчаар:

ядаж нэг $i \in \{1,\dots,m\}$-ийн хувьд $b_i \neq 0$) *нэгэн төрлийн биш* гэж нэрлэгддэг. Хэрэв $(*)$ нь нийцтэй (ө. х., шийдтэй) бол бүх шийдүүдийн олонлогийг *ерөнхий шийд* гэнэ.

• $(*)$ систем нийцтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

• $m = n$ үед $(*)$ систем цор ганц шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

• $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ нэгэн төрлийн систем нь үргэлж $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ илэрхий шийдтэй байна.

• $m = n$ үед $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ нэгэн төрлийн систем тэгээс ялгаатай шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\det \boldsymbol{A} = 0$.

• Хэрэв $\boldsymbol{x}_h$ нь $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ нэгэн төрлийн системийн ерөнхий шийд болон $\boldsymbol{x}_s$ нь $(*)$ системийн тухайн шийд бол $(*)$ нэгэн төрлийн бус системийн ерөнхий $\boldsymbol{x}$-ийн хувьд дараах харьцаа биелнэ:

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}_s}$$

Гауссын ялган зайлуулах арга

Ялган зайлуулах

Энэ шатанд (m, n) хэмжээст $\boldsymbol{A}$ матриц бүхий $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ шугаман тэгшитгэлийн системээс алхам бүрт тухайн мөр дэх боломжит хувьсагчийг дараагийн боломжит хувьсагч буюу мөр олдохгүй болтол нь ялган зайлуулдаг. Зайлуулсан хувьсагчуудыг цаашдын тооцоонд ашиглахын тулд хувьсагч зайлуулсан мөрүүдийг “тэмдэглэнэ”.

Тооцоолох алгоритм (ялган зайлуулах алхмын эхний шат)

1. $a_{pq} \neq 0$ байх матрицийн элемент олох. Хэрэв матрицийн бүх элементийн хувьд $a_{ij} = 0$ бол ялган зайлуулах алхам дууcна. x_q нь ялгагдах хувьсагч, p нь ялгагдах мөр бол a_{pq}-г *гол элемент* гэнэ.

2. q баганыг тэг болгох :

p мөрийг $\dfrac{a_{iq}}{a_{pq}}$ элементээр үржүүлж, $i \neq p$ байх бүх i мөрүүдээс хасах:

$$\tilde{a}_{ij} := a_{ij} - \frac{a_{iq}}{a_{pq}} a_{pj}, \quad j = 1, \dots, n; \;\; i = 1, \dots, p-1, p+1, \dots, m$$

$$\tilde{b}_i := b_i - \frac{a_{iq}}{a_{pq}} b_p, \qquad i = 1, \dots, p-1, p+1, \dots, m$$

3. p мөрийг тэгшитгэлийн системээс хасаж, тэмдэглэнэ.

4. Хэрэв үлдсэн тэгшитгэлийн систем нь зөвхөн 1 мөрийг агуулж байвал ялган зайлуулах алхам дууcна.

Нийцтэй эсэхийг тогтоох

Үлдэж байгаа $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ системийг авч үзье.

I тохиолдол $\tilde{\boldsymbol{A}} = \mathbf{0}$,
$\tilde{\boldsymbol{b}} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$ $(*)$ тэгшитгэлийн систем нийцгүй.

II тохиолдол $\tilde{\boldsymbol{A}} = \mathbf{0}$,
$\tilde{\boldsymbol{b}} = \mathbf{0} \Longrightarrow$ $(*)$ тэгшитгэлийн систем нийцтэй. Үлдсэн системийг хасах.

III тохиолдол $\tilde{\boldsymbol{A}} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$ $(*)$ тэгшитгэлийн систем нийцтэй. Үлдсэн систем нь зөвхөн ганц мөрөөс бүрдэнэ. Үүнийг ялган зайлуулах алхамд тэмдэглэгдсэн бусад мөрүүдтэй нэгтгэх.

Буцааж орлуулах

Тэмдэглэгдсэн тэгшитгэлүүд диагональ матрицтай системийг үүсгэнэ (тэгшитгэл бүрт өмнөх тэгшитгэлүүдэд зайлуулагдсан хувьсагчууд тохиолдохгүй).

I тохиолдол Хэрэв ялган зайлуулах алхмын тоо $n-1$ бол $(*)$ систем нь цор ганц шийдтэй. Мэдэгдэж байгаа хувьсагчуудыг сүүлийнхээс нь эхний тэгшитгэл хүртэл орлуулж зөвхөн 1 хувьсагч агуулсан тэгшитгэл бүрийг бодох замаар уг шийдийг тооцоолно.

II тохиолдол Хэрэв ялган зайлуулах алхмын тоо k нь $k < n-1$ нөхцлийг хангадаг бол $(*)$ систем төгсгөлгүй олон шийдтэй. Эдгээр шийдүүдийг дүрслэхдээ сүүлийн тэгшитгэлийн аль нэг хувьсагчийг үлдэж буй $n-k$ хувьсагчуудаар илэрхийлээд тэдгээрийг параметрууд гэж үзнэ. Дараа нь I тохиолдолтой адилаар сүүлийнхээс нь эхний тэгшитгэл хүртэл орлуулах замаар эдгээр параметруудаас хамаарсан k хувьсагчийг ялгана.

Гауссийн ялган зайлуулах аргын хувилбар

• Хэрэв авч үзэж буй тэгшитгэлийн систем нийцтэй бол мөр баганыг дахин дугаарлах замаар a_{11}-г, k-р алхмын дараа $\tilde{a}_{1,k+1}$-г (ө. х., диагональ элементүүд) гол элементээр сонгож болно. Энэ тохиолдолд тэгшитгэлийн систем нь Гауссийн ялган зайлуулах аргыг хэрэглэсний дараа

$$\boxed{\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{c}}$$

хэлбэрт шилжинэ, энд $\boldsymbol{R}$ нь баруун дээд гурвалжин матриц ($\boldsymbol{x}_B$ – суурь хувьсагчид, $\boldsymbol{x}_N$ – суурь биш хувьсагчид). $\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_N$ (систем цор ганц шийдтэй үед) хэлбэр тохиолдохгүй байж болно. Диагоналийн дээд хэсгийг тэг болговол $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}$ (диагональ матриц) эсвэл $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ хэлбэрт шилжинэ. Сүүлийн тохиолдолд буцааж орлуулах шат шаардлагагүй.

• ► Байр солих арга (х. 129) нь Гауссийн ялган зайлуулах аргын нэг хувилбар юм.

Крамерийн дүрэм

Хэрэв $\boldsymbol{A}$ үл бөхөх матриц бол $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ шугаман тэгшитгэлийн шийд $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ нь:

$$x_k = \frac{\det \boldsymbol{A}_k}{\det \boldsymbol{A}}, \quad \text{энд } \boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; k = 1, \ldots, n$$

Байр солих арга

аффин шугаман тэгшитгэлийн систем	вектор дүрслэл
$y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_m$	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$

y_i	– хамаарах хувьсагч, суурь хувьсагч ($i = 1, \ldots, m$)
x_k	– үл хамаарах хувьсагч, суурь биш хувьсагч ($k = 1, \ldots, n$)
$a_i = 0$	– y_i нь шугаман функц
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$	– тэгшитгэлийн системийг нэгэн төрлийн гэнэ

Суурь хувьсагчийг суурь биш хувьсагчаар солих

Суурь хувьсагч y_p-г суурь биш хувьсагч x_q-ээр солих.

Нөхцөл: $a_{pq} \neq 0$. a_{pq}-г *гол элемент* гэж нэрлэдэг.

хуучин систем	шинэ систем
$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{a}$ үүнд	$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{b}$ үүнд
$\boldsymbol{x}_B = (y_1, \ldots, y_m)^\top$	$\boldsymbol{x}_B = (y_1, \ldots, y_{p-1}, x_q, y_{p+1}, \ldots, y_m)^\top$
$\boldsymbol{x}_N = (x_1, \ldots, x_n)^\top$	$\boldsymbol{x}_N = (x_1, \ldots, x_{q-1}, y_p, x_{q+1}, \ldots, x_n)^\top$

$$
\begin{array}{r|ccccc|c}
 & & & \downarrow & & & \\
 & \ldots & x_k & \ldots & x_q & \ldots & 1 \\
\hline
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_i = & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{iq} & \ldots & a_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\to y_p = & \ldots & a_{pk} & \ldots & a_{pq} & \ldots & a_p \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
\text{туслах багана} & \ldots & b_{pk} & \ldots & * & \ldots & b_p
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|ccccc|c}
 & & & \downarrow & & & \\
 & \ldots & x_k & \ldots & y_p & \ldots & 1 \\
\hline
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_i = & \ldots & b_{ik} & \ldots & b_{iq} & \ldots & b_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\to x_q = & \ldots & b_{pk} & \ldots & b_{pq} & \ldots & b_p \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
 & & & & & &
\end{array}
$$

Байр солих дүрмүүд

(A1)	$b_{pq} := \dfrac{1}{a_{pq}}$		
(A2)	$b_{pk} := -\dfrac{a_{pk}}{a_{pq}}$	$k=1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n$	$b_p := -\dfrac{a_p}{a_{pq}}$
(A3)	$b_{iq} := \dfrac{a_{iq}}{a_{pq}}$	$i=1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m$	
(A4)	$b_{ik} := a_{ik} + b_{pk} \cdot a_{iq}$	$i=1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m;$ $k = 1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n$	
	$b_i := a_i + b_p \cdot a_{iq}$	$i=1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m$	

- Туслах багана нь (A4) дүрмээр хялбарчлахад хэрэгтэй .

Урвуу матриц

Хэрэв $\boldsymbol{A}$ нь үл бөхөх матриц бол $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ нэгэн төрлийн системд $\boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{x}$ гэсэн шилжилт үргэлж боломжтой. Үр дүнд нь $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ гэж олдоно, энд $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$:

$$
\begin{array}{r|c}
 & \boldsymbol{x} \\
\hline
\boldsymbol{y} = & \boldsymbol{A}
\end{array}
\qquad \Longrightarrow \qquad
\begin{array}{r|c}
 & \boldsymbol{y} \\
\hline
\boldsymbol{x} = & \boldsymbol{A}^{-1}
\end{array}
$$

Гауссийн ялган зайлуулах аргын тусламжтайгаар $\boldsymbol{A}^{-1}$ матрицийг дараах хүснэгтийн дагуу тооцоолж болно:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) \qquad \Longrightarrow \qquad (\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1})$$

• Үгчилбэл: $\boldsymbol{A}$ болон $\boldsymbol{I}$ нэгж матрицийг зэрэгцээ өргөтгөсөн хэлбэрээр бичээд $\boldsymbol{A}$ нь $\boldsymbol{I}$-д шилжихээр Гауссийн ялган зайлуулах аргыг хэрэглэхэд баруун гар талд нь $\boldsymbol{A^{-1}}$ урвуу матриц үүснэ.

Матрицийн хувийн утгын бодлого

Хэрэв

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{r} \qquad \text{байгуулагчаар:} \qquad \begin{array}{ccccccc} a_{11}r_1 & + & \ldots & + & a_{1n}r_n & = & \lambda r_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}r_1 & + & \ldots & + & a_{nn}r_n & = & \lambda r_n \end{array}$$

байх $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ вектор олддог бол $\lambda \in \mathbb{C}$ тоог квадрат (n, n) хэмжээст $\boldsymbol{A}$ матрицийн *хувийн утга* гэнэ.

λ хувийн утгад харгалзах дээрх тэгшитгэлийг хангасан $\boldsymbol{r}$ векторыг $\boldsymbol{A}$ матрицийн *хувийн вектор* гэж нэрлэдэг. Энэ нь $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ гэсэн нэгэн төрлийн шугаман тэгшитгэлийн шийд юм.

Хувийн утгын чанарууд

• Хэрэв $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k$ нь λ хувийн утгад харгалзах хувийн векторууд бол

$$\boldsymbol{r} = \alpha_1 \boldsymbol{r}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{r}_k$$

нь нэгэн зэрэг тэг биш α_i тоонуудын хувьд мөн λ-д харгалзах хувийн вектор болно.

• λ тоо $\boldsymbol{A}$ матрицийн хувийн утга байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$p_n(\lambda) := \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

байх явдал. $p_n(\lambda)$ гэсэн n зэргийн олон гишүүнтийг $\boldsymbol{A}$ матрицийн *характеристик олон гишүүнт* гэнэ. Характеристик олон гишүүнтийн язгуур λ-ийн давхардлын тоо нь λ хувийн утгын *алгебрийн давхардал* гэж нэрлэгддэг.

• λ хувийн утгад харгалзах шугаман хамааралгүй векторуудын тоо нь

$$n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$$

байх бөгөөд түүнийг λ хувийн утгын *геометр давхардал* гэдэг. Энэ нь λ хувийн утгын алгебрийн давхардлаас хэтрэхгүй.

• Хэрэв $\boldsymbol{r}_j$, $j = 1, \ldots, k$ нь өөр хоороондоо ялгаатай λ_j, $j = 1, \ldots, k$ хувийн утгуудад харгалзах хувийн векторууд бол тэдгээр нь шугаман хамааралгүй.

• (n, n) хэмжээст $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\,(d_j)$ диоганаль матриц нь $\lambda_j = d_j$, $j = 1, \ldots, n$ гэсэн хувийн утгуудтай.

• Бодит тэгш хэмт матрицийн хувийн утгууд нь үргэлж бодит тоонууд байна.Тэдгээрт харгалзах хувийн вектор бүр нь бодит хэлбэрт дүрслэгдэнэ. Ялгаатай хувийн утгуудад харгалзах хувийн векторууд нь өөр хоорондоо ортогональ байна.

Матрицан загварууд

Орц гарцын шинжилгээ

$\boldsymbol{r} = (r_i)$	r_i	– i-р түүхий эдийн нийт зардал
$\boldsymbol{e} = (e_k)$	e_k	– k-р бүтээгдэхүүний үйлдвэрлэлийн хэмжээ
$\boldsymbol{A} = (a_{ik})$	a_{ik}	– k-р нэгж бүтээгдэхүүнд i-р түүхий эдийн шаардагдах зардал
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}$		*орц-гарцын шууд шинжилгээ*
$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{r}$		*орц-гарцын урвуу шинжилгээ* (нөхцөл: $\boldsymbol{A}$ үл бөхөх)

Орц гарцын нийлмэл шинжилгээ

$\boldsymbol{r} = (r_i)$	r_i	– i-р түүхий эдийн нийт зардал
$\boldsymbol{e} = (e_k)$	e_k	– эцсийн k-р бүтээгдэхүүний үйлдвэрлэлийн хэмжээ
$\boldsymbol{Z} = (z_{jk})$	z_{jk}	– эцсийн k-р бүтээгдэхүүний нэгжид шаардагдах j-р загварын бүтээгдэхүүний зардал
$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$	a_{ij}	– i-р түүхий эдийн j-р завсрын бүтээгдэхүүний нэгжид шаардагдах зардал
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{e}$		

Леонтьевын загвар

$\boldsymbol{x} = (x_i)$	x_i	– i-р бүтээгдэхүүний нийт гарц
$\boldsymbol{y} = (y_i)$	y_i	– i-р бүтээгдэхүүний цэвэр гарц
$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$	a_{ij}	– j-р нэгж бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэхэд шаардагдах i-р бүтээгдэхүүний хэмжээ
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$		
$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y}$		Нөхцөл: $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ үл бөхөх матриц

Зах зээлийн шинжилгээний шилжилтийн загвар

$\boldsymbol{m} = (m_i)$	m_i	– T хугацаан дахь i-р бүтээгдэхүүний зах зээлийн хувьцаа, $0 \le m_i \le 1,\ m_1 + \ldots + m_n = 1$
$\boldsymbol{z} = (z_i)$	z_i	– $T + k \cdot \Delta T$ хугацааны i-р бүтээгдэхүүний зах зээлийн хувьцаа, $k = 1, 2, \ldots,\quad 0 \le z_i \le 1,\quad z_1 + \ldots + z_n = 1$
$\boldsymbol{s} = (s_i)$	s_i	– тогтвортой (хугацаанаас үл хамаарах) зах зээлийн i-р бүтээгдэхүүний зах зээлийн хувьцаа; $0 \le s_i \le 1,\ s_1 + \ldots + s_n = 1$
$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$	a_{ij}	– j-р бүтээгдэхүүнийг $T + \Delta T$ агшинд худалдан авах, T агшинд i-р бүтээгдэхүүнийг худалдан авагчдын хэсэг. Үүнд $0 \le a_{ij} \le 1$, $i, j = 1, \ldots, n,\quad \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n$
$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{A}^k)^\top \boldsymbol{m}$		

$\boldsymbol{A}$ нь худалдан авагчдын хэлбэлзлийн матриц ба $\boldsymbol{s}$ нь $(\boldsymbol{A}^\top - \boldsymbol{I})\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$ $(s_1 + \ldots + s_n = 1)$ нэгэн төрлийн шугаман системийн тэгээс ялгаатай шийд.

Шугаман программчлал болон тээврийн бодлого

Шугаман программчлалын бодлогын нормаль хэлбэр

$$\begin{array}{l}
\alpha_{11}x_1 \;+\; \alpha_{12}x_2 \;+\; \ldots \;+\; \alpha_{1n}x_n \;\leq\; \alpha_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{r1}x_1 \;+\; \alpha_{r2}x_2 \;+\; \ldots \;+\; \alpha_{rn}x_n \;\leq\; \alpha_r \\
\beta_{11}x_1 \;+\; \beta_{12}x_2 \;+\; \ldots \;+\; \beta_{1n}x_n \;\geq\; \beta_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta_{s1}x_1 \;+\; \beta_{s2}x_2 \;+\; \ldots \;+\; \beta_{sn}x_n \;\geq\; \beta_s \\
\gamma_{11}x_1 \;+\; \gamma_{12}x_2 \;+\; \ldots \;+\; \gamma_{1n}x_n \;=\; \gamma_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\gamma_{t1}x_1 \;+\; \gamma_{t2}x_2 \;+\; \ldots \;+\; \gamma_{tn}x_n \;=\; \gamma_t
\end{array}$$

нөхцлийг хангах бүх $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ векторуудын хувьд, өгөгдсөн зорилгын функц $z(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + c_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$ -д хамгийн бага (*минимумын бодлого*) эсвэл хамгийн их утга (*максимумын бодлого*) олгодог $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^\top$ векторыг олох бодлогыг *шугаман программчлалын* (эсвэл *оптимизацийн бодлого*) гэж нэрлэдэг. Дээрх нөхцлийг бодлогын *заагдалт* буюу *хязгаарлалт* гэж нэрлэнэ. Бодлогын заагдалтыг хангаж буй $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ векторуудыг *боломжит вектор* гэнэ. x_i хувьсагчийн хувьд $x_i \geq 0$ (*сөрөг биш*) нөхцөл биелэгдэхгүй бол энэ хувьсагчийг *чөлөөт* буюу *хязгаарлалтгүй хувьсагч* гэдэг.

• Хэрэв максимум эсвэл минимум олох шугаман программчлалын бодлогын хувьд $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ заагдалаас бусад нь тэнцэтгэл хэлбэртэй бол түүнийг шугаман программчлалын бодлогын *нормаль хэлбэр* гэнэ:

$$\boxed{z = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + c_0 \longrightarrow \min / \max; \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{x} \geq 0} \qquad \textbf{нормаль хэлбэр}$$

Нормаль хэлбэрт шилжүүлэх

Нэмэлт хувьсагч s_i-г оруулах замаар тэнцэтгэл биш заагдалыг тэнцэтгэл заагдалд оруулна:

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_n \leq \alpha_i \qquad \Longrightarrow$$
$$\alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n + s_i = \alpha_i, \qquad s_i \geq 0$$

$$\beta_{i1}x_1 + \beta_{i2}x_2 + \ldots + \beta_{in}x_n \geq \beta_i \qquad \Longrightarrow$$
$$\beta_{i1}x_1 + \ldots + \beta_{in}x_n - s_i = \beta_i, \qquad s_i \geq 0$$

x_i чөлөөт $\Longrightarrow$ $x_i := u_i - v_i, \quad u_i \geq 0, \quad v_i \geq 0$

орлуулалт хийж чөлөөт хувьсагчийг зайлуулдаг. Максимумын бодлогыг минимум руу эсвэл минимумын бодлогыг максимумын бодлого руу хөрвүүлж болно:

$$z = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + c_0 \longrightarrow \max \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{z} := -z = (-\boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x} - c_0 \longrightarrow \min$$
$$z = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + c_0 \longrightarrow \min \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{z} := -z = (-\boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x} - c_0 \longrightarrow \max$$

Симплекс арга

Шугаман биш тэгшитгэлүүдийн системийн шаардлагатай хувиргалт хийхийн тулд ► Гауссын зайлуулах арга (х. 126) эсвэл ► байр солих аргыг (х. 129) ашиглана.

Суурь илэрхийлэл

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{a}$, $z - \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = c_0$ тэгшитгэлүүдийн системийн ($\boldsymbol{A}$ нь (m, n) хэмжээст матриц, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$, $c_0 \in \mathbb{R}$) мөр бүрээс x_i хувьсагчийг зайлуулна. Нормаль хэлбэрт дээрх хувиргалтыг гүйцэтгэвэл зайлуулагдсан хувьсагч (*суурь хувьсагч*) вектор $\boldsymbol{x}_B$ ба үлдсэн хувьсагч (*суурь биш хувьсагч*) вектор $\boldsymbol{x}_N$-ийн хооронд дараах хамаарал гарна:

Зайлуулах арга

$$\begin{aligned} z &\to \max \\ \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_N &= \boldsymbol{b} \\ z + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x}_N &= d_0 \\ \boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{x}_N &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

хүснэгт:

x_{B_1}	$\ldots$	x_{B_m}	z	x_{N_1}	$\ldots$	$x_{N_{n-m}}$	$=$
1			0	b_{11}	$\ldots$	$b_{1,n-m}$	b_1
	$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
		1	0	b_{m1}	$\ldots$	$b_{m,n-m}$	b_m
0	$\ldots$	0	1	d_1	$\ldots$	d_{n-m}	d_0

Байр солих арга

$$\begin{aligned} z &\to \min \\ \boldsymbol{x}_B &= \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{x}_N + \tilde{\boldsymbol{b}} \\ z &= \tilde{\boldsymbol{d}}^\top \boldsymbol{x}_N + \tilde{d}_0 \\ \boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{x}_N &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

хүснэгт:

	x_{N_1}	$\ldots$	$x_{N_{n-m}}$	1
$x_{B_1} =$	$\tilde{b}_{11}$	$\ldots$	$\tilde{b}_{1,n-m}$	$\tilde{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_{B_m} =$	$\tilde{b}_{m1}$	$\ldots$	$\tilde{b}_{m,n-m}$	$\tilde{b}_m$
$z =$	$\tilde{d}_1$	$\ldots$	$\tilde{d}_{n-m}$	$\tilde{d}_0$

z баганыг голдуу бичихгүй орхидог.

- Хэрэв $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{a}$ нь $\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{a}$ хэлбэртэй бол дараах хамаарал хүчинтэй: $\boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a}$, $d_0 = \tilde{d}_0 = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{a} + c_0$, $\tilde{\boldsymbol{B}} = -\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{d}^\top = -\tilde{\boldsymbol{d}}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{B} - \boldsymbol{c}_N^\top$, үүнд $\boldsymbol{c}^\top = (\boldsymbol{c}_B^\top, \boldsymbol{c}_N^\top)$.
- $b_i \geq 0$ ба $\tilde{b}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ үеийн суурь илэрхийллийг *боломжит суурийн илэрхийлэл* буюу *симплекс хүснэгт* гэж нэрлэнэ.

Оновчтой шинжүүр (симплекс шинжүүр)

$d_i \geq 0$ болон $\tilde{d}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n-m$ нөхцлийг хангаж буй симплекс хүснэгтээс (ийм симплекс хүснэгтийг *оновчтой симплекс хүснэгт* гэдэг) шугаман программчлалын бодлогын оновчтой шийдийг шууд тодорхойлж болно:

$$\boldsymbol{x}_B^* = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{0}, \ z^* = d_0 \quad \text{харгалзан} \quad \boldsymbol{x}_B^* = \tilde{\boldsymbol{b}}, \ \boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{0}, \ z^* = \tilde{d}_0.$$

Симплекс арга

Анхны симплекс хүснэгтээс эхэлж гүйцэтгэсэн алгоритм нь оновчтой симплекс хүснэгт олох эсвэл шугаман программчлалын бодлогын шийдгүйг тогтооно.

Зайлуулах арга	**Байр солих арга**
1. $d_q < 0$ байх d_q, $q = 1, \ldots, n-m$ элемент сонгоно. q-р багана нь *чиглүүлэгч* багана. x_{N_q} нь шинэ суурь хувьсагч болно. Хэрэв ийм сөрөг элемент олдохгүй бол ► оновчтой шинжүүр биелнэ.	**1.** $\tilde{d}_q < 0$ байх $\tilde{d}_q$, $q = 1, \ldots, n-m$ элемент сонгоно. q-р багана нь *чиглүүлэгч багана.* Хэрэв ийм элемент оршихгүй бол ► оновчтой шинжүүр биелнэ.
2. Эерэг $b_{iq} > 0$ элементүүдийг баганаас сонгоод $$\frac{b_p}{b_{pq}} = \min_{b_{iq}>0} \frac{b_i}{b_{iq}}.$$ нөхцлийг хангах b_{pq}-г олно. p-р мөр нь *чиглүүлэгч мөр.* x_{B_p} хувьсагч сууриас хасагдана. b_{pq} *чиглүүлэгч элемент.* Хэрэв b_{iq}-р багананд эерэг элементүүд оршихгүй бол бодлого шийдгүй буюу $z \to \infty$.	**2.** Чиглүүлэгч баганын бүх сөрөг $\tilde{b}_{iq} < 0$ элементүүдийг олно. $$\frac{\tilde{b}_p}{-\tilde{b}_{pq}} = \min_{\tilde{b}_{iq}<0} \frac{\tilde{b}_i}{-\tilde{b}_{iq}}.$$ нөхцлөөс $\tilde{b}_{pq}$ элемент олдоно. p-р мөр нь *чиглүүлэгч мөр*, $\tilde{b}_{pq}$ нь *чиглүүлэгч элемент.* Хэрэв сөрөг элемент $\tilde{b}_{iq}$ оршихгүй бол шугаман программчлалын бодлого шийдгүй буюу $z \to -\infty$.
3. p-р мөрийн элементүүдийг b_{pq}-д хуваана. x_{N_q} баганын p-р байрлалаас бусад газар ► Гауссын зайлуулах арга ёсоор тэг болно. Үүний үр дүнд шинэ симплекс хүснэгт үүснэ. 1-р алхам руу шилжинэ.	**3.** ► Байр солих аргаар хувьсагчуудыг солино: $x_{B_p} \iff x_{N_q}$ Үр дүнд нь шинэ симплекс хүснэгт гарна. 1 -р алхам руу шилжинэ.

• Хэрэв итерац бүр дээр $b_p > 0$ (харгалзан $\tilde{b_p} > 0$) бол симплекс арга нь төгсгөлөг.

• Хэрэв оновчтой симплекс хүснэгтэнд $d_q = 0$ (харгалзан $\tilde{d}_q = 0$) бол алгоритмийн 2 ба 3 алхмуудыг үргэлжлүүлэн гүйцэтгэж, өөр оновчтой симплекс хүснэгт гаргана. Энэ оновчтой шийд нь өмнөх хүснэгтээс ялгаатай байж болно.

• Хэрэв $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}$ векторууд оновчтой шийд бол тэдгээрийн *шугаман гүдгэр эвлүүлэг болох* $\boldsymbol{x}^* = \lambda_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{x}^{(k)}$ $(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0)$, $i = 1, \ldots, k$ вектор нь мөн оновчтой шийд юм.

Хосмог симплекс арга

Хосмог симплекс хүснэгт

$d_j \geq 0$ (харгалзан $\tilde{d}_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n-m$) үеийн суурь илэрхийллийг *хосмог симплекс хүснэгт* гэнэ.

• Хосмог симплекс хүснэгтийг ашигласан дараах алгоритм нь оновчтой симплекс хүснэгтийг олох эсвэл шугаман программчлалын бодлогын шийдгүйг тогтооно.

Зайлуулах арга	**Байр солих арга**
1. $b_p < 0$ байх b_p, $p = 1, \dots, m$ элемент олох. p-р мөр нь *чиглүүлэгч мөр*. x_{B_p} хувьсагчийг сууриас зайлуулна. Хэрэв ийм элемент байхгүй бол ► оновчтой шинжүүр биелнэ.	**1.** $\tilde{b}_p < 0$ байх $\tilde{b}_p$, $p = 1, \dots, m$ элементүүд олно. p-р мөр нь *чиглүүлэгч мөр*. Хэрэв ийм элемент оршихгүй бол ► оновчтой шинжүүр биелнэ.
2. $b_{pj} < 0$ байх бүх элементүүдийг p мөрөөс олж $$\frac{d_q}{-b_{pq}} = \min_{b_{pj}<0} \frac{d_j}{-b_{pj}}$$ нөхцлөөс b_{pq}-г тодорхойлно. x_{N_q} шинэ суурь хувьсагч ба b_{pq} нь *чиглүүлэгч элемент*. Хэрэв p-р мөрөнд сөрөг b_{pj} элементүүд оршихгүй бол шугаман программчлалын бодлого шийдгүй. Энэ үед боломжит олонлог хоосон байна.	**2.** $\tilde{b}_{pj} > 0$ байх элементүүд дотроос $$\frac{\tilde{d}_q}{\tilde{b}_{pq}} = \min_{\tilde{b}_{pj}>0} \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{b}_{pj}}.$$ байх $\tilde{b}_{pq}$ элемент сонгоно. q-р багана нь *чиглүүлэгч багана*, $\tilde{b}_{pq}$ нь *чиглүүлэгч элемент* болно. Хэрэв эерэг $\tilde{b}_{pj}$ элемент оршихгүй бол шугаман программчлалын бодлого шийдгүй.
3. p мөрийн элементүүдийг b_{pq}-д хуваана. x_{N_q} баганын бүх элементүүдийг ► Гауссын зайлуулах арга ёсоор p-ээс бусад газар тэг болгоход шинэ хосмог симплекс хүснэгт үүснэ. 1 -р алхам руу шилжих.	**3.** ► Байр солих аргаар $x_{B_p} \Longleftrightarrow x_{N_q}$ хувьсагчуудыг сольж, шинэ хосмог симплекс хүснэгт гаргана. 1-р алхам руу шилжих.

Анхны симплекс хүснэгт үүсгэх

$\boldsymbol{a} \geq 0$ биелэх шугаман программчлалын ► нормаль бодлогын хувьд гүйцэтгэсэн дараах алгоритм нь симплекс хүснэгт үүсгэх эсвэл шугаман программчлалын бодлогын шийдгүйг тогтооно. Хэрэв $\boldsymbol{a} < 0$ бол харгалзах $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{a}$ тэгшитгэлийн баруун талыг -1-ээр үржүүлж $\boldsymbol{a}$-г эерэг болгоно.

Зайлуулах арга

1. i-р тэгшитгэл бүрийн зүүн талд *зохиомол* y_i хувьсагчууд нэмэхэд дараах тэгшитгэл үүснэ:

$$\boldsymbol{Iy} + \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{y} = (y_i)$$

2. Зорилгын функц $z - \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = c_0$ болон *туслах чанарын функц* $h = \sum\limits_{i=1}^{m}(-y_i)$-г хүснэгтэнд нэмж бичнэ:

$$h + \sum_{k=1}^{n} \delta_k x_k = \delta_0 \quad \text{үүнд}$$

$$\delta_k = \sum_{i=1}^{m}(-a_{ik}), \quad \delta_0 = \sum_{i=1}^{m}(-a_i)$$

$\boldsymbol{y}$	z	h	$\boldsymbol{x}$	$=$
$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{0}^\top$	1	0	$-c_1 \ \dots \ -c_n$	c_0
$\boldsymbol{0}^\top$	0	1	$\delta_1 \ \dots \ \delta_n$	δ_0

Дээрх хүснэгт нь

$$h = \sum_{i=1}^{m}(-y_i) \to \max$$

$$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

туслах чанарын бодлогын симплекс хүснэгт юм.

Байр солих арга

1. Бодлогын хязгаарлалтыг $\boldsymbol{0} = -\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{a}$ хэлбэрт бичиж, зүүн талд байгаа тэгүүдийг y_i гэсэн *зохиомол хувьсагчуудаар* солино. Тэгвэл дараах тэгшитгэл үүснэ:

$$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{y} = (y_i)$$

2. $z = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + c_0$ зорилгын функц болон *туслах чанарын функц* $\tilde{h} = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i$ -г хүснэгтэнд нэмж бичнэ:

$$\tilde{h} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\delta}_k x_k = \tilde{\delta}_0 \quad \text{үүнд}$$

$$\tilde{\delta}_k = \sum_{i=1}^{m}(-a_{ik}), \quad \tilde{\delta}_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

	$\boldsymbol{x}$	1
$\boldsymbol{y}=$	$-\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{a}$
$z=$	$\boldsymbol{c}^\top$	c_0
$\tilde{h}=$	$\tilde{\delta}_1 \ \dots \ \tilde{\delta}_n$	$\tilde{\delta}_0$

Дээрх хүснэгт нь

$$\tilde{h} = \sum_{i=1}^{m} y_i \to \min$$

$$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}.$$

туслах чанарын бодлогын симплекс хүснэгт болно.

Зайлуулах арга

3. Туслах чанарын бодлогыг симплекс аргаар бодно. Энэ бодлогын оновчтой хүснэгт нь дараах хэлбэртэй:

$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{y}_B$	z	h	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{y}_N$	$=$
$1 \;\ddots\; 1$						
	$1 \;\ddots\; 1$					
		1				
			1			h_0

z ба h багануудыг орхиж болно.

Байр солих арга

3. Туслах чанарын бодлогыг симплекс аргаар бодно. Энэ бодлогын оновчтой симплекс хүснэгт нь дараах хэлбэртэй:

	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{y}_N$	1
$\boldsymbol{x}_B =$			
$\boldsymbol{y}_B =$			
$z =$			
$\tilde{h} =$			$\tilde{h}_0$

$\boxed{\textbf{I тохиолдол}}$ $h_0 < 0$ (харгалзан $\tilde{h}_0 > 0$) үед анхны шугаман программчлалын бодлого шийдгүй учир нь боломжит олонлог хоосон.

$\boxed{\textbf{II тохиолдол}}$ Хэрэв $h_0 = 0$ (харгалзан $\tilde{h}_0 = 0$) үед суурьт ямар ч зохиомол хувьсагч байхгүй бол $\boldsymbol{y}_N$ баганыг болон туслах чанарын функцийг зайлуулсны дараа анхны шугаман программчлалын бодлогын симплекс хүснэгт гарч ирнэ.

$\boxed{\textbf{III тохиолдол}}$ Хэрэв $h_0 = 0$ (харгалзан $\tilde{h}_0 = 0$) мөн суурьт зохиомол хувьсагчид үлдсэн бол байр солих замаар ($\boldsymbol{y}_B \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}_N$) суурьт үлдсэн хувьсагчуудыг оруулна. Үүнийг гүйцэтгэх явцад байр солих аргыг үргэлжлүүлэх боломжгүй бол энэ хүснэгтийн $\boldsymbol{y}_B =$ мөрүүдийг болон $\boldsymbol{y}_N$ багануудыг түүнчлэн туслах чанарын зорилгын функцийг зайлуулна. Үүний дараа үндсэн бодлогын симплекс хүснэгт гарч ирнэ.

- **Санамж 1.** Хэрэв 1-р алхам дээр $a_i \geq 0$-д харгалзах i-р мөр нь x_k суурь хувьсагчийг агуулж байгаа бол энэ мөрөнд зохиомол хувьсагчийг оруулах шаардлагагүй юм. Энэ үед δ_k болон харгалзах $\tilde{\delta}_k$-г $\sum(-a_{ik})$-ээр, δ_0-г $\sum(-a_i)$-ээр, $\tilde{\delta}_0$-г $\sum a_i$-ээр тус тус солино.
- **Санамж 2.** 3-р алхам дээр $\boldsymbol{y}_N$ багануудыг хүснэгтээс зайлуулна.
- *1-р шат* (анхны симплекс хүснэгт үүсгэх) болон *2-р шат* (симплекс арга)-ийг нэгтгэн *хоёр шаттай симплекс арга* гэж нэрлэдэг.

Хосмог чанар

Шугаман программчлалын бодлогын хялбар тавил

$$\boxed{\begin{array}{c} z(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \to \max \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} w(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u} \to \min \\ \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{array}}$$

Шугаман программчлалын ерөнхий хэлбэр

$$\boxed{\begin{array}{c} z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y} \to \max \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \text{ чөлөөт} \end{array}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} w(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{v} \to \min \\ \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{u} + \boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{u} + \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{v} = \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v} \text{ чөлөөт} \end{array}}$$

үндсэн бодлого **хосмог бодлого**

Чанарууд

- Хосмог бодлогын хосмог нь үндсэн бодлого байна.
- *Сул хосмогийн теорем.* Хэрэв $\boldsymbol{x}$ болон $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^\top$ нь үндсэн бодлогын боломжит цэг бөгөөд $\boldsymbol{u}$ болон $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^\top$ нь харгалзах хосмог бодлогын боломжит цэг бол $z(\boldsymbol{x}) \leq w(\boldsymbol{u})$ (харгалзан $z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq w(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$) нөхцөл биелнэ.
- *Хүчтэй хосмогийн теорем.* $\boldsymbol{x}^*$ болон $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)^\top$ нь үндсэн бодлогын боломжит цэг бөгөөд $\boldsymbol{u}^*$ болон $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)^\top$ нь харгалзах хосмог бодлогын боломжит цэг байг. Хэрэв $z(\boldsymbol{x}^*) = w(\boldsymbol{u}^*)$ (харгалзан $z(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) = w(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)$) нөхцөл биелж байвал $\boldsymbol{x}^*$ болон $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)^\top$ нь үндсэн бодлогын, $\boldsymbol{u}^*$ болон $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)^\top$ нь хосмог бодлогын оновчтой шийд болно.
- Боломжит шийд $\boldsymbol{x}^*$ болон $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)^\top$ нь үндсэн бодлогын оновчтой шийд байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь харгалзах хосмог бодлогын боломжит шийд $\boldsymbol{u}^*$ болон $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)^\top$ орших бөгөөд $z(\boldsymbol{x}^*) = w(\boldsymbol{u}^*)$ (харгалзан $z(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) = w(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)$) нөхцөл биелэх явдал.
- Хэрэв үндсэн болон хосмог бодлогууд нь боломжит шийдүүдтэй бол эдгээр бодлогууд нь оновчтой шийдүүдтэй байхаас гадна $z^* = w^*$ тэнцэтгэл биелнэ.
- Хэрэв үндсэн (хосмог) бодлого шийдгүй бол $z \to +\infty$ (харгалзан $w \to -\infty$) ёсоор хосмог (үндсэн) бодлого мөн шийдгүй.
- *Гүйцээлтийн теорем.* Боломжит цэг $\boldsymbol{x}^*$ нь оновчтой шийд болох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь хосмог боломжит цэг $\boldsymbol{u}^*$ орших бөгөөд $\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{Ax^*} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u}^*$ болон $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{u^*} - \boldsymbol{c}$ векторуудын хувьд дараах нөхцлүүд (*гүйцээлтийн нөхцөл*) биелэгдэх явдал юм:

Хэрэв $(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{u^*} - \boldsymbol{c})_i > 0$ бол $x_i^* = 0$ хэрэв $u_i^* > 0$ бол $(\boldsymbol{Ax^*} - \boldsymbol{a})_i = 0$
Хэрэв $(\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{a})_i > 0$ бол $u_i^* = 0$ хэрэв $x_i^* > 0$ бол $(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{u^*} - \boldsymbol{c})_i = 0$

Сүүдрийн үнэ

Ашгийн вектор нь $\boldsymbol{c}$, нөөцийн вектор нь $\boldsymbol{a}$ байх үйлдвэрлэлийн төлөвлөлтийн үндсэн бодлогод харгалзах хосмог бодлогын шийд $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)^\top$ бол зарим таамаглал биелэгдэж байгаа үед дараах өгүүлбэр үнэн: a_i нөөцийг нэгжээр нэмэгдүүлэхэд ашиг нь u_i нэгжээр (*сүүдрийн үнэ*) нэмэгдэнэ.

Тээврийн бодлого

Бодлогын тавил

$a_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$ нөөц бүхий A_i гэсэн m нийлүүлэгч байгууллагаас, $b_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n$ эрэлт бүхий n хэрэглэгч байгууллага B_j-д нэгэн төрлийн бүтээгдэхүүн тээвэрлэх шаардлагатай байг. i-р цэгээс j-р цэгт хүргэх нэгж ачааны тээвэрлэлтийн үнэ c_{ij} бол нийт зардлыг хамгийн бага байлгах бодлого нь тээврийн бодлого юм.

Математик загвар (тээврийн бодлого)

$$\begin{aligned} & z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min; \\ \text{заагал:} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \ i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = 1, \ldots, n \\ & x_{ij} \geq 0 \ \ \forall\, i, j \end{aligned}$$

- $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ нь (m, n) хэмжээст матриц бөгөөд элементүүд нь A_i-ээс B_j-рүү тээвэрлэх бүтээгдэхүүний тоо хэмжээг илэрхийлнэ. Хэрэв $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ нь бодлогын заагалалыг хангаж байгаа бол үүнийг *боломжит шийд (тээврийн төлөвлөгөө)* гэж нэрлэдэг.
- Тээврийн бодлого шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j}$$ **эрэлт нийлүүлэлт тэнцүү байх нөхцөл**

биелэх явдал.
- Эрэмбэлэгдсэн $\{(i_k, j_k)\}_{k=1}^{2l}$ хос индексийн олонлогийн хувьд хэрэв

$$\begin{aligned} i_{k+1} &= i_k, \quad k = 1, 3, \ldots, 2l-1 \\ j_{k+1} &= j_k, \quad k = 2, 4, \ldots, 2l-2, \quad j_{2l} = j_1 \end{aligned}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал үүнийг *цикл* гэж нэрлэе.

• Хэрэв $J_+(\boldsymbol{X}) = \{(i,j)\,|\,x_{ij} > 0\}$ индексийн олонлогт хос индекс нэмж өргөтгөсөн $J_S(\boldsymbol{X})$ олонлог нь циклийг агуулаагүй бөгөөд $m+n-1$ элементээс тогтсон бол боломжит шийд $\boldsymbol{X}$ нь *суурь шийд* болно.

Тээврийн бодлогын алгоритм

$\boldsymbol{X}$ гэсэн суурь шийдээс эхэлнэ

1. $u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall (i,j) \in J_S(\boldsymbol{X})$ байхаар u_i, $i = 1,\dots,m$ ба v_j, $j = 1,\dots,n$ тоонуудыг олно. Хэрэв $w_{ij} := c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$ бол $\boldsymbol{X}$ нь оновчтой шийд.

2. $w_{pq} < 0$ байх (p,q)-г сонгоод, $(i_1,j_1) := (p,q)$-ээс эхэлсэн $J_S(\boldsymbol{X}) \cup \{(p,q)\}$ олонлогийн Z циклийг олно.

3. Шинэ боломжит цэг $\boldsymbol{X}$-ийг дараах дүрмээр тодорхойлно: $x_{ij} := x_{ij} + (-1)^{k+1} x_{rs}$, $(i,j) \in Z$, үүнд $x_{rs} := \min\{x_{i_k j_k}\,|\,(i_k,j_k) \in Z, k = 2,4,\dots,2l\}$. Индексийн олонлог $J_S(\boldsymbol{X}) := J_S(\boldsymbol{X}) \cup \{(p,q)\} \setminus \{(r,s)\}$ дээр тодорхойлогдсон $\boldsymbol{X}$ шийд нь суурь шийд болно. 1-р алхам руу шилжих.

Тээврийн алгоритмын хүснэгтэн хэлбэр

Тээврийн бодлогын алгоритмыг дараах хүснэгтэнд $x_{ij} \in \boldsymbol{X}$, $(i,j) \in J_S(\boldsymbol{X})$ болон w_{ij}, $(i,j) \notin J_S(\boldsymbol{X})$ хувьсагчуудыг байрлуулах замаар илэрхийлж болно. Хүснэгтэнд ороогүй үлдсэн x_{ij}, $(i,j) \notin J_S(\boldsymbol{X})$ болон w_{ij}, $(i,j) \in J_S(\boldsymbol{X})$ хувьсагчуудын утгуудыг тэг гэж үзнэ. Циклийг дараах жишээнд тэгш өнцөгтөөр харуулав.

	v_1	v_2	$\cdots$	v_q	$\cdots$	v_m
u_1	$w_{1,1}$	$\boxed{x_{12}}$	$\cdots$	$\boxed{x_{1q}}$	$\cdots$	w_{1m}
u_2	$w_{2,1}$	w_{22}	$\cdots$	$\boxed{x_{2q}}$	$\cdots$	$\boxed{x_{2m}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
u_p	$\boxed{x_{p1}}$	$\boxed{x_{p2}}$	$\cdots$	$w_{pq} < 0$	$\cdots$	w_{pm}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
u_m	$\boxed{x_{m1}}$	w_{m2}	$\cdots$	w_{mq}	$\cdots$	w_{mn}

4 элементтэй цикл

u_i, v_j, w_{ij} утгуудыг олохдоо, $u_1 = 0$ гэж үзэн дараах нүднүүдийг ашиглана (хүснэгттэй харьцуул):

$v_2 = c_{12}$ ($w_{12} = 0$ учир), $v_q = c_{1q}$ ($w_{1q} = 0$ учир), $u_2 = c_{2q} - v_q$ ($w_{2q} = 0$ учир), $v_m = c_{2m} - u_2$ ($w_{2m} = 0$ учир), $u_p = \ldots$, $v_1 = \ldots$, $u_m = \ldots$ гэх мэт. Тухайлбал дээрх хүснэгтэнд $w_{pq} < 0$ болон $x_{p2} \leq x_{1q}$ ($x_{rs} = x_{p2}$) байг.

Шинэ хүснэгтийг дараах аргаар бодно:

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_q & \cdots & \bar{v}_m \\
\hline
\bar{u}_1 & \bar{w}_{1,1} & \boxed{\bar{x}_{12}} & \cdots & \boxed{\bar{x}_{1q}} & \cdots & \bar{w}_{1m} \\
\bar{u}_2 & \bar{w}_{2,1} & \bar{w}_{22} & \cdots & \boxed{x_{2q}} & \cdots & \boxed{x_{2m}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\bar{u}_p & \boxed{x_{p1}} & \bar{w}_{p2} & \cdots & \boxed{\bar{x}_{pq}} & \cdots & \bar{w}_{pm} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\bar{u}_m & \boxed{x_{m1}} & \bar{w}_{m2} & \cdots & \bar{w}_{mq} & \cdots & \bar{w}_{mn} \\
\hline
\end{array}$$

Хүснэгтийн утгуудыг олно: $\bar{x}_{p2} = 0$, $\bar{x}_{pq} = x_{p2}$, $\bar{x}_{12} = x_{12} + x_{p2}$, $\bar{x}_{1q} = x_{1q} - x_{p2}$.

$\bar{u}_1 = 0$ гэж үзээд, дээрхтэй ижил зарчмаар $\bar{u}_i, \bar{v}_j, \bar{w}_{ij}$ утгууд тооцоологдоно.

Анхны суурь шийд олох дүрэм

Зүүн дээд өнцгийн арга

Зүүн дээд өнцөгт хамгийн их боломжит бүтээгдэхүүнийг байрлуулна. Эрэлт ба нийлүүлэлт нь тэнцээд хоосон болсон нэг нийлүүлэгч эсвэл нэг хэрэглэгч байгууллагыг зайлуулж үйлдлийг давтана. Зөвхөн хамгийн сүүлийн алхамд хэрэглэгч **ба** нийлүүлэгч хоёуланг нь зайлуулна.

Хамгийн бага өртгийн арга

Хамгийн их боломжит бүтээгдэхүүний хэмжээг хамгийн бага өртөгтэй нүдэнд байрлуулна. Эрэлт ба нийлүүлэлт нь тэнцээд хоосон болсон нүдтэй нэг нийлүүлэгч буюу хэрэглэгчийг зайлуулна. Сүүлийн алхам дээр нийлүүлэгч **ба** хэрэглэгч хоёуланг зайлуулна.

Фогелийн арга

Мөр буюу багана тус бүрийн хувьд хамгийн их үнэ ба хамгийн бага үнийн ялгаварыг олно. Хамгийн их ялгаварт харгалзаж буй мөр буюу баганад хамгийн их зардалтай нүдэнд хамгийн их хэмжээг байрлуулна. Эрэлт ба нийлүүлэлт тэнцсэн хоосон нүдтэй нийлүүлэгч эсвэл хэрэглэгчийг зайлуулна. Ялгаварыг дахин шинэчлэн бодох замаар үйлдлийг давтана. Зөвхөн сүүлийн алхам дээр нийлүүлэгч **ба** хэрэглэгч хоёуланг зайлуулна.

Тоон статистик

Үндсэн ойлголтууд

Статистик шинжилгээний гол зорилго нь санамсаргүй хэмжигдэхүүнийг судлах явдал юм. Ажиглалтын үр дүнд утгаа авдаг хэмжигдэхүүнийг *санамсаргүй хэмжигдэхүүн* гэдэг.

Хэрэв санамсаргүй хэмжигдэхүүн нь төгсгөлөг эсвэл тоологдом тооны утга авдаг бол түүнийг *дискрет* санамсаргүй хэмжигдэхүүн гэнэ. Ямар нэг интервалаас утгаа авдаг бол *тасралтгүй* санамсаргүй хэмжигдэхүүн болно. Санамсаргүй хэмжигдэхүүний, ажиглагдсан $x_1, \ldots, x_n$ утгуудыг *түүврийн утга* гэж нэрлээд $(x_1, \ldots, x_n)$-г *n хэмжээст түүвэр* гэж нэрлэдэг. Түүврийн утгуудыг $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$ гэж эрэмбэлбэл *эрэмбэлэгдсэн түүвэр* гарна, үүнд $x_{\min} = x_{(1)}$, $x_{\max} = x_{(n)}$.

Нэг хэмжээст өгөгдлийн шинжилгээ

Дискрет хэмжигдэхүүн

Санамсаргүй хэмжигдэхүүний $a_1 < \ldots < a_k$ байх утгууд нь $a_1, \ldots, a_k$ болог. $(x_1, \ldots, x_n)$ нь n хэмжээст түүвэр.

$H_n(a_j)$	– a_j-ийн абсолют давтамж; a_j, $j = 1, \ldots, k$ утгуудыг авдаг түүврийн утгын тоо
$h_n(a_j) = \frac{1}{n} H_n(a_j)$	– a_j-ийн харьцангуй давтамж; $0 \le h_n(a_j) \le 1,\ j = 1, \ldots, k,\ \sum\limits_{j=1}^{k} h_n(a_j) = 1$
$\sum\limits_{i=1}^{j} H_n(a_i)$	– хуримтлагдсан абсолют давтамж, $j = 1, \ldots, k$
$\sum\limits_{i=1}^{j} h_n(a_i)$	– хуримтлагдсан харьцангуй давтамж, $j = 1, \ldots, k$
$F_n(x) = \sum\limits_{j: a_j \le x} h_n(a_j)$	– туршилтын тархалтын функц $(-\infty < x < \infty)$

Тасралтгүй хэмжигдэхүүн

n хэмжээст $(x_1, \ldots, x_n)$ түүвэр болон $K_j = [x_{j,l}; x_{j,u}),\ j = 1, \ldots, m$ ангилал өгөгдсөн

$x_{j,l}$	– j-р ангийн доод хязгаар
$x_{j,u}$	– j-р ангийн дээд хязгаар
$u_j = \frac{1}{2}(x_{j,l} + x_{j,u})$	– j-р ангийн дундаж
H_j	– j-р ангийн абсолют давтамж; K_j-р ангид багтсан түүврийн утгын тоо
$h_j = \frac{1}{n} H_j$	– j-р ангийн харьцангуй давтамж
$F_n(x) = \sum\limits_{j: x_{j,u} \le x} h_j$	– туршилтын тархалтын функц $(-\infty < x < \infty)$

Статистик параметрууд

Дунджууд

$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$	– ангилагдаагүй өгөгдлийн арифметик дундаж
$\overline{x}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{m} u_j H_j$	– ангилагдсан өгөгдлийн арифметик дундаж
$\tilde{x}_{(n)} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & n \text{ сондгой} \\ \frac{1}{2}[x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}] & n \text{ тэгш} \end{cases}$	– туршилтын медиан
$\dot{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \quad (x_j > 0)$	– геометр дундаж

Сарнилтыг хэмжих

$R = x_{\max} - x_{\min}$	– вариацийн өөрчлөлт
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$	– ангилагдаагүй өгөгдлийн туршилтын дисперс
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{m}(u_j - \overline{x}_{(n)})^2 H_j$	– ангилагдсан өгөгдлийн туршилтын дисперс
$s = \sqrt{s^2}$	– туршилтын стандарт хазайлт (алдаа)
$s_*^2 = s^2 - \frac{b^2}{12}$	– Шепардын (b урттай тогтмол ангийн) засвар
$\nu = \dfrac{s}{\overline{x}_n}$	– вариацийн коэффициент $(\overline{x}_n \neq 0)$
$\tilde{d} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \lvert x_i - \tilde{x}_{(n)} \rvert$	– $\tilde{x}_{(n)}$ медианаас хазайгдсан абсолют хазайлтын дундаж
$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \lvert x_i - \overline{x}_n \rvert$	– $\overline{x}_n$ дунджаас хазайгдсан абсолют хазайлтын дундаж

q-квантиль

$$\tilde{x}_q = \begin{cases} \frac{1}{2}[x_{(nq)} + x_{(nq+1)}] & nq \in \mathbb{N} \\ x_{(\lfloor nq \rfloor + 1)} & \text{эсрэг тохиолдолд} \end{cases}$$ – q-квантиль $(0 < q < 1)$

Тухайн тохиолдолд:

$\tilde{x}_{0.5} = \tilde{x}_{(n)}$; $\tilde{x}_{0.25}$ – доод хэсэг ; $\tilde{x}_{0.75}$ – дээд хэсэг

Туршилтын тархалтын тэгш хэмийн коэффициент

$$g_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2\right)^3}} \qquad g_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(u_j - \overline{x}_{(n)})^3 H_j}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(u_j - \overline{x}_{(n)})^2 H_j\right)^3}}$$

(ангилагдаагүй өгөгдөл) (ангилагдсан өгөгдөл)

Туршилтын тархалтын налалтын коэффициент

$$g_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^4}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2\right)^2} - 3 \qquad g_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(u_j - \overline{x}_{(n)})^4 H_j}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(u_j - \overline{x}_{(n)})^2 H_j\right)^2} - 3$$

(ангилагдаагүй өгөгдөл) (ангилагдсан өгөгдөл)

r эрэмбийн момент (ангилагдаагүй өгөгдөл)

$$\hat{m}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$$ – туршилтын анхны момент

$$\hat{\mu}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^r$$ – туршилтын төв момент

- Тухайлбал, $\hat{m}_1 = \overline{x}_n,\ \hat{\mu}_2 = \dfrac{n-1}{n}\, s^2.$

Олон хэмжээст өгөгдлийн шинжилгээ

x болон y хэмжигдэхүүний $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ түүвэр өгөгдсөн.

Туршилтын утгууд

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$ – x хэмжигдэхүүний дундаж

$$\overline{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$ – y хэмжигдэхүүний дундаж

Туршилтын утгууд

$s_x^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}_n^2\right)$	– x хэмжигдэхүүний туршилтын дисперс
$s_y^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_n)^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}_n^2\right)$	– y хэмжигдэхүүний туршилтын дисперс
$s_{xy} = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)(y_i - \overline{y}_n)$ $= \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}_n\overline{y}_n\right)$	– туршилтын ковариац
$r_{xy} = \dfrac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} \quad (-1 \leq r_{xy} \leq 1)$	– туршилтын корреляцийн коэффициент
$B_{xy} = r_{xy}^2$	– туршилтын детерминацийн коэффициент

Шугаман регресс

$\sum_{i=1}^{n}[y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2 = \min_{a,b} \sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + bx_i)]^2$ нөхцлийг хангах $\hat{a}$ ба $\hat{b}$ коэффициентуудыг *туршилтын* (шугаман) *регрессийн коэффициентууд* гэнэ.

$y = \hat{a} + \hat{b}x$ – туршилтын регрессийн функц (шугаман регрессийн функц)

$$\hat{a} = \overline{y}_n - \hat{b}\overline{x}_n, \qquad \hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy}\sqrt{\frac{s_y^2}{s_x^2}}$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)\right]^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot s_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

– туршилтын үлдэгдэл дисперс

Квадрат регресс

$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-(\hat{a}+\hat{b}x_i+\hat{c}x_i^2))^2 = \min\limits_{a,b,c}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-(a+bx_i+cx_i^2))^2$ нөхцлийг хангах

$\hat{a}$, $\hat{b}$ болон $\hat{c}$ коэффициентууд нь *туршилтын* (квадрат) *регрессийн коэффициентууд* болно. Эдгээр нь дараах системийн шийд юм:

$$\begin{array}{lclclcl}
\hat{a}\cdot n & + & \hat{b}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i & + & \hat{c}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & = & \sum\limits_{i=1}^{n}y_i \\
\hat{a}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i & + & \hat{b}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & + & \hat{c}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3 & = & \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i \\
\hat{a}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & + & \hat{b}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3 & + & \hat{c}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4 & = & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i
\end{array}$$

$y = \hat{a}+\hat{b}x+\hat{c}x^2$ – туршилтын квадрат дисперс

$\hat{s}^2 = \dfrac{1}{n-3}\sum\limits_{i=1}^{n}\Big[y_i-(\hat{a}+\hat{b}x_i+\hat{c}x_i^2)\Big]^2$ – туршилтын үлдэгдэл дисперс

Экспоненциаль регресс

$\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln y_i-(\ln\hat{a}+\hat{b}x_i))^2 = \min\limits_{a,b}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln y_i-(\ln a+bx_i))^2$ нөхцлийг хангах $\hat{a}$

болон $\hat{b}$ коэффициентуудыг *туршилтын* (экспоненциал) *регрессийн коэффициентууд* гэнэ (энд $y_i>0,\ i=1,\dots,n$ гэж үзнэ).

$y = \hat{a}\mathrm{e}^{\hat{b}x}$ – *туршилтын* (экспоненциал) *регрессийн функц*

$$\hat{a} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln y_i-\hat{b}\overline{x}_n}, \qquad \hat{b} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_n)(\ln y_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_n)^2}$$

Харьцаа

n бараанаас бүрдсэн барааны сагс W өгөгдсөн гэж үзье. i-р барааны үнэ p_i, тоон хэмжээ нь q_i $i=1,\dots,n$ байг.

Тэмдэглэгээ

$W_i = p_i \cdot q_i$	–	i-р барааны үнэлэмж
$\sum\limits_{i=1}^{n} W_i = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i$	–	W барааны сагсны нийт үнэлэмж
$p_{i\tau}$, p_{it}	–	суурь ба өгөгдсөн хугацаан дахь i-р барааны үнэ (харгалзан суурь ба жинхэнэ үнэ)
$q_{i\tau}$ bzw. q_{it}	–	суурь ба өгөгдсөн хугацаан дахь i-р барааны тоо хэмжээ (суурь ба одоогийн тоо хэмжээ)

Индекс

$m_i^W = \dfrac{W_{it}}{W_{i\tau}} = \dfrac{p_{it} \cdot q_{it}}{p_{i\tau} \cdot q_{i\tau}}$	–	i-р барааны үнийн индекс
$I_{\tau,t}^W = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} W_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{n} W_{i\tau}} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i\tau} q_{i\tau}}$	–	W барааны сагсны үнийн индекс; худалдааны индекс эсвэл хэрэглэгчийн зардлын индекс
$I_{\tau,t}^{\mathrm{Paa},p} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i\tau} q_{it}}$	–	Паачийн үнийн индекс
$I_{\tau,t}^{\mathrm{Paa},q} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{it} q_{i\tau}}$	–	Паачийн тоо хэмжээний индекс
$I_{\tau,t}^{\mathrm{Las},p} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{it} q_{i\tau}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i\tau} q_{i\tau}}$	–	Ласперийн үнийн индекс
$I_{\tau,t}^{\mathrm{Las},q} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i\tau} q_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i\tau} q_{i\tau}}$	–	Ласперийн тоо хэмжээний индекс

• Паачийн индекс нь компонентуудын (үнэ ба тоо хэмжээ) харьцангуй дундаж өөрчлөлтийг жингийн үзүүлэлтээр өгөгдсөн хугацаанд илэрхийлнэ.

• Ласперийн индекс нь компонентуудын (үнэ ба тоо хэмжээ) харьцангуй дундаж өөрчлөлтийг жингийн үзүүлэлтээр суурь хугацаанд илэрхийлнэ.

Дробичийн индекс

Хэрэв сагсны бараануудыг ижил хэмжээгээр хэмжиж болж байвал эдгээр бараануудыг *нөхөх* бараа гэж нэрлэнэ. Бараа тус бүрийн хувьд дараах индекс тодорхойлогддог.

$I_{\tau,t}^{\mathrm{Dro},p} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{it}\cdot q_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{it}} \Bigg/ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i\tau}\cdot q_{i\tau}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{i\tau}} = \dfrac{\overline{p}_t}{\overline{p}_\tau}$	–	Дробичийн үнийн индекс нь ($\overline{p}_\tau > 0$) дундаж үнийн өөрчлөлтийг тодорхойлно
$I_{\tau,t}^{\mathrm{Dro,str},\tau} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i\tau}\cdot q_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{it}} \Bigg/ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i\tau}\cdot q_{i\tau}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{i\tau}}$	–	суурь үнэтэй холбоотой Дробичийн бүтцийн индекс
$I_{\tau,t}^{\mathrm{Dro,str},t} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{it}\cdot q_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{it}} \Bigg/ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{it}\cdot q_{i\tau}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{i\tau}}$	–	бодит үнэтэй холбоотой Дробичийн бүтцийн индекс

• Дробичийн бүтцийн индекс нь хийсвэр ба номинал дундаж үнээс бүрдсэн статистик параметрууд юм.

Нөөцийн шинжилгээ

Судлаж буй (t_A, t_E) хугацааны статистик шинжилгээний олонлогийг ***өгөгдсөн үеийн эх олонлог*** гэнэ. Хэрэв t_A хугацаанаас өмнөх болон t_E хугацааны дараах олонлог тэгтэй тэнцүү бол түүнийг *хаалттай* эх олонлог, бусад тохиолдолд *нээлттэй* гэж нэрлэнэ. Зөвхөн тодорхой хугацаанд бий болсон эх олонлогийг ***суурь хугацаанд тулгуурласан эх олонлог*** гэж нэрлэдэг.

Тэмдэглэгээ

B_j	–	t_j хугацаан дахь эх олонлог, $t_A \leq t_j \leq t_E$
B_A or B_E	–	эхний t_A болон эцсийн хугацаа t_E үеийн эх олонлог
Z_i	–	$(t_{i-1}, t_i]$ хугацааны боломжит олонлог (нэгж)
A_i	–	$(t_{i-1}, t_i]$ хугацааны орлуулагдах (солигдох) олонлог

Эх олонлогийн хувиргалт

$B_j = B_A + Z_{(j)} - A_{(j)}$	–	t_j хугацааны эх олонлог:
$Z_{(j)} = \sum_{i=1}^{j} Z_i$	–	боломжит олонлогуудын нийлбэр
$A_{(j)} = \sum_{i=1}^{j} A_i$	–	орлуулагдах олонлогуудын нийлбэр

Дундаж олонлог

$$\overline{Z} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Z_i$$ – дундаж боломжит хурд

$$\overline{A} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} A_i$$ – орлуулагдах дундаж хурд

$$\overline{B} = \frac{1}{t_m - t_0}\sum_{j=1}^{m} B_{j-1}(t_j - t_{j-1})$$ – m тооны хугацааны интервалын хувьд тооцсон дундаж эх олонлог (хэрэв хугацааны өөрчлөлт бүрд эх олонлогийг хэмжиж болно гэж үзвэл)

$$\overline{B} = \frac{1}{t_m - t_0}\left(\frac{B_0(t_1 - t_0)}{2} + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_j \cdot (t_{j+1} - t_{j-1})}{2} + \frac{B_m(t_m - t_{m-1})}{2}\right)$$

– хугацааны m интервалын хувьд тооцсон дундаж эх олонлог. (Хэрэв хугацааны **бүх** t_j момент бүрд B_j-г хэмжиж болно гэвэл)

Хэрэв $t_j - t_{j-1} =$ тогтмол бол бүх j-ийн хувьд:

$$\overline{B} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} B_j \quad \text{эсвэл} \quad \overline{B} = \frac{1}{m}\left(\frac{B_0}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} B_j + \frac{B_m}{2}\right)$$ байна.

Дундаж үргэлжлэх хугацаа

$$\overline{\nu} = \frac{\overline{B}(t_m - t_0)}{A_{(m)}} = \frac{\overline{B}(t_m - t_0)}{Z_{(m)}}$$ – хаалттай эх олонлог

$$\overline{\nu} = \frac{2\overline{B}(t_m - t_0)}{A_{(m)} + Z_{(m)}} \quad \text{or} \quad \overline{\nu} = \frac{2\overline{B}(t_m - t_0)}{A_{(m-1)} + Z_{(m-1)}}$$ – нээлттэй эх олонлог

Хэрэв боломжит олонлог байх болон орлуулагдах чанар t_m хугацаанд биелбэл 2-р томъёо хүчинтэй.

Хугацаан цувааны шинжилгээ

Хугацааны дараалын хувьд ажиглагдсан санамсаргүй хэмжигдэхүүний $y_t = y(t)$, $t = t_1, t_2, \ldots$ тоон дараалын утгуудыг хугацаан цуваа гэж нэрлэнэ.

Нэмэгдэхүүн болон үржигдэхүүний чанар

$y(t) = T(t) + Z(t) + S(t) + R(t)$ болон	$y(t) = T(t) \cdot Z(t) \cdot S(t) \cdot R(t)$
$T(t)$ – хандлагын компонент (функц)	$Z(t)$ – циклийн компонент
$S(t)$ – улирлын компонент	$R(t)$ – стохастик компонент

Хандлагын төлөв байдал

$T(t) = a + bt$	–	шугаман хандлага
$T(t) = a + bt + ct^2$	–	квадрат хандлага
$T(t) = a \cdot b^t$	–	экспоненциаль хандлага

- Экспоненциаль $T(t) = a \cdot b^t$ хандлага нь

$$T^*(t) = \ln T(t),$$
$$a^* = \ln a,$$
$$b^* = \ln b$$

хувиргалтаар $T^*(t) = a^* + b^* t$ шугаман тохиолдолд шилждэг.

Хамгийн бага квадратын арга

Энэ аргад $T(t) = a + bt$ шугаман болон $T(t) = a + bt + ct^2$ квадрат хандлагын параметрийн үнэлгээг гүйцэтгэнэ (х. 114-д үз).

Дунджийг үнэлэх арга

Энэ аргаар n ажиглалтын утгууд болох $y_1, \ldots, y_n$-ээр хандлагын компонентийг (функцийг) үнэлнэ.

m сондгой

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{\frac{m+1}{2}} &= \frac{1}{m}(y_1 + y_2 + \ldots + y_m) \\
\hat{T}_{\frac{m+3}{2}} &= \frac{1}{m}(y_2 + y_3 + \ldots + y_{m+1}) \\
&\vdots \\
\hat{T}_{n-\frac{m-1}{2}} &= \frac{1}{m}(y_{n-m+1} + \ldots + y_n)
\end{aligned}$$

m тэгш

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{\frac{m}{2}+1} &= \tfrac{1}{m}(\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 + \ldots + y_m + \tfrac{1}{2}y_{m+1}) \\
\hat{T}_{\frac{m}{2}+2} &= \tfrac{1}{m}(\tfrac{1}{2}y_2 + y_3 + \ldots + y_{m+1} + \tfrac{1}{2}y_{m+2}) \\
&\vdots \\
\hat{T}_{n-\frac{m}{2}} &= \tfrac{1}{m}(\tfrac{1}{2}y_{n-m} + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)
\end{aligned}$$

Улирлын тохируулга

Өгөгдсөн p хугацаа болон нэгж хугацаанд ажиглагдсан k утгуудын тусламжтайгаар хугацаан цувааны тохируулгыг

$$y^*_{ij} = s_j + r_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, p)$$

тэгшитгэлээр гүйцэтгэнэ. Энэ нь улирлын компонент s_j-г агуулсан цувааны нэмэгдэлтэй загвар юм. s_j-ийн үнэлгээг $\hat{s}_j$-ээр тэмдэглэе.

$\overline{y}^*_{\cdot j} = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} y^*_{ij},\ \ j = 1, \ldots, p$	– хугацааны дундаж
$\overline{\overline{y}}^* = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{p} \overline{y}^*_{\cdot j}$	– нийт дундаж
$\hat{s}_j = y^*_{\cdot j} - \overline{\overline{y}}^*$	– улирлын дундаж
$y^*_{11} - \hat{s}_1,\ \ y^*_{12} - \hat{s}_2,\ \ \ldots,\ \ y^*_{1p} - \hat{s}_p$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $y^*_{k1} - \hat{s}_1,\ \ y^*_{k2} - \hat{s}_2,\ \ \ldots,\ \ y^*_{kp} - \hat{s}_p$	– улирлын тохируулгатай хугацааны цуваа

Илтгэгч загвар

$y_1, \ldots, y_t$ хугацаан цувааны хувьд $t+1$ агшин дахь таамаглал $\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \ldots$ утгыг $\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t$ рекурент томъёогоор $\hat{y}_1 = y_1$ үед болон *загварчлах параметр* α $(0 < \alpha < 1)$-ээр тооцож олно.

α параметрийн нөлөө	α их	α бага
“хуучин” хувьсагчуудыг авч үзэх	бага	хүчтэй
“шинэхэн” хувьсагчуудыг авч үзэх	хүчтэй	бага
хугацааны цувааг загварчлах	бага	хүчтэй

Магадлалын онол

Санамсаргүй үзэгдэл тэдгээрийн магадлал

Үл өөрчлөгдөх нэгэн ижил гадаад нөхцлийн үед ямар нэг обьект дээр хэд хэдэн нөхцөл болон дүрмийг шалгах зорилгоор хийж буй оролдлогыг (чармайлт, хэмжилт, туршлага хийх гэх мэт) *туршилт* гэнэ. Аливаа туршилтын үр дүнг үзэгдэл гэх ба тухайн туршилтанд илрэх тодорхойгүй үзэгдлийг санамсаргүй гэнэ.

Туршилтын боломжит үр дүн болох ω-уудын олонлог Ω-г *түүврийн огторгуй* (үзэгдлийн огторгуй, үндсэн огторгуй) гэж нэрлэдэг. Ω-ийн дэд олонлог A-г санамсаргүй үзэгдэл гэнэ (“A явагдах” $\Longleftrightarrow \omega \in A$).

Үндсэн ойлголтууд

$\{\omega\},\quad \omega \in \Omega$	–	эгэл үзэгдэл
Ω	–	зайлшгүй үзэгдэл = үргэлж явагдах үзэгдэл
$\emptyset$	–	боломжгүй үзэгдэл = хэзээ ч үл явагдах үзэгдэл
$A \subseteq B$	–	A үзэгдэл B-г дагуулна
$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$	–	2 үзэгдэл тэнцүү
$A \cup B$	–	A эсвэл B (эсвэл хоёулаа) явагдах үзэгдэл (нэгдэл)
$A \cap B$	–	A ба B нэгэн зэрэг явагдах үзэгдэл (огтлолцол)
$A \setminus B$	–	A явагдаж, B эс явагдах үзэгдэл (ялгавар)
$erlineA := \Omega \setminus A$	–	A-ийн эсрэг үзэгдэл (гүйцээлт)
$A \cap B = \emptyset$	–	A ба B нийцгүй (огтлолцолгүй)

Үзэгдлийн чанарууд

$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$A \cup \overline{A} = \Omega$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \subseteq A \cup B$	$A \cap B \subseteq A$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Үзэгдлүүдийн талбар

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ – A_n үзэгдлүүдээс дор хаяж нэг нь явагдах үзэгдэл
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ – A_n үзэгдлүүд нэгэн зэрэг явагдах үзэгдэл
$\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n, \qquad \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ – Де Морганы хууль

• Туршилтын үр дүнгийн олонлог $\mathfrak{E}$-ийн хувьд *үзэгдлүүдийн талбар* нь дараах нөхцлүүдийг хангана:

(1) $\Omega \in \mathfrak{E}, \ \ \emptyset \in \mathfrak{E}$
(2) $A \in \mathfrak{E} \implies \overline{A} \in \mathfrak{E}$
(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{E} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{E}$.

• Хэрэв $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ ба $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ (i \neq j)$ байвал талбарын дэд олонлог $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$-г *үзэгдлүүдийн гүйцэд систем* гэнэ (ө. х. туршилтын дүнд A_i үзэгдлүүдийн зөвхөн нэг нь явагдана).

Харьцангуй давтамж

Үл хамаарах туршилтыг n удаа давтан хийхэд $A \in \mathfrak{E}$ үзэгдэл m удаа явагдсан бол $h_n(A) = \dfrac{m}{n}$ тоог A үзэгдлийн *харьцангуй давтамж* гэнэ.

Харьцангуй давтамжийн чанарууд

$0 \le h_n(A) \le 1, \qquad h_n(\Omega) = 1, \qquad h_n(\emptyset) = 0, \qquad h_n(\overline{A}) = 1 - h_n(A)$
$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$
$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$ if $A \cap B = \emptyset$
$A \subseteq B \implies h_n(A) \le h_n(B)$

Магадлалын сонгодог тодорхойлолт

Хэрэв түүврийн огторгуй $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ төгсгөлөг бол A үзэгдлийн хувьд

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\omega_i \in A \text{ байх } \omega_i\text{-ийн тоо}}{k} = \frac{A\text{-г ивээх тохиолдлын тоо}}{\text{тохиолдлуудын бүх боломжийн тоо}}$$

тоог A үзэгдлийн *сонгодог магадлал* гэнэ.
$\{\omega_i\}$ эгэл үзэгдлүүд нь ижил магадлалтай (ижил боломжтой) байна. Ө. х. $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{k}$, $i = 1, \ldots, k$ (*“үзэгдлүүдийн Лапласын талбар”*).

Сонгодог магадлалын чанарууд

$0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1,\qquad \mathrm{P}(\Omega) = 1,\qquad \mathrm{P}(\emptyset) = 0,\qquad \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B),\qquad A \subseteq B \implies \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$

$A \cap B = \emptyset$ үед $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

Магадлалын аксиоматик тодорхойлолт

Аксиом 1: Санамсаргүй үзэгдэл $A \in \mathfrak{E}$ бүрийн магадлал $\mathrm{P}(A)$ нь $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$ харьцааг хангана.

Аксиом 2: Зайлшгүй үзэгдлийн магадлал 1-тэй тэнцүү: $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

Аксиом 3: Харилцан нийцгүй $A \in \mathfrak{E}$ ба $B \in \mathfrak{E}$ үзэгдлүүдийн зөвхөн нэг нь явагдах магадлал A ба B үзэгдлийн магадлалуудын нийлбэртэй тэнцүү, ө. х. $A \cap B = \emptyset$ нөхцөлд $P(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Аксиом 3': Хос хосоороо нийцгүй $A_1, A_2, \ldots$ үзэгдлүүдийн зөвхөн нэг нь явагдах магадлал нь $A_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ үзэгдэл тус бүрийн магадлалуудын нийлбэртэй тэнцүү. Ө. х. хэрэв $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ бол $\mathrm{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$ (*σ аддитив чанар*).

Магадлал дээр хийх үйлдлийн дүрмүүд

$\mathrm{P}(\emptyset) = 0,\qquad \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A),\qquad \mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$
$$+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \ldots + (-1)^{n+1} \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Нөхцөлт магадлал

$\mathrm{P}(B) \neq 0$ байх A ба B үзэгдлийн хувьд $\mathrm{P}(A \,|\, B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ илэрхийлэл нь A үзэгдлийн B нөхцөл дэх *нөхцөлт магадлалыг* илэрхийлдэг.

Чанарууд

$B \subset A$ үед $\mathrm{P}(A \mid B) = 1$	$A \cap B = \emptyset$ үед $\mathrm{P}(A \mid B) = 0$
$A \subset B$ үед $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$	$\mathrm{P}(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \mid B) = \mathrm{P}(A_1 \mid B) + \mathrm{P}(A_2 \mid B)$ хэрэв $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Үржвэрийн теорем:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)$$

Үржвэрийн өргөтгөсөн теорем:

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

• Хэрэв $\{A_1, \ldots, A_n\}$ нь үзэгдлүүдийн гүйцэд систем бол дараах 2 томъёо хүчинтэй.

Гүйцэд магадлалын томъёо

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B \mid A_i)$$

Байесийн томъёо

$$\mathrm{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B \mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B \mid A_i)} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Энд $\mathrm{P}(A_1), \ldots, \mathrm{P}(A_n)$-г B үзэгдэл явагдахаас *өмнөх магадлалууд,* харин $\mathrm{P}(A_1 \mid B), \ldots, \mathrm{P}(A_n \mid B)$-г B үзэгдэл явагдсаны *дараах магадлалууд* гэж нэрлэнэ.

Үл хамаарах чанар

Хэрэв A ба B үзэгдлүүдийн хувьд $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$ (хамааралгүй үзэгдлүүдийг үржүүлэх теорем) нөхцөл биелж байвал тэдгээрийг *хамааралгүй* гэнэ. Эндээс дараах мөрдлөгөөг гарган авч болно.

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \iff \mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A) \qquad (\mathrm{P}(B) > 0)$$

Хэрэв $A_1, \ldots, A_n$ үзэгдлүүдийн аль ч 2 нь хамааралгүй бол эдгээр n үзэгдлийг *хос хосоороо хамааралгүй* гэнэ. Ө.х. $i \neq j$ бүрийн хувьд $\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(A_j)$ биелнэ гэсэн үг. Хэрэв $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ байх $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ гэсэн k үзэгдлүүдээс тогтох санамсаргүй түүвэр ба $k \in \{2, \ldots, n\}$ бүрийн хувьд $\mathrm{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_{i_k})$ нөхцөл биелж байвал $A_1, \ldots, A_n$ үзэгдлүүдийг *гүйцэд хамааралгүй* гэж нэрлэнэ.

Санамсаргүй хувьсагч (хэмжигдэхүүн) ба тэдгээрийн тархалт

Түүврийн огторгуй Ω дээр тодорхойлогдсон $X : \Omega \to \mathbb{R}$ гэсэн бодит хувьсагчийн буулгалтыг *санамсаргүй хувьсагч* буюу *санамсаргүй хэмжигдэхүүн* гэнэ. Үүнд $x \in \mathbb{R}$ хувьд $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \in \mathfrak{E}$, ө. х. $\{X \le x\}$ нь үзэгдэл байна. $F_X(x) := \mathrm{P}(X \le x)$, $-\infty < x < \infty$ гэж тодорхойлогдох $F_X : x \to F_X(x) \in [0,1]$ функцийг X-ийн *тархалтын функц* (*тархалт*) гэнэ.

Тархалтын функцийн чанарууд

$\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
хэрэв $x_0 < x_1$ бол $F_X(x_0) \le F_X(x_1)$	(F_X үл буурах, монотон)
$\lim\limits_{h\downarrow 0} F_X(x+h) = F_X(x)$	(F_X баруун өрөөсгөл тасралтгүй)
$\mathrm{P}(X = x_0) = F_X(x_0) - \lim\limits_{h\uparrow 0} F_X(x_0+h)$	
$\mathrm{P}(x_0 < X \le x_1) = F_X(x_1) - F_X(x_0)$	
$\mathrm{P}(x_0 \le X < x_1) = \lim\limits_{h\uparrow 0} F_X(x_1+h) - \lim\limits_{h\uparrow 0} F_X(x_0+h)$	
$\mathrm{P}(x_0 \le X \le x_1) = F_X(x_1) - \lim\limits_{h\uparrow 0} F_X(x_0+h)$	
$\mathrm{P}(X > x_0) = 1 - F_X(x_0)$	

Хэрэв тархалтын функц F_X нь шаталсан (ө. х., хэсэгчилсэн тогтмол) байвал санамсаргүй хувьсагч X-ийг *дискрет* (*дискрет тархалттай*), F_X нь дифференциалчлагддаг (ө. х., $\dfrac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$ оршдог) бол X-ийг *тасралтгүй (тасралтгүй тархалттай)* гэнэ ▶ х. 160.

Дискрет тархалт

Хэрэв дискрет санамсаргүй хэмжигдэхүүн X нь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($x_1 < \ldots < x_n$) эсвэл $x_1, x_2, \ldots$ ($x_1 < x_2 < \ldots$) утгуудыг авдаг, ө. х. $k = 1, 2, \ldots$ хувьд утгууд нь $\lim\limits_{h\uparrow 0} F_X(x_k+h) \ne F_X(x_k)$ бол

x_k	x_1 x_2 $\ldots$
$\mathrm{P}(X = x_k)$	p_1 p_2 $\ldots$

$$\sum_k p_k = 1$$

хүснэгтийг X-ийн *тархалтын хүснэгт* гэнэ. $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)$ нь X-ийн *боломжит утгуудын магадлал*, $x_1, x_2, \ldots$ нь F_X функцийн үсрэлтийн цэгүүд болно.

Тэмдэглэгээ

$\mathrm{E}X = \sum\limits_k x_k p_k$	– математик дундаж (нөхцөл: $\sum\limits_k \lvert x_k\rvert p_k < \infty$)
$\mathrm{Var}\,(X) = \sum\limits_k (x_k - \mathrm{E}X)^2 p_k = \sum\limits_k x_k^2 p_k - (\mathrm{E}X)^2$	– вариац (дисперс) (нөхцөл: $\sum\limits_k x_k^2 p_k < \infty$)
$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}$	– стандарт хазайлт
$\dfrac{\sigma_X}{\mathrm{E}X} \quad (\mathrm{E}X \neq 0)$	– вариацийн коэффициент
$\mu_r = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^r = \sum\limits_k (x_k - \mathrm{E}X)^r p_k$	– r-р эрэмбийн төвийн момент $(r = 2, 3, \ldots)$
$\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$	– асимметр
$\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3$	– экцесс

Зарим дискрет тархалтууд

	боломжит утгын магадлал p_k	$\mathrm{E}X$	$\mathrm{Var}\,(X)$
дискрет жигд тархалт	$p_k = \mathrm{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}$ $(k = 1, \ldots, n)$	$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$	$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - (\mathrm{E}X)^2$
бином тархалт * $(0 \le p \le 1, \quad n \in \mathbb{N})$	$p_k = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \ldots, n)$	np	$np(1-p)$
гипергеометр тархалт * $(M \le N, n \le N)$	$p_k = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ **	$n \cdot \dfrac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right) \times \times \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$
геометр тархалт * $(0 < p < 1)$	$p_k = (1-p)^{k-1} p$ $(k = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Пуассоны тархалт * $(\lambda > 0)$	$p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$	λ	λ

* $\mathrm{P}(X = k) = p_k$; ** $\max\{0, n - (N - M)\} \le k \le \min\{M, n\}$.

Рекурсив томъёо $(p_{k+1} = f(p_k))$

бином тархалт:	$\dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{p}{1-p} \cdot p_k$
геометр тархалт:	$(1-p) \cdot p_k$
гипергеометр тархалт:	$\dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{M-k}{N-M-n+k+1} \cdot p_k$
Пуассоны тархалт:	$\dfrac{\lambda}{k+1} \cdot p_k$

Бином аппроксимац (дөхөлт)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{энд}$$

$$M = M(N), \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{M(N)}{N} = p$$

• Иймд “хүрэлцээтэй их” N-ийн хувьд $\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \approx \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $p = \dfrac{M}{N}$ биелнэ.

Пуассоны аппроксимац

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \ \ k = 0, 1, \ldots, \quad \text{энд}$$

$$p = p(n), \quad \lim_{n\to\infty} n \cdot p(n) = \lambda = \text{тогтмол}$$

• “Хүрэлцээтэй их” n-ийн хувьд $\dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$, үүнд $\lambda = n \cdot p$ биелнэ.

Тасралтгүй тархалт

Тасралтгүй санамсаргүй хэмжигдэхүүн X-ийн тархалтын функц нь F_X бол түүний 1-р эрэмбийн уламжлал $f_X(x) = \dfrac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = F'_X(x)$-ийг уг санамсаргүй хэмжигдэхүүний *нягт* (*магадлалын тархалтын нягт*) гэнэ. Өөрөөр хэлбэл:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

Тэмдэглэгээ

$\mathrm{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$	– X-ийн математик дундаж ($\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert x\rvert f_X(x)\,\mathrm{d}x<\infty$)
$\mathrm{Var}\,(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mathrm{E}X)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x - (\mathrm{E}X)^2$	– вариац (дисперс; нөхцөл : $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x < \infty$)
$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}$	– стандарт хазайлт
$\dfrac{\sigma_X}{\mathrm{E}X} \quad (\mathrm{E}X \neq 0)$	– вариацийн коэффициент
$\mu_r = \mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^r = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mathrm{E}X)^r f_X(x)\,\mathrm{d}x$	– r-р эрэмбийн төвийн момент $(r=2,3,\ldots)$
$\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$	– асимметр
$\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3$	– эксцесс

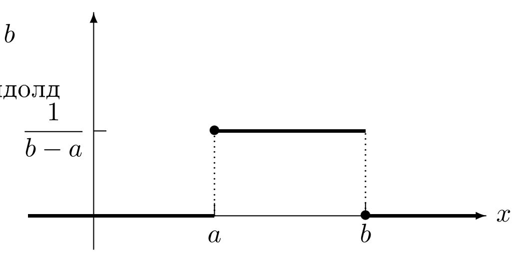
Зарим тасралтгүй тархалтууд

Жигд тархалт

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{хэрэв } a<x<b \\ 0 & \text{бусад тохиолдолд} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}X = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{Var}\,(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

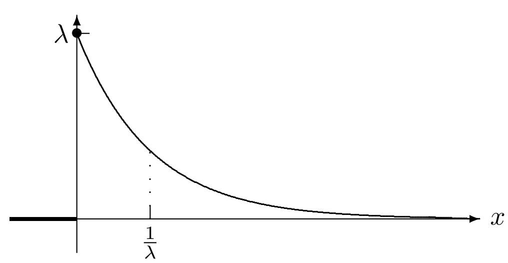


Илтгэгч тархалт

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{хэрэв } x \le 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{хэрэв } x > 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}\,(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$



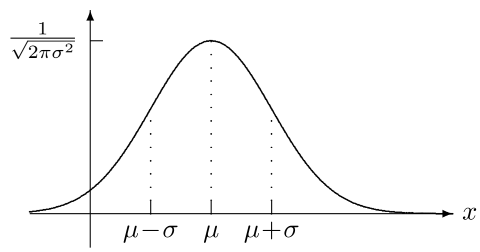
Нормаль тархалт, $N(\mu, \sigma^2)$-тархалт $(-\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$(-\infty < x < \infty)$

$\mathrm{E}X = \mu$

$\mathrm{Var}\,(X) = \sigma^2$



Стандарт нормаль тархалт

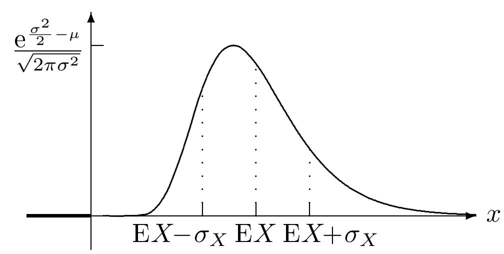
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \mathrm{E}X = 0, \qquad \mathrm{Var}\,(X) = 1$$

Логнормаль тархалт

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{хэрэв} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x - \mu^2)}{2\sigma^2}} & \text{хэрэв} \quad x > 0 \end{cases}$$

$\mathrm{E}X = \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

$\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$

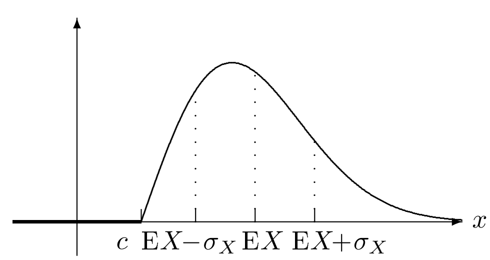


Вейбуллийн тархалт $(a > 0,\ b > 0,\ -\infty < c < \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{хэрэв} \quad x \le c \\ \frac{b}{a}\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b-1}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b} & \text{хэрэв} \quad x > c \end{cases}$$

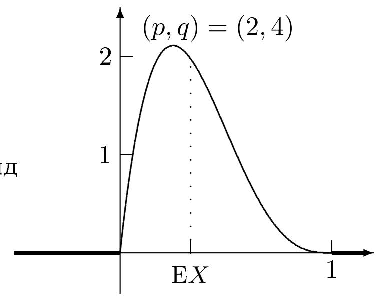
$\mathrm{E}X = c + a \cdot \Gamma\left(\frac{b+1}{b}\right)$

$\mathrm{Var}\,(X) = a^2\left[\Gamma\left(\frac{b+2}{b}\right) - \Gamma^2\left(\frac{b+1}{b}\right)\right]$



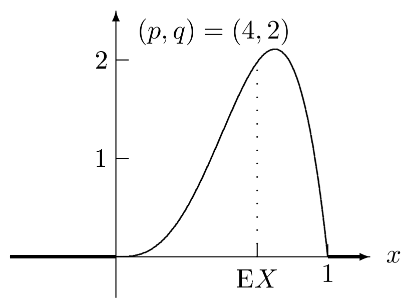
Бета тархалт $(p > 0,\, q > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)} & \text{хэрэв } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{бусад тохиолдолд} \end{cases}$$



$$\mathrm{E}X = \frac{p}{p+q}$$

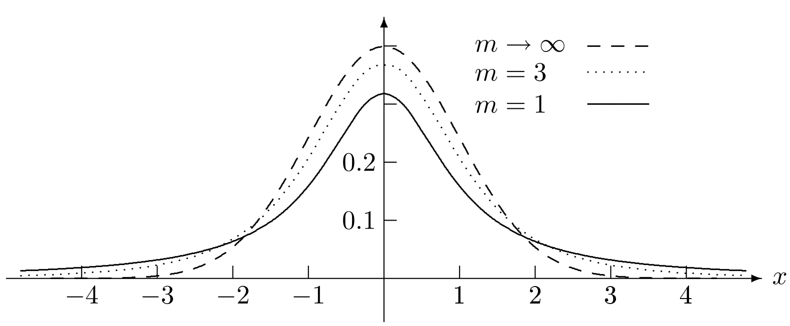
$$\mathrm{Var}\,(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$



m чөлөөний зэрэг бүхий t-тархалт $(m \geq 3)$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}},$$

$$\mathrm{E}X = 0, \qquad \mathrm{Var}\,(X) = \frac{m}{m-2}$$



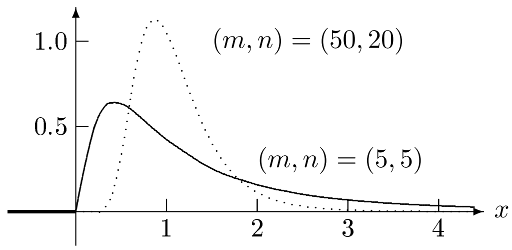
(m,n) чөлөөний зэрэг бүхий F-тархалт $(m \geq 1,\ n \geq 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{хэрэв} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}} & \text{хэрэв} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{E}X = \frac{n}{n-2} \quad (n \geq 3),$$

$$\mathrm{Var}\,(X) = \frac{2n^2}{n-4} \cdot \frac{m+n-2}{m(n-2)^2}$$

$(n \geq 5)$

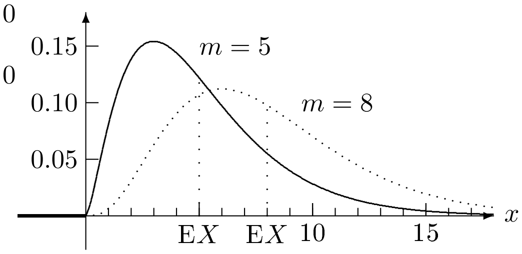


m **чөлөөний зэрэг бүхий χ^2-тархалт** $(m \geq 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{хэрэв} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^{\frac{m}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} & \text{хэрэв} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}X = m$$

$$\mathrm{Var}\,(X) = 2m$$



Санамсаргүй вектор

Хэрэв $X_1, X_2, \ldots, X_n$ нь нэгэн ижил Ω огторгуй дээр тодорхойлогдсон санамсаргүй хувьсагчид бол $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ векторыг *санамсаргүй вектор* гэх бөгөөд $X_1, \ldots, X_n$-ийг түүний *компонентууд* гэнэ. $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ байх $F_{\boldsymbol{X}} : F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$ функцийг $\boldsymbol{X}$ санамсаргүй векторын тархалтын функц гэж нэрлэнэ.

Чанарууд

$$\lim_{x_i \to -\infty} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

$$\lim_{h \downarrow 0} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) = F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

$$F_{X_i}(x) = \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ j \neq i}} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n$$

(маргинал тархалтын функц)

Үл хамаарах чанар

Хэрэв $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ бүрийн хувьд

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

нөхцөл биелэгдэж байвал $X_1, \ldots, X_n$-ийг *үл хамаарах* гэнэ.

Хоёр хэмжээст санамсаргүй вектор

• Хэрэв $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ векторын хувьд $F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} f_{\boldsymbol{X}}(t_1, t_2)\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ гэж тодорхойлогдох (ө. х. $\dfrac{\partial^2 F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2)$ байх) $f_{\boldsymbol{X}}$ гэсэн *нягтын функц* оршин байвал $\boldsymbol{X}$-г *тасралтгүй* гэнэ.

Хэрэв бүх $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ хувьд $f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$ нөхцлийг хангах бол X_1 (f_{X_1} - нягттай) болон X_2 (f_{X_2} - нягттай) санамсаргүй векторууд нь *хамааралгүй* байна.

• X_1 ба X_2 нь боломжит утгуудын магадлал нь харгалзан $p_i = \mathrm{P}(X_1 = x_1^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots$ болон $q_j = \mathrm{P}(X_2 = x_2^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots$ байх дискрет тархалтууд бол $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ векторыг боломжит утгуудын магадлал нь $p_{ij} = \mathrm{P}(X_1 = x_1^{(i)}, X_2 = x_2^{(j)})$ байх дискрет тархалт гэж нэрлэдэг. Хэрэв бүх $i, j = 1, 2, \ldots$-ийн хувьд $p_{ij} = p_i \cdot q_j$ бол X_1 ба X_2 санамсаргүй хувьсагчид хамааралгүй байна.

Хоёр хэмжээст санамсаргүй векторын анхны моментууд

математик дундаж	дискрет	тасралтгүй
$\mathrm{E}X_1$	$\sum\limits_i \sum\limits_j x_1^{(i)} p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$
$\mathrm{E}X_2$	$\sum\limits_i \sum\limits_j x_2^{(j)} p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$

Хоёр хэмжээст санамсаргүй векторын 2-р эрэмбийн момент

дисперс	дискрет	тасралтгүй
$\mathrm{Var}\,(X_1) = \sigma_{X_1}^2$ $= \mathrm{E}(X_1 - \mathrm{E}X_1)^2$	$\sum\limits_i \sum\limits_j (x_1^{(i)} - \mathrm{E}X_1)^2 p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mathrm{E}X_1)^2 f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$
$\mathrm{Var}\,(X_2) = \sigma_{X_2}^2$ $= \mathrm{E}(X_2 - \mathrm{E}X_2)^2$	$\sum\limits_i \sum\limits_j (x_2^{(j)} - \mathrm{E}X_2)^2 p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \mathrm{E}X_2)^2 f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$

ковариац:

$$\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)=\mathrm{E}(X_1-\mathrm{E}X_1)(X_2-\mathrm{E}X_2)=\mathrm{E}(X_1X_2)-\mathrm{E}X_1\cdot\mathrm{E}X_2$$

$$\sum_i\sum_j(x_1^{(i)}-\mathrm{E}X_1)(x_2^{(j)}-\mathrm{E}X_2)p_{ij}$$ – дискрет тархалт

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mathrm{E}X_1)(x_2-\mathrm{E}X_2)f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$ – тасралтгүй тархалт

Корреляц

$$\rho_{X_1X_2}=\frac{\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(X_1)\mathrm{Var}\,(X_2)}}=\frac{\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}$$

корреляцийн коэффициент

- Корреляцийн коэффициент нь $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ векторын X_1 ба X_2 компонентуудын хоорондын харилцан хамаарлыг (шугаман) тайлбарлана.
- $-1\le\rho_{X_1X_2}\le 1$
- Хэрэв $\rho_{X_1X_2}=0$ бол X_1,X_2 нь *корреляц хамааралгүй* байна.
- Хэрэв X_1,X_2 нь хамааралгүй бол хоорондоо корреляц хамааралгүй.

Хоёр хэмжээст нормаль тархалт

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$
$$\times\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$-\infty<\mu_1,\mu_2<\infty;\ \sigma_1>0,\ \sigma_2>0,\ \ -1<\rho<1;\ -\infty<x_1,x_2<\infty$ байх 2 хэмжээст нормал тархалтын нягт

Моментууд:
$\mathrm{E}X_1=\mu_1$, $\mathrm{E}X_2=\mu_2$,
$\mathrm{Var}\,(X_1)=\sigma_1^2$,
$\mathrm{Var}\,(X_2)=\sigma_2^2$,
$\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)=\rho\sigma_1\sigma_2$

Үл хамаарах 2 санамсаргүй хэмжигдэхүүний нийлбэр

- Хэрэв X_1 ба X_2 нь харгалзан $p_i=\mathrm{P}(X_1=x_1^{(i)}),\ i=1,2,\ldots$, $q_j=\mathrm{P}(X_2=x_2^{(j)}),\ j=1,2,\ldots$ магадлалууд бүхий үл хамаарах дискрет санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд бол

$$\mathrm{P}(X_1+X_2=y)=\sum_{i,j:\,x_1^{(i)}+x_2^{(j)}=y}p_i\,q_j\,.$$

Тухайн тохиолдолд $x_1^{(i)} = i,\ i = 1, 2, \ldots$ ба $x_2^{(j)} = j,\ j = 1, 2, \ldots$ бол

$$\boxed{\mathrm{P}(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(X_1 = i)\,\mathrm{P}(X_2 = k - i), \quad k = 1, 2, \ldots}$$

• Хэрэв X_1 ба X_2 нь харгалзан f_{X_1}, f_{X_2} нягт бүхий үл хамаарах, тасралтгүй санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд бол $Y = X_1 + X_2$ нь дараах нягт бүхий тасралтгүй санамсаргүй хэмжигдэхүүн байна

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(y - x)\,\mathrm{d}x\,.}$$

• Ерөнхий тохиолдолд, $\mathrm{E}(X_1 + X_2) = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2$ холбоо биелнэ. Харин үл хамаарах санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүдийн хувьд $\mathrm{Var}\,(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}\,(X_1) + \mathrm{Var}\,(X_2)$ байна.

Хамааралгүй санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүдийн нийлбэрийн жишээ

• Хэрэв X_1 ба X_2 нь харгалзан (n_1, p), (n_2, p) параметрүүд бүхий бином тархалтууд бол $X_1 + X_2$ нийлбэр $(n_1 + n_2, p)$ параметрүүдтэй бином тархалттай байна.

• X_1, X_2 нь харгалзан λ_1, λ_2 параметр бүхий Пуассоны тархалттай бол $X_1 + X_2$ нь $\lambda_1 + \lambda_2$ параметртэй Пуассоны тархалттай байна.

• Хэрэв X_1, X_2 нь харгалзан (μ_1, σ_1^2), (μ_2, σ_2^2) параметрүүд бүхий нормаль тархалттай бол тэдгээрийн шугаман эвлүүлэг $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ нь $(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2,\, \alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2)$ параметрүүдтэй нормаль тархалттай байна. Үүнд $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

• X_1, X_2 нь харгалзан m ба n чөлөөний зэрэг бүхий χ^2-тархалттай бол тэдгээрийн нийлбэр $X_1 + X_2$ нь $m + n$ чөлөөний зэрэг бүхий χ^2 тархалттай байна.

Үл хамаарах хоёр санамсаргүй хэмжигдэхүүний үржвэр

• Хэрэв X_1, X_2 нь харгалзан $p_i = \mathrm{P}(X_1 = x_1^{(i)}),\ i = 1, 2, \ldots$ ба $q_j = \mathrm{P}(X_2 = x_2^{(j)}),\ \ j = 1, 2, \ldots$ магадлалуудтай үл хамаарах, дискрет санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд бол

$$\boxed{\mathrm{P}(X_1 \cdot X_2 = y) = \sum_{i,j:\, x_1^{(i)} \cdot x_2^{(j)} = y} p_i\, q_j\,.}$$

• Хэрэв X_1, X_2 нь харгалзан f_{X_1}, f_{X_2} нягт бүхий хамааралгүй, тасралтгүй санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд бол $Y = X_1 \cdot X_2$ нь дараах нягттай санамсаргүй хэмжигдэхүүн болно

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}\left(\frac{y}{x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{|x|}\,.}$$

Түүврийн статистик

Түүвэр

M_X эх олонлогоос сонгогдсон n хэмжээст *математик түүвэр* гэдэг нь координатууд нь бие биенээс үл хамаарсан, X-тэй адилхан тархалттай $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ санамсаргүй вектор юм. $\boldsymbol{X}$-ийн ажиглалт болох $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$ элементийг *тодорхой түүвэр* гэнэ.

Цэгэн үнэлгээ

$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{g(\theta)}$ тархалт буюу функцийн үл мэдэгдэх параметр $\boldsymbol{\theta}$-ийн боломжит дөхөлтийн утгыг олохын тулд үнэлгээг ашигладаг.

$\boldsymbol{\theta}$-г үнэлэхэд зориулагдсан бөгөөд тодорхой түүвэр $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$-ээс хамаарсан *түүврийн функц* $\boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{T_n(x)}$-г $\boldsymbol{\theta}$-ийн *үнэлгээний утга (үнэлэгч)* гэж нэрлээд $\boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{\hat{\theta}(x)} = \boldsymbol{\tilde{\theta}}$ гэж тэмдэглэнэ. Харгалзах математик түүвэр $\boldsymbol{X}$-ийн үнэлгээний функц $\boldsymbol{T_n} = \boldsymbol{T_n(X)} = \boldsymbol{\hat{\theta}(X)}$-г *цэгэн үнэлгээ* буюу *үнэлгээний функц* гэж нэрлэнэ.

Цэгэн үнэлгээний чанарууд

- Хэрэв $\mathrm{E}\boldsymbol{T_n} = \boldsymbol{g(\theta)}$ бол $\boldsymbol{T_n}$-г $\boldsymbol{g(\theta)}$-ийн *хазайлтгүй үнэлгээ* гэнэ.
- Хэрэв $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}\boldsymbol{T_n} = \boldsymbol{g(\theta)}$ бол $(\boldsymbol{T_n})_{n=1,2,\ldots}$-г $\boldsymbol{g(\theta)}$-ийн *асимптот хазайлтгүй үнэлгээ* гэж нэрлэнэ.
- Хэрэв дурын бага эерэг ε-ийн хувьд $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\boldsymbol{T_n} - \boldsymbol{g(\theta)}| < \varepsilon) = 1$ биелдэг бол $(\boldsymbol{T_n})_{n=1,2,\ldots}$-г $\boldsymbol{g(\theta)}$-ийн (сул) *нийцтэй* үнэлгээ гэнэ.

Математик дундаж ба вариацийн үнэлгээ

үнэлгээний параметр	үнэлэгч	санамж
математик дундаж $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{\tilde{\mu} = \overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$	арифметик дундаж
вариац (дисперс) $\boldsymbol{\sigma^2} = \mathrm{Var}\,(\boldsymbol{X})$	$\boldsymbol{\tilde{\sigma}^2 = s^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathrm{E}X)^2}$	$\mathrm{E}\boldsymbol{X}$ мэдэгдэж байгаа үед хэрэглэгдэнэ
	$\boldsymbol{\tilde{\sigma}^2 = s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2}$	туршилтын вариац (дисперс)

Бусад үнэлгээ

үзэгдлийн магадлал $p = \mathrm{P}(A)$	$\tilde{p} = h_n(A)$	$h_n(A)$ нь A-ийн харьцангуй давтамж
ковариац $\sigma_{XY} = \mathrm{cov}\,(X, Y)$	$\tilde{\sigma}_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_n)(y_i - \overline{y}_n)$	туршилтын ковариац
корреляцийн коэффициент ρ_{XY}	$\tilde{\rho}_{XY} = \dfrac{\tilde{\sigma}_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}}$	туршилтын корреляцийн коэффициент

Хамгийн их үнэний хувь бүхий арга

Таамаглал: Тархалтын функц F мэдэгдэнэ. $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ параметр мэдэгдэхгүй

• $\theta \to L(\theta; x) = p(\theta; x_1) \cdot \ldots \cdot p(\theta; x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} p(\theta; x_i)$ функцийг $x = (x_1, \ldots, x_n)$ түүврийн *хамгийн их үнэлгээний хувь бүхий функц* гэж нэрлэнэ. Үүнд

$$p(\theta; x_i) = \begin{cases} \text{нягт } f_X(x_i), & \text{хэрэв } X \text{ тасралтгүй бол} \\ \text{ганцаарчилсан} & \\ \text{магадлал } \mathrm{P}(X = x_i) & \text{хэрэв } X \text{ дискрет бол.} \end{cases}$$

• Бүх $\theta \in \Theta$-ийн хувьд $L(\tilde{\theta}; x) \geq L(\theta; x)$ байх $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x) = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_p)$-г θ-ийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлгээ гэж нэрлэнэ.

• Хэрэв L нь θ-өөр дифференциалчлагддаг бол $\tilde{\theta}(x)$ нь $\dfrac{\partial \ln L(\theta; x)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, p$ тэгшитгэлийн шийд *(хамгийн их үнэний тэгшитгэл)* болно.

Моментийн аргууд

Таамаглал: Тархалтын функц F мэдэгдэнэ. $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ параметр мэдэгдэхгүй.

Цэгэн үнэлгээний энэхүү арга нь $\theta_1, \ldots, \theta_p$ параметрууд ба μ_r ($r = 2, 3, \ldots$) моментуудын хамаарал дээр суурилах ба F-тархалтын функцийн математик дундаж утга μ-г ашиглана. Энэхүү хамааралд μ-г $\hat{\mu} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$-ээр, μ_r-г $\hat{\mu}_r = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})$-ээр тус тус сольж харгалзах тэгшитгэлүүдийг бодвол θ_j, $j = 1, \ldots, p$ параметрүүдийн моментийн үнэлгээ болох $\hat{\theta}_j = T_j^*(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \ldots, \hat{m}_p)$ олдоно.

Итгэх завсрын үнэлгээ

Тархалтын үл мэдэгдэх параметр $\boldsymbol{\theta}$-ийн өндөр магадлалтайгаар завсарт орших үнэлгээг тогтоох зорилгоор *завсрын үнэлгээг* ашиглана.

- Математик түүвэр $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X_1}, \dots, \boldsymbol{X_n})$-ээс хамаарч $\boldsymbol{\theta}$ параметрийн хувьд тодорхойлогдсон санамсаргүй интервал $\boldsymbol{I(X)} = [\boldsymbol{g_u(X)}; \boldsymbol{g_o(X)}]$, $\boldsymbol{g_u(X)} < \boldsymbol{g_o(X)}$ нь

  $$\mathrm{P}(\boldsymbol{g_u(X)} \le \boldsymbol{\theta} \le \boldsymbol{g_o(X)}) \ge \varepsilon = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha}$$

  нөхцлийг хангаж байвал үүнийг ε *итгэх түвшинтэй* $(\boldsymbol{0} < \varepsilon < \boldsymbol{1})$ *хоёр талт итгэх завсар* гэж нэрлэнэ.
- $\boldsymbol{I(x)} = [\boldsymbol{g_u(x)}; \boldsymbol{g_0(x)}]$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$-г $\boldsymbol{\theta}$-ийн *тодорхой итгэх завсар* гэнэ.
- Хэрэв $\boldsymbol{g_u} \equiv -\infty$ эсвэл $\boldsymbol{g_o} \equiv +\infty$ бол $[-\infty; \boldsymbol{g_o(X)}]$ болон $[\boldsymbol{g_u(X)}; \infty]$-г харгалзан *нэг талт итгэх завсар* гэж нэрлэх бөгөөд

  $$\mathrm{P}(\boldsymbol{\theta} \le \boldsymbol{g_o(X)}) \ge \varepsilon \quad \text{ба} \quad \mathrm{P}(\boldsymbol{\theta} \ge \boldsymbol{g_u(X)}) \ge \varepsilon \text{ биелнэ.}$$

Нормаль тархалтын параметрүүдийн нэг талт итгэх завсар

математик дундаж $\boldsymbol{\mu}$:

$\boldsymbol{\sigma^2}$ мэдэгдэж буй:	$\left(-\infty; \overline{x}_n + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	буюу	$\left[\overline{x}_n - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ +\infty\right)$
$\boldsymbol{\sigma^2}$ үл мэдэгдэх:	$\left(-\infty; \overline{x}_n + t_{n-1;1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$	буюу	$\left[\overline{x}_n - t_{n-1;1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}};\ +\infty\right)$

вариац $\boldsymbol{\sigma^2}$:

$\boldsymbol{\mu}$ мэдэгдэж буй:	$\left[0; \dfrac{n \cdot s^{*2}}{\chi^2_{n;\alpha}}\right]$	буюу	$\left[\dfrac{n \cdot s^{*2}}{\chi^2_{n;1-\alpha}};\ +\infty\right)$
$\boldsymbol{\mu}$ үл мэдэгдэх:	$\left[0; \dfrac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha}}\right]$	буюу	$\left[\dfrac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha}};\ +\infty\right)$

Үүнд $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $s^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$; z_q, $t_{m;q}$, $\chi^2_{m;q}$ - квантилууд, х. 177-нд I b, II, III хүснэгтийг үз.

Нормаль тархалтын параметрүүдийн хоёр талт итгэх завсар

математик дундаж μ :	
σ^2 мэдэгдэж буй:	$\left[\overline{x}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
σ^2 үл мэдэгдэх:	$\left[\overline{x}_n - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}};\ \overline{x}_n + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right]$
вариац σ^2 :	
μ мэдэгдэж буй:	$\left[\dfrac{n\cdot s^{*2}}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}};\ \dfrac{n\cdot s^{*2}}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}}\right]$
μ үл мэдэгдэх:	$\left[\dfrac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}};\ \dfrac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right]$

Үүнд $\overline{x}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \ s^{*2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,\ \ s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_n)^2;$
z_q, $t_{m;q}$, $\chi^2_{m,q}$ - квантилууд, х. 177-нд I b, II, III хүснэгтийг үз.

Итгэх түвшин $\varepsilon = 1-\alpha$ үеийн

$p = \mathrm{P}(A)$ магадлалын асимптот итгэх завсар

$$[g_u; g_o] = \left[\frac{1}{n+z_q^2}\left(x+\frac{z_q^2}{2} - z_q\sqrt{\frac{x(n-x)}{n}+\frac{z_q^2}{4}}\right);\right.$$
$$\left.\frac{1}{n+z_q^2}\left(x+\frac{z_q^2}{2} + z_q\sqrt{\frac{x(n-x)}{n}+\frac{z_q^2}{4}}\right)\right]$$

Үүнд $q = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, n туршилтанд A үзэгдэл хэдэн удаа гарч ирэхийг x харуулна.

Статистик шинжүүрүүд

Үл мэдэгдэх тархалт $\boldsymbol{F}$-тэй холбоотой статистик таамаглалыг түүнд харгалзах түүврийн тусламжтайгаар статистик шинжүүр гүйцэтгэж шалгана.

Таамаглал: $\boldsymbol{F = F_\theta}, \ \boldsymbol{\theta \in \Theta}$

- *Тэг таамаглал* $\boldsymbol{H_0 : \theta \in \Theta_0} \ (\subset \boldsymbol{\Theta})$;
- *Өрсөлдөгч таамаглал* $\boldsymbol{H_1 : \theta \in \Theta_1} \ (\subset \boldsymbol{\Theta} \setminus \boldsymbol{\Theta_0})$
- Хэрэв $\boldsymbol{H_0 : \theta = \theta_0}$, ө. х. $\boldsymbol{\Theta_0 = \{\theta_0\}}$ бол $\boldsymbol{H_0}$-г *энгийн* таамаглал гэнэ. Эсрэг тохиолдолд $\boldsymbol{H_0}$ нь нийлмэл гэж нэрлэгдэнэ.
- $\boldsymbol{H_0 : \theta = \theta_0}$ ба $\boldsymbol{H_1 : \theta \neq \theta_0}$ (ө. х. $\boldsymbol{\theta > \theta_0}$ ба $\boldsymbol{\theta < \theta_0}$) үед *хоёр талт шинжүүрийг* ашиглана. $\boldsymbol{H_0 : \theta \leq \theta_0}$ ба $\boldsymbol{H_1 : \theta > \theta_0}$ эсвэл $\boldsymbol{H_0 : \theta \geq \theta_0}$ ба $\boldsymbol{H_1 : \theta < \theta_0}$ үед *нэг талт шинжүүр* ашиглагддаг.

Шинжүүрийн ач холбогдол

1. *Тэг таамаглал* $\boldsymbol{H_0}$-г (шаардлагатай бол өрсөлдөгч таамаглал $\boldsymbol{H_1}$-г) дэвшүүлнэ.

2. Математик түүврийн хувьд *статистик шинжүүр* $\boldsymbol{T = T(X_1, \ldots, X_n)}$-г байгуулна (энэ тохиолдолд хэрэв $\boldsymbol{H_0}$ үнэн бол $\boldsymbol{T}$-ийн тархалт мэдэгдэх ёстой).

3. Хэрэв $\boldsymbol{H_0}$ үнэн бол *критик муж* $\boldsymbol{K^*}$-г сонгоно. Гол төлөв $\boldsymbol{\alpha = 0.05; 0.01; 0.001}$. (Статистик шинжүүр $\boldsymbol{T}$ нь $\boldsymbol{K^*}$ мужаас утгаа авах $\boldsymbol{p^*}$ магадлал нь *ач холбогдлын түвшин* $\boldsymbol{\alpha}$-ээс ($\boldsymbol{0 < \alpha < 1}$) ихгүй байхаар статистик шинжүүр $\boldsymbol{T}$-ийн хэлбэлзлийн муж аль болох их байх ёстой.)

4. *Шийдвэр гаргах дүрэм:* Хэрэв ямар нэг тодорхой $\boldsymbol{(x_1, \ldots, x_n)}$ түүврийн хувьд статистик шинжүүр $\boldsymbol{T}$-ийн утга $\boldsymbol{t}$ нь ($\boldsymbol{t = T(x_1, \ldots, x_n)}$) $\boldsymbol{K^*}$-д оршин байвал ($\boldsymbol{t \in K^*}$) $\boldsymbol{H_0}$-г үгүйсгэж, $\boldsymbol{H_1}$ таамаглалыг хүлээн зөвшөөрнө. Эсрэг тохиолдолд $\boldsymbol{H_0}$ таамаглалыг хүлээн авна.

Шийдвэрийн бүтэц

шийдвэр	бодит байдал	
	$\boldsymbol{H_0}$ зөв	$\boldsymbol{H_0}$ худал
$\boldsymbol{H_0}$ -г няцаана	1-р төрлийн алдаа	зөв шийдвэр
$\boldsymbol{H_0}$ -г үл няцаана	зөв шийдвэр	2-р төрлийн алдаа

P((1-р төрлийн алдаа)) $\leq \boldsymbol{\alpha}$.

Нормаль тархалтын шинжүүрүүд

Нэг түүвэрт бодлого: Нормаль тархалтын эх олонлогоос сонгогдсон n хэмжээст түүвэр нь $x = (x_1, \dots, x_n)$ байг. Нормал тархалтын математик дундаж μ, вариац нь σ^2 болог.

таамаглал H_0 $\quad H_1$	таамаглал	T шинжvv-рийн утга t	T-ийн тархалт	критик муж
Гауссын шинжvvр a) $\mu = \mu_0, \mu \neq \mu_0$ b) $\mu \leq \mu_0, \mu > \mu_0$ c) $\mu \geq \mu_0, \mu < \mu_0$	σ^2 мэдэгдэж буй	$\dfrac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	$\mathrm{N}(0;1)$	$\lvert t\rvert \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $t \geq z_{1-\alpha}$ $t \leq -z_{1-\alpha}$
энгийн t шинжvvр a) $\mu = \mu_0, \mu \neq \mu_0$ b) $\mu \leq \mu_0, \mu > \mu_0$ c) $\mu \geq \mu_0, \mu < \mu_0$	σ^2 vл мэдэгдэх	$\dfrac{\overline{x}_n - \mu_0}{s}\sqrt{n}$	t_m $(m = n-1)$	$\lvert t\rvert \geq t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ $t \geq t_{n-1;1-\alpha}$ $t \leq -t_{n-1;1-\alpha}$
a) $\sigma^2 = \sigma_0^2, \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ b) $\sigma^2 \leq \sigma_0^2, \sigma^2 > \sigma_0^2$ c) $\sigma^2 \geq \sigma_0^2, \sigma^2 < \sigma_0^2$	μ мэдэгдэж буй	$\dfrac{n \cdot s^{*2}}{\sigma_0^2}$	χ_n^2	$t \geq \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}$ $\vee$ $t \leq \chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}$ $t \geq \chi^2_{n;1-\alpha}$ $t \leq \chi^2_{n;\alpha}$
“Хи”-квадрат шинжvvр a) $\sigma^2 = \sigma_0^2, \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ b) $\sigma^2 \leq \sigma_0^2, \sigma^2 > \sigma_0^2$ c) $\sigma^2 \geq \sigma_0^2, \sigma^2 < \sigma_0^2$	μ vл мэдэгдэх	$\dfrac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$	χ_m^2 $(m = n-1)$	$t \geq \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ $\vee$ $t \leq \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$ $t \geq \chi^2_{n-1;1-\alpha}$ $t \leq \chi^2_{n-1;\alpha}$

a) 2 талт, b) ба c) нэг талт шинжvvр

Хоёр тvvвэрт бодлого: $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_{n_1})$ болон $\boldsymbol{x'} = (x'_1, \dots, x'_{n_2})$ нь харгалзан μ_1, μ_2 математик дундаж болон σ_1^2, σ_2^2 вариацтай нормаль тархалттай санамсаргvй хэмжигдэхvvний эх олонлогоос сонгогдсон n_1 болон n_2 хэмжээст тvvврvvд юм. ($\boldsymbol{T}$ – статистик шинжvvр):

таамаглал H_0 $\quad H_1$	T-ийн утга	T-ийн тархалт	критик муж
Ялгаварын арга (x, x' нь хамааралтай тvvвэр , $n_1 = n_2 = n$, $D = X - X' \in \mathrm{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$, $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$, σ_D^2 vл мэдэгдэх)			
a) $\mu_D = 0, \mu_D \neq 0$ b) $\mu_D \leq 0, \mu_D > 0$ c) $\mu_D \geq 0, \mu_D < 0$	$\dfrac{\overline{d}}{s_D}\sqrt{n}$	t_m-тархалт $m = n - 1$	$\|t\| \geq t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ $t \geq t_{n-1;1-\alpha}$ $t \leq -t_{n-1;1-\alpha}$
Давхар t-шинжvvр (таамаглал: x, x' нь vл хамаарах тvvврvvд, $X \in \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X' \in \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)			
a) $\mu_1 = \mu_2, \mu_1 \neq \mu_2$ b) $\mu_1 \leq \mu_2, \mu_1 > \mu_2$ c) $\mu_1 \geq \mu_2, \mu_1 < \mu_2$	$\frac{\overline{x}_{(1)} - \overline{x}_{(2)}}{s_g} \times$ $\times \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$ (s_g-ийг доор vз)	t_m-тархалт $m = n_1 + n_2 - 2$	$\|t\| \geq t_{m;1-\frac{\alpha}{2}}$ $t \geq t_{m;1-\alpha}$ $t \leq -t_{m;1-\alpha}$ $(m = n_1 + n_2 - 2)$
Вэлчийн шинжvvр (таамаглал: x, x' нь vл хамаарах тvvврvvд, $X \in \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X' \in \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)			
a) $\mu_1 = \mu_2, \mu_1 \neq \mu_2$ b) $\mu_1 \leq \mu_2, \mu_1 > \mu_2$ c) $\mu_1 \geq \mu_2, \mu_1 < \mu_2$	$\dfrac{\overline{x}_{(1)} - \overline{x}_{(2)}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	ойролцоогоор t_m-тархалт $m \approx$ $\left[\frac{c^2}{n_1-1} + \frac{(1-c)^2}{n_2-1}\right]^{-1}$ $c = \frac{s_1^2/n_1}{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}$	$\|t\| \geq t_{m;1-\frac{\alpha}{2}}$ $t \geq t_{m;1-\alpha}$ $t \leq -t_{m;1-\alpha}$
F-шинжvvр (x, x' нь vл хамаарах тvvврvvд, $X \in \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X' \in \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, μ_1, μ_2 - vл мэдэгдэх)			
a) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ b) $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	s_1^2/s_2^2	F_{m_1,m_2}-тархалт $(m_1 = n_1 - 1)$ $(m_2 = n_2 - 1)$	$t \geq F_{m_1,m_2;1-\frac{\alpha}{2}}$ буюу $t \leq F_{m_1,m_2;1-\frac{\alpha}{2}}$ $t \geq F_{m_1,m_2;1-\alpha}$
c) $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	s_2^2/s_1^2	F_{m_2,m_1}-тархалт	$t \geq F_{m_2,m_1;1-\alpha}$

a) 2 талт, b) ба c) нэг талт шинжvvрvvд. Yнд $n_k, \overline{x}_k$ ба s_k^2 нь k-р тvvврийн хувьд ($k = 1, 2,$) харгалзан тvvврийн хэмжээ, арифметик дундаж ба туршилтын тvvврийн вариацыг тус тус тэмдэглэнэ. $\overline{d}$ ба s_D^2 нь хамааралтай тvvврийн ут-гуудаар зохиогдсон $d_i = x_i - x'_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ ялгаварт цувааны арифметик дундаж ба туршилтын тvvврийн вариацыг тус тус тэмдэглэнэ.
$s_g = \sqrt{[(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2](n_1+n_2-2)^{-1}}$.

Хvснэгт 1 a Стандарт нормаль тархалтын тархалтын функц $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953
0.1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670
0.2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835
0.3	.617911	.621720	.625516	.629300	.633072
0.4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031
0.5	.691462	.694974	.698468	.701944	.705401
0.6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914
0.7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350
0.8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546
0.9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391
1.0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830
1.1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857
1.2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512
1.3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877
1.4	.919243	.920730	.922196	.923641	.925066
1.5	.933193	.934478	.935745	.936992	.938220
1.6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497
1.7	.955435	.956367	.957284	.958185	.959070
1.8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116
1.9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810
2.0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325
2.1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823
2.2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987455
2.3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817
x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4

Хvснэгт 1 a Стандарт нормаль тархалтын тархалтын функц $\boldsymbol{\Phi(x)}$

x	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856
0.1	.559618	.563559	.567495	.571424	.575345
0.2	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0.3	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0.4	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0.5	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
0.6	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0.7	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0.8	.802338	.805105	.807850	.810570	.813267
0.9	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1.0	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1.1	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1.2	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1.3	.911492	.913085	.914657	.916207	.917736
1.4	.926471	.927855	.929219	.930563	.931888
1.5	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1.6	.950529	.951543	.952540	.953521	.954486
1.7	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1.8	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1.9	.974412	.975002	.975581	.976148	.976705
2.0	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2.1	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2.2	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2.3	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999
x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

Хvснэгт 1 b Стандарт нормаль тархалтын квантиль z_q

q	z_q	q	z_q	q	z_q
0.5	0	0.91	1.34076	**0.975**	**1.95996**
0.55	0.12566	0.92	1.40507	0.98	2.05375
0.6	0.25335	0.93	1.47579	0.985	2.17009
0.65	0.38532	0.94	1.55478	**0.99**	**2.32635**
0.7	0.52440	**0.95**	**1.64485**	**0.995**	**2.57583**
0.75	0.67449	0.955	1.69540	0.99865	3.00000
0.8	0.84162	0.96	1.75069	**0.999**	**3.09023**
0.85	1.03644	0.965	1.81191	**0.9995**	**3.29053**
0.9	**1.28155**	0.97	1.88080	0.999767	3.50000

Хvснэгт 2 t–тархалтын квантиль $t_{m;q}$

m \ q	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.7	318.3	636.6
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.6
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.9
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Хvснэгт 3 Стандарт нормаль тархалтын нягтын функц $\varphi(x)$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Хvснэгт 4а $q = 0.95$-д харгалзах F–тархалтын квантиль $F_{m_1, m_2; q}$

$m_2 \backslash m_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	37	239	41	242
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	4.68	4.64	4.60	4.56	4.50	4.44	4.42	4.41	4.37	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.15	2.09	2.04
48	4.04	3.19	2.80	2.57	2.41	2.29	2.21	2.14	2.08	2.03
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
55	4.02	3.16	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.06	2.01
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
65	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.03	1.98
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.96	1.91
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
400	3.86	3.02	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83

Хvснэгт 4а $q = 0.95$-д харгалзах F–тархалтын квантиль $F_{m_1, m_2; q}$

$m_2 \backslash m_1$	12	14	16	20	30	50	75	100	500	∞
1	244	245	246	248	250	252	253	253	254	254
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.74	8.71	8.69	8.66	8.62	8.58	8.56	8.55	8.53	8.53
4	5.91	5.87	5.84	5.80	5.75	5.70	5.68	5.66	5.64	5.63
5	4.68	4.64	4.60	4.56	4.50	4.44	4.42	4.41	4.37	4.36
6	4.00	3.96	3.92	3.87	3.81	3.75	3.72	3.71	3.68	3.67
7	3.57	3.53	3.49	3.44	3.38	3.32	3.29	3.27	3.24	3.23
8	3.28	3.24	3.20	3.15	3.08	3.02	3.00	2.97	2.94	2.93
9	3.07	3.03	2.99	2.93	2.86	2.80	2.77	2.76	2.72	2.71
10	2.91	2.86	2.83	2.77	2.70	2.64	2.61	2.59	2.55	2.54
11	2.79	2.74	2.70	2.65	2.57	2.51	2.47	2.46	2.42	2.40
12	2.69	2.64	2.60	2.54	2.47	2.40	2.36	2.35	2.31	2.30
13	2.60	2.55	2.51	2.46	2.38	2.31	2.28	2.26	2.22	2.21
14	2.53	2.48	2.44	2.39	2.31	2.24	2.21	2.19	2.14	2.13
15	2.48	2.42	2.38	2.33	2.25	2.18	2.14	2.12	2.08	2.07
16	2.42	2.37	2.33	2.28	2.19	2.12	2.09	2.07	2.02	2.01
17	2.38	2.33	2.29	2.23	2.15	2.08	2.04	2.02	1.97	1.96
18	2.34	2.29	2.25	2.19	2.11	2.04	2.00	1.98	1.93	1.92
19	2.31	2.26	2.21	2.15	2.07	2.00	1.96	1.94	1.89	1.88
20	2.28	2.22	2.18	2.12	2.04	1.97	1.93	1.91	1.86	1.84
21	2.25	2.20	2.16	2.10	2.01	1.94	1.90	1.88	1.82	1.81
22	2.23	2.17	2.13	2.07	1.98	1.91	1.87	1.85	1.80	1.78
23	2.20	2.15	2.11	2.05	1.96	1.88	1.84	1.82	1.77	1.76
24	2.18	2.13	2.09	2.03	1.94	1.86	1.82	1.80	1.75	1.73
25	2.16	2.11	2.07	2.01	1.92	1.84	1.80	1.78	1.73	1.71
	12	14	16	20	30	50	75	100	500	∞
26	2.15	2.09	2.05	1.99	1.90	1.82	1.78	1.76	1.71	1.69
27	2.13	2.08	2.04	1.97	1.88	1.81	1.76	1.74	1.68	1.67
28	2.12	2.06	2.02	1.96	1.87	1.79	1.75	1.73	1.67	1.65
29	2.10	2.05	2.01	1.94	1.85	1.77	1.73	1.71	1.65	1.64
30	2.09	2.04	1.99	1.93	1.84	1.76	1.72	1.70	1.64	1.62
32	2.07	2.01	1.97	1.91	1.82	1.74	1.69	1.67	1.61	1.59
34	2.05	1.99	1.95	1.89	1.80	1.71	1.67	1.65	1.59	1.57
36	2.03	1.98	1.93	1.87	1.78	1.69	1.65	1.62	1.56	1.55
38	2.02	1.96	1.92	1.85	1.76	1.68	1.63	1.61	1.54	1.53
40	2.00	1.95	1.90	1.84	1.74	1.66	1.61	1.59	1.53	1.51
42	1.99	1.94	1.89	1.83	1.73	1.65	1.60	1.57	1.51	1.49
44	1.98	1.92	1.88	1.81	1.72	1.63	1.58	1.56	1.49	1.48
46	1.97	1.91	1.87	1.80	1.71	1.62	1.57	1.55	1.48	1.46
48	1.96	1.90	1.86	1.79	1.70	1.61	1.56	1.54	1.47	1.45
50	1.95	1.89	1.85	1.78	1.69	1.60	1.55	1.52	1.46	1.44
55	1.93	1.88	1.83	1.76	1.67	1.58	1.53	1.50	1.43	1.41
60	1.92	1.86	1.82	1.75	1.65	1.56	1.51	1.48	1.41	1.39
65	1.90	1.85	1.80	1.73	1.63	1.54	1.49	1.46	1.39	1.37
70	1.89	1.84	1.79	1.72	1.62	1.53	1.48	1.45	1.37	1.35
80	1.88	1.82	1.77	1.70	1.60	1.51	1.45	1.43	1.35	1.32
100	1.85	1.79	1.75	1.68	1.57	1.48	1.42	1.39	1.31	1.28
125	1.83	1.77	1.73	1.66	1.55	1.45	1.40	1.36	1.27	1.25
150	1.82	1.76	1.71	1.64	1.53	1.44	1.38	1.34	1.25	1.22
200	1.80	1.74	1.69	1.62	1.52	1.41	1.35	1.32	1.22	1.19
400	1.78	1.72	1.67	1.60	1.49	1.38	1.32	1.28	1.17	1.13
1000	1.76	1.70	1.65	1.58	1.47	1.36	1.30	1.26	1.13	1.08
∞	1.75	1.69	1.64	1.57	1.46	1.35	1.28	1.24	1.11	1.00

Хүснэгт 4b q = 0.99-д харгалзах F–тархалтын квантиль $F_{m_1,m_2;\,q}$

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.6
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.25	3.13	3.02	2.93
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98	2.89
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95	2.86
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92	2.83
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
42	7.28	5.15	4.29	3.80	3.49	3.27	3.10	2.97	2.86	2.78
44	7.25	5.12	4.26	3.78	3.47	3.24	3.08	2.95	2.84	2.75
46	7.22	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.06	2.93	2.82	2.73
48	7.20	5.08	4.22	3.74	3.43	3.20	3.04	2.91	2.80	2.71
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70
55	7.12	5.01	4.16	3.68	3.37	3.15	2.98	2.85	2.75	2.66
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
65	7.04	4.95	4.10	3.62	3.31	3.09	2.93	2.80	2.69	2.61
70	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50
125	6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.66	2.55	2.47
150	6.81	4.75	3.92	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53	2.44
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41
400	6.70	4.66	3.83	3.37	3.06	2.85	2.69	2.56	2.45	2.37
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32

Хүснэгт 4b $q = 0.99$-д харгалзах F–тархалтын квантиль $F_{m_1,m_2;q}$

$m_2 \backslash m_1$	12	14	16	20	30	50	75	100	500	∞
1	6106	6143	6170	6209	6261	6302	6324	6334	6360	6366
2	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	27.1	26.9	26.8	26.7	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1	26.1
4	14.4	14.3	14.2	14.0	13.8	13.7	13.6	13.6	13.5	13.5
5	9.89	9.77	9.68	9.55	9.38	9.24	9.17	9.13	9.04	9.02
6	7.72	7.60	7.52	7.40	7.23	7.09	7.02	6.99	6.90	6.88
7	6.47	6.36	6.27	6.16	5.99	5.86	5.79	5.75	5.67	5.65
8	5.67	5.56	5.48	5.36	5.20	5.07	5.00	4.96	4.88	4.86
9	5.11	5.00	4.92	4.81	4.65	4.52	4.45	4.42	4.33	4.31
10	4.71	4.60	4.52	4.41	4.25	4.12	4.05	4.01	3.93	3.91
11	4.40	4.29	4.21	4.10	3.94	3.81	3.74	3.71	3.62	3.60
12	4.16	4.05	3.97	3.86	3.70	3.57	3.49	3.47	3.38	3.36
13	3.96	3.86	3.78	3.66	3.51	3.38	3.31	3.27	3.19	3.17
14	3.80	3.70	3.62	3.51	3.35	3.22	3.15	3.11	3.03	3.00
15	3.67	3.56	3.49	3.37	3.21	3.08	3.01	2.98	2.89	2.87
16	3.55	3.45	3.37	3.26	3.10	2.97	2.90	2.86	2.78	2.75
17	3.46	3.35	3.27	3.16	3.00	2.87	2.80	2.76	2.68	2.65
18	3.37	3.27	3.19	3.08	2.92	2.78	2.71	2.68	2.59	2.57
19	3.30	3.19	3.12	3.00	2.84	2.71	2.64	2.60	2.51	2.49
20	3.23	3.13	3.05	2.94	2.78	2.64	2.57	2.54	2.44	2.42
21	3.17	3.07	2.99	2.88	2.72	2.58	2.51	2.48	2.38	2.36
22	3.12	3.02	2.94	2.83	2.67	2.53	2.46	2.42	2.33	2.31
23	3.07	2.97	2.89	2.78	2.62	2.48	2.41	2.37	2.28	2.26
24	3.03	2.93	2.85	2.74	2.58	2.44	2.37	2.33	2.24	2.21
25	2.99	2.89	2.81	2.70	2.54	2.40	2.33	2.29	2.19	2.17
	12	14	16	20	30	50	75	100	500	∞
26	2.96	2.86	2.78	2.66	2.50	2.36	2.29	2.25	2.16	2.13
27	2.93	2.82	2.75	2.63	2.47	2.33	2.25	2.22	2.12	2.10
28	2.90	2.80	2.72	2.60	2.44	2.30	2.23	2.19	2.09	2.06
29	2.87	2.77	2.69	2.57	2.41	2.27	2.20	2.16	2.06	2.03
30	2.84	2.74	2.66	2.55	2.39	2.25	2.17	2.13	2.03	2.01
32	2.80	2.70	2.62	2.50	2.34	2.20	2.12	2.08	1.98	1.96
34	2.76	2.66	2.58	2.46	2.30	2.16	2.08	2.04	1.94	1.91
36	2.72	2.62	2.54	2.43	2.26	2.12	2.04	2.00	1.90	1.87
38	2.69	2.59	2.51	2.40	2.23	2.09	2.01	1.97	1.86	1.84
40	2.66	2.56	2.48	2.37	2.20	2.06	1.98	1.94	1.83	1.80
42	2.64	2.54	2.46	2.34	2.18	2.03	1.98	1.91	1.80	1.78
44	2.62	2.52	2.44	2.32	2.15	2.01	1.93	1.89	1.78	1.75
46	2.60	2.50	2.42	2.30	2.13	1.99	1.91	1.86	1.76	1.73
48	2.58	2.48	2.40	2.28	2.12	1.97	1.89	1.84	1.73	1.70
50	2.56	2.46	2.38	2.26	2.10	1.95	1.87	1.82	1.71	1.68
55	2.53	2.42	2.34	2.23	2.06	1.91	1.83	1.78	1.67	1.64
60	2.50	2.39	2.31	2.20	2.03	1.88	1.79	1.75	1.63	1.60
65	2.47	2.37	2.29	2.18	2.00	1.85	1.76	1.72	1.60	1.57
70	2.45	2.35	2.27	2.15	1.98	1.83	1.74	1.70	1.57	1.54
80	2.42	2.31	2.23	2.12	1.94	1.79	1.70	1.65	1.53	1.49
100	2.37	2.27	2.19	2.07	1.89	1.74	1.65	1.60	1.47	1.43
125	2.33	2.23	2.15	2.03	1.85	1.69	1.60	1.55	1.41	1.37
150	2.31	2.20	2.12	2.00	1.83	1.67	1.57	1.52	1.38	1.33
200	2.27	2.17	2.09	1.97	1.79	1.63	1.53	1.48	1.33	1.28
400	2.23	2.13	2.04	1.92	1.74	1.58	1.48	1.42	1.25	1.19
1000	2.20	2.10	2.02	1.90	1.72	1.54	1.44	1.38	1.19	1.11
∞	2.18	2.08	2.00	1.88	1.70	1.52	1.42	1.36	1.15	1.00

Хүснэгт 5 Пуассоны тархалтын магадлал $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$k \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000696
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000081
7					0,000001	0,000003	0,000008

$k \backslash \lambda$	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0	0,449329	0, 406570	0,367879	0,223130	0,135335	0,082085	0,049787
1	0,359463	0,365913	0,367879	0,334695	0,270671	0,205212	0,149361
2	0,143785	0,164661	0,183940	0,251021	0,270671	0,256516	0,224042
3	0,038343	0,049398	0,061313	0,125510	0,180447	0,213763	0,224042
4	0,007669	0,011115	0,015328	0,047067	0,090224	0,133602	0,168031
5	0,001227	0,002001	0,003066	0,014120	0,036089	0,066801	0,100819
6	0,000164	0,000300	0,000511	0,003530	0,012030	0,027834	0,050409
7	0,000019	0,000039	0,000073	0,000756	0,003437	0,009941	0,021604
8	0,000002	0,000004	0,000009	0,000142	0,000859	0,003106	0,008101
9			0,000001	0,000024	0,000191	0,000863	0,002701
10				0,000004	0,000038	0,000216	0,000810
11					0,000007	0,000049	0,000221
12					0,000001	0,000010	0,000055
13						0,000002	0,000013
14							0,000003
15							0,000001

Хүснэгт 5 Пуассоны тархалтын магадлал $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$k \backslash \lambda$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007567
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737	0,018917
5	0,156293	0,175467	0,016623	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833
6	0,104196	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756	0,112599
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113736
12	0,000642	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18		0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091
19		0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20			0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21			0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22				0,000003	0,000022	0,000108	0,000404
23				0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24					0,000003	0,000016	0,000073
25					0,000001	0,000006	0,000029
26						0,000002	0,000011
27						0,000001	0,000004
28							0,000001
29							0,000001

Хүснэгт 6 χ^2 ("Хи"-квадрат)–тархалтын квантиль $\chi^2_{m;\,q}$

$m \backslash q$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.020	0.051	0.103	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	22.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.51	71.42	76.16	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.96
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.23
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33	116.33
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12	128.31
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81	140.18

(1)=0.00004; (2)=0.00016; (3)=0.00098; (4)=0.0039; (5)=0.0158

Ном зүй

1. Amman, H. M. (ed.) (1996): Handbook of Computational Economics. Elsevier: Amsterdam
2. Anthony, M., Biggs, N. L. (1996): Mathematics for Economics and Finance. Methods and Modelling. Cambridge University Press: Cambridge
3. Baltagi, B. H. (1999): Econometrics, 2nd edition. Springer: Berlin, Heidelberg
4. Baltagi, B. H. (1998): Solutions Manual for Econometrics. Springer: Berlin, Heidelberg
5. Baxter, M., Rennie, A. (1997): Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing. Cambridge University Press: Cambridge
6. Chiang, A. C. (1984): Fundamental Methods of Mathematical Economics, 3rd edition. McGraw-Hill: New York
7. Cissell, R., Cissell, H., Flaspohler, D. C. (1990): Mathematics of Finance. Houghton Mifflin: Boston
8. Elliott, R. J., Kopp, P. E. (1999): Mathematics of Financial Markets. Springer: New York, Berlin, Heidelberg
9. Elton, F., Gruber, M. (1992): Futures and Options, 4th edition. Wiley: New York
10. Glenberg, A. M. (1998): Learning from Data: An Introduction to Statistical Reasoning. Erlbaum: Mahwah (NJ)
11. Jacques, I. (1999): Mathematics for Economics and Business. Addison-Wesley: Harlow
12. Jeffrey, A. (1995): Handbook of Mathematical Formulas and Integrals. Academic Press: San Diego (Calif.)
13. Levy, A. (1992): Economic Dynamics. Applications of Difference Equations, Differential Equations and Optimal Control. Avebury: Aldershot
14. Mansfield, E. (1994): Statistics for Business and Economics: Methods and Applications, Norton: New York
15. Moore, J. C. (1999): Mathematical Methods for Economic Theory. Springer: Berlin
16. Pestman, W. R. (1998): Mathematical Statistics – an Introduction. de Gruyter: Berlin, New York
17. Simon, C. P., Blume L. (1994): Mathematics for Economists. Norton: New York
18. Sirjaev, A. N. (1996): Probability, 2nd edition (Transl. from the Russian). Springer: New York, Heidelberg
19. Sydsaeter, K., Strom A., Berck, P. (1993): Economists' Mathematical Manual, 3rd edition. Springer: Berlin, Heidelberg
20. Watson C., Billingsley, P., Croft, D., Huntsberger, D. (1993): Statistics for Management and Economics, 5th edition. Houghton Mifflin: Boston
21. Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J. (1998): The Mathematics of Financial derivatives. A Student Introduction. Cambridge University Press: Cambridge