.

I бүлэг. Нэг хувьсагчийн функцийн минимум

§ 1.1 Бодлогын тавил

Нэг хувьсагчийн функцийн минимумыг өгөгдсөн олонлог дээр олох бодлого авч үзье. Энэ бодлогыг томьёолж бичвэл:

$$f(x) \to \min, \quad x \in D \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

үүнд $R = \{x| - \infty < x < \infty\}$ тоон тэнхлэг, $D \subset \mathbb{R}$- дэд олонлог. $f(x)$-функц нь D дээр тодорхойлогдсон бөгөөд бүх $x \in D$ цэгүүд дээр төгсгөлөг утга авна. D олонлог нь хэрчим, интервал, хагас интервал хэлбэрээр өгөгдднө.
$D = [a, b] = \{x \in \mathbb{R}|a \leq x \leq b\}$-хэрчим
$D = (a, b) = \{x \in \mathbb{R}|a < x < b\}$-интервал
$D = [a, b) = \{x \in \mathbb{R}|a \leq x < b\}$-хагас интервал
$D = (a, b] = \{x \in \mathbb{R}|a < x \leq b\}$-хагас интервал
a, b-нь өгөгдсөн тоонууд.

Тодорхойлолт 1.1. Хэрэв $x \in D$ цэгийн хувьд

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in D$$

нөхцөл биелэгдэж байвал x^* цэгийг $f(x)$ функцийн D дээрх глобаль минимумын цэг гэж нэрлэнэ.

$f(x^*)$-ийг функцийн D олонлог дээрх хамгийн бага утга буюу глобаль минимум гэж нэрлээд

$$\min_{x \in D} f(x) = f(x^*)$$

гэж тэмдэглэнэ. Мөн x^* цэгийг (1.1) бодлогын шийд гэнэ.
Тэмдэглэхдээ $x^* = arg \min\limits_{x \in D} f(x)$ эсвэл $x^* = arg \min(1.1)$.
$f(x)$ функцийн D дээрх глобаль минимумын цэгүүдийн олонлогийг D_* -оор тэмдэглэе.

$$D_* = \{x \in D|f(x) = \min_{x \in D} f(x)\}.$$

$f(x)$ функц болон D олонлог хэрхэн өгөгдсөнөөс хамааран D_* олонлог нь ганц цэгээс, эсвэл хэд хэд буюу тоо томшгүй олон цэгээс тогтож болохоос гадна хоосон n байж болно.

Жишээ 1.1

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(\frac{\pi}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Хэрэв $D = [1,2]$ бол $D_* = \{1\}$.
Хэрэв $D = [\frac{1}{3}, 1]$ бол $D_* = \{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\}$.
Хэрэв $D = (0,1]$ бол $D_* = \{x | x = \frac{1}{k}, k = 1, 2, ..., \}$.
Эдгээр гурван тохиолдолд $\min\limits_{x \in D} f(x) = 0$ байх нь илэрхий юм.

Хэрэв $D = [2, \infty\}$ бол функцийн хамгийн бага утга оршихгүй гэдгийг хялбархан шалгаж болох ба $D_* = \emptyset$ байна.

Жишээ 1.2. $f(x) = |x| + |x-1| - 1$ функц авъя.
Хэрэв $D = [-1, 1]$ бол $D_* = [0, 1]$ ба $\min\limits_{x \in D} f(x) = 0$.
Хэрэв $D = [1, 2]$ бол $D_* = \{1\}, \quad f(x^*) = 0$.
Хэрэв $D = (0, 1]$ бол $D_* = \emptyset$.

Жишээ 1.3. $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
Хэрэв $D = [0, 1]$ бол $D_* = \emptyset$.

Жишээ 1.4. $f(x) = \ln x, \quad D = (0, 1]$ үед $D_* = \emptyset$, учир нь бүх $x \in D$ бүх цэгүүдийн хувьд $f(x)$ төгсгөлөг утга авдаг боловч $x^k = \frac{1}{k}(k = 1, 2, ...)$ дарааллын хувьд $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^k) = -\infty$ болно.

Тодорхойлолт 1.2. Хэрэв

$$f(x) \geq m, \quad \forall x \in D$$

нөхцлийг хангах m тоо оршин байвал $f(x)$ функцийг D олонлог дээр доороосоо зааглагдсан функц гэж нэрлэнэ. Хэрэв ямар нэг $\{x^k\} \in D$ дараалал олдоод

$$\lim_{k \to \infty} f(x^k) = -\infty$$

нөхцөл биелэгдэж байвал $f(x)$ функц D дээр доороосоо зааглагдаагүй байна.
Жишээлбэл, өмнө авч үзсэн 1.1-1.3-р жишээнүүдийн хувьд $f(x)$ доороосоо зааглагдсан ба 1.4-р жишээнд $f(x)$ доороосоо зааглагдаагүй байна. $D_* = \emptyset$ үед функцийн хамгийн бага утгыг өргөтгөж функцийн доод торгон заагийн тодорхойлолт өгье.

Тодорхойлолт 1.3. $f(x)$ функц нь D дээр доороосоо зааглагдсан байг. Хэрэв f_* тооны хувьд:
1. $f_* \leq f(x), \quad \forall x \in D$
2. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x^\varepsilon \in D : f(x^\varepsilon) < f_* + \varepsilon$
биелэгдэж байвал f_*-г $f(x)$ функцийн D дээрх доод торгон зааг гэж нэрлэнэ. Хэрэв $f(x)$ функц D дээр доороосоо зааглагдаагүй бол $f_* = -\infty$ гэж үзнэ. Функцийн доод торгон заагийг

$$\inf_{x \in D} f(x) = f_*$$

гэж тэмдэглэнэ.

Жишээлбэл, 1.1-1.3-р жишээнүүдэд $f_* = 0$ ба 1.4-р жишээнд $f_* = -\infty$ байна. Хэрэв $D_* \neq \emptyset$ бол функцийн хамгийн бага утга ба доод торгон зааг давхцах нь илэрхий юм.
Өөрөөр хэлбэл,

$$\inf_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} f(x)$$

Энэ үед $f(x)$ функц минимум утгандаа хүрч байна гэж ярина. Дээрх жишээнээс харахад

$$\inf_{x \in D} f(x) = f_*$$

үргэлж орших ба $\min\limits_{x \in D} f(x)$ тэр болгон оршихгүй байна.

Тодорхойлолт 1.4. Хэрэв $\{x^k\} \in D$ дарааллын хувьд

$$\lim_{k \to \infty} f(x^k) = \inf_{x \in D} f(x) = f_*$$

биелэгдэж байвал $\{x^k\}$-дарааллыг $f(x)$ функцийн D дээрх багасгагч дараалал гэж нэрлэнэ.

Тодорхойлолт 1.3, 1.4-өөс багасгагч дараалал ямагт оршин байх нь мөрдөн гарна.

Тодорхойлолт 1.5. Хэрэв хоосон биш олонлог D ба $\{x^k\}$ дарааллыг авахад $\lim_{k\to\infty} \rho(x^k, D) = 0$ нөхцөл биелэгдэж байвал $\{x^k\}$ дарааллыг D олонлог руу нийлж байна гэж ярина. Үүнд $\rho(x^k, D) = \inf_{x\in D} |x^k - x|$ нь x^k-ээс D олонлог хүртэлх зай.

Хэрэв $D_* \neq \emptyset$ бол D_* руу нийлдэг багасгагч дараалал ямагт оршино. Жишээлбэл, $x^* \in D_*$ ба $x^k = x^*(k = 1, 2, ...)$ гэж авахад хүрэлцээтэй юм.
Нөгөө талаас $D_* \neq \emptyset$ үед дурын багасгагч дараалал D_*-руу тэр болгон нийлэхгүй.

Жишээ 1.5.

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^4}, \quad D = \mathbb{R}.$$

$f_* = 0$ ба $D_* = \{0\}$ байх нь илэрхий. Манай тохиолдолд $x^k = k \ \ (k = 1, 2, ...)$ дараалал багасгагч дараалал болно. Учир нь

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = 0.$$

Харин $\rho(x^k, D_*) = k$ байх ба $\{k\}$ дараалал тэг рүү тэмүүлэхгүй юм.
Иймд бид цаашид (1.1) бодлогыг авч үзэхдээ хоёр төрөлд ангилна.
1-р төрөлд зөвхөн доод торгон заагийг

$$f_* = \inf_{x\in D} f(x)$$

тодорхойлох бодлого багтана. Энэ тохиолдолд D_* хоосон байж болно.
2-р төрөлд $D_* \neq \emptyset$ байх бодлогуудыг авч үзэх бөгөөд энэ үед $\min_{x\in D} f(x)$-г олохоос гадна $x^* \in D_*$ -г олох шаардлагатай байдаг.

Дээрх төрлийн бодлогуудын жинхэнэ шийдийг цөөхөн тохиолдолд олж болно. Иймд практикт 1-р төрлийн бодлогуудыг бодохдоо $f(x)$ функцийн D дээрх багасгагч дараалал $\{x^k\}$-г байгуулдаг бөгөөд k-ийн хүрэлцээтэй их үед $f(x^k)$-г f_*-ийн ойролцоо

утга болгож авна. Мөн үүний адилаар 2-р төрлийн бодлогын хувьд D_* руу нийлэх багасгагч дараалал байгуулдаг бөгөөд k-ийн хүрэлцээтэй их утганд x^k-г (1.1) бодлогын ойролцоо шийд болгож авна.
Бид цаашид дурын багасгагч дараалал нь D_* руу нийлдэг бодлогын ангийг авч үзэх болно.
Ийм бодлогын ангийг Вейерштрассын теоремоор өгч болдог.

Теорем 1.1. $f(x)$ функц нь D дээр тасралтгүй, $D \subset \mathbb{R}$ зааглагдсан битүү олонлог байг. Тэгвэл
1. $f(x)$ нь D дээр доороосоо зааглагдсан ба

$$D_* = \{x | f(x) = \min_{x \in D} f(x)\} \neq \emptyset$$

2. Дурын багасгагч дараалал $\{x^k\} \in D$ нь D_* руу нийлнэ. Өөрөөр хэлбэл,

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x^k, D_*) = 0. \qquad \blacksquare$$

Энэ теоремын баталгааг математик анализын сурах бичгүүдээс [3, 5, 9] үзэж болно.

Бид (1.1) бодлогын шийдийг тодорхойлолт 1.1-ийн хувьд авч үзсэн билээ. Одоо (1.1) бодлогыг өргөтгөх зорилгоор орчны минимумын цэгийн тодорхойлолтыг өгье.

Тодорхойлолт 1.6. Хэрэв хүрэлцээтэй бага эерэг ε тоо авахад

$$f(x^0) \leq f(x)$$

тэнцэтгэл биш нь $|x - x^0| \leq \varepsilon$ нөхцөлийг хангах бүх $x \neq x^0, \quad x \in D$-ийн хувьд биелэгдэж байвал $x^0 \in D$ цэгийг $f(x)$ функцийн D дээрх орчны минимумын цэг гэж нэрлэнэ. Харин $f(x^0) = f(x)$ тэнцэтгэл нь зөвхөн $x = x^0$ үед биелэгддэг бол x^0-г орчны эрс минимумын цэг гэж нэрлэнэ. $x^0 \in D$ орчны минимумын цэг гэдгийг

$$x^0 = argloc \min_{x \in D} f(x) \quad \text{буюу} \quad x^0 = argloc \min (1.1)$$

гэж тэмдэглэнэ.

Цаашид (1.1) бодлогын орчны ба глобаль минимумын цэгүүдийг минимумын цэгүүд гэж нэрлэе.
Төгсгөлд нь нэг хувьсагчийн функцийн максимум олох бодлоготой товч танилцъя.

$$f(x) \to \max, \quad x \in D \subset \mathbb{R} \tag{1.2}$$

Тодорхойлолт 1.7. Хэрэв төгсгөлөг тоо M-ийн хувьд

$$f(x) \le M, \quad \forall x \in D$$

тэнцэтгэл биш биелэгдэж байвал $f(x)$ функцийг D дээр дээрээсээ заагласдсан функц гэж нэрлэнэ. Хэрэв ямар нэг $\{x^k\} \in D$ дараалал олдоод

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = \infty$$

бол $f(x)$ функц D дээр дээрээсээ заагласдаагүй байна.

Хэрэв $f(x)$ функц D дээр доороосоо ба дээрээсээ зэрэг заагласдсан бол түүнийг D муж дээр заагласдсан функц гэнэ.

Тодорхойлолт 1.8. $f(x)$ функц D дээр дээрээсээ заагласдсан байг. Хэрэв f^{**} тооны хувьд
1) $f(x) \le f^{**}, \quad \forall x \in D$
2) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x^\varepsilon \in D, \quad f(x^\varepsilon) > f^{**} - \varepsilon$ нөхцөлүүд биелэгдэж байвал f^{**}-г $f(x)$ функцийн D дээрх дээд торгон зааг гэж нэрлээд $f^{**} = \sup\limits_{x\in D} f(x)$ гэж тэмдэглэнэ.

Хэрэв $f(x)$ функц D дээр дээрээсээ заагласдаагүй бол тодорхойлолт ёсоор $f^{**} = \infty$ гэж үзнэ. $\{x^k\} \in D$ дарааллын хувьд

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = \sup_{x\in D} f(x) = f^{**}$$

бол $\{x^k\}$ дарааллыг $f(x)$ функцийн ихэсгэгч дараалал гэж нэрлэнэ. Хэрэв $x^* \in D$ цэгийн хувьд

$$f(x^*) = f^{**}$$

биелэгдэж байвал x^*-г $f(x)$ функцийн D дээрх глобаль максимумын цэг буюу (1.2) бодлогын шийд гэж нэрлэнэ. Үүнийг тэмдэглэхдээ:

$$x^* = arg \max_{x \in D} f(x), \quad x^* = arg \max(1.2)$$

$f(x^*)$-г функцийн D дээрх хамгийн их утга гэнэ.
Энэ тохиолдолд

$$\max_{x \in D} f(x) = \sup_{x \in D} f(x) = f(x^*)$$

гэдэг нь илэрхий юм. D^* олонлог нь (1.2) бодлогын шийдүүдийн олонлог болог. Өөрөөр хэлбэл,

$$D^* = \{x | f(x) = \sup_{x \in D} f(x)\}.$$

Теорем 1.1-ийн нөхцөл биелэгдэж байгаа тохиолдолд $f^{**} < +\infty$, $D^* \neq \emptyset$ болох ба дурын ихэсэгэгч дараалал $\{x^k\}$ нь D^* руу нийлнэ. нөгөө талаас

$$\sup_{x \in D} f(x) = - \inf_{x \in D} (-f(x))$$

тул $f(x)$ функцийн D дээрх глобаль максимумын дурын цэг нь $(-f(x))$ функцийн D дээрх глобаль минимумын цэг болж өгнө. Энэ нь $f(x)$ функцийн D дээрх (глобаль) максимум олох бодлого нь $(-f(x))$ функцийн D дээрх (глобаль) минимум олох бодлоготой тэнцүү чанартай гэсэн үг юм. Иймд бид цаашид функцийн зөвхөн минимум олох бодлогыг авч үзэх нь хангалттай юм.

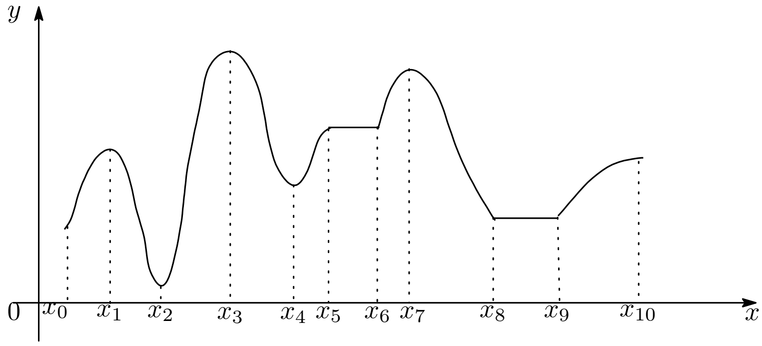
Тодорхойлолт 1.9. Хэрэв ямар нэг хүрэлцээтэй бага $\varepsilon > 0$ тоо авахад

$$f(x) \leq f(x^0)$$

тэнцэтгэл биш нь $|x - x^0| \leq \varepsilon$ нөхцөлийг хангах бүх $x \in D$-ийн хувьд биелэгдэж байвал $x^0 \in D$ цэгийг $f(x)$ функцийн D дээрх орчны максимумын цэг гэж нэрлэнэ. Үүнийг $x^0 = argloc \max_{x \in D} f(x)$ буюу $x^0 = argloc \max(1.2)$ гэж тэмдэглэнэ.

Минимум ба максимумын цэгүүдийг экстремумын цэгүүд гэнэ. (1.2) бодлогын глобаль максимум ба орчны максимумын цэгүүдийг максимумын цэгүүд гэж нэрлэе.

Жишээ 1.6. Функцийн график доорх байдлаар (зур. 1.1.) өгөгдсөн үед функцийн максимумын ба минимумын цэгүүдийг олъё.



Зураг 1.1.

Тэгвэл $D_* = \{x_2\}, \quad D^* = \{x_3\}$ болох бөгөөд
$x_0, x_2, x_4, x_5 < x \le x_6, \quad x_8 \le x \le x_9$ цэгүүд нь функцийн орчны минимумын цэгүүд болно.
Харин $x_1, x_3, x_5, x_7, x_5 \le x < x_6, \quad x_8 < x < x_9, \quad x_{10}$ цэгүүд нь орчны максимумын цэгүүд болно.

§1.2. Сонгодог арга.

Дифференциал тоолол дээр тулгуурлаж функцийн экстремумын цэгүүдийг олохыг сонгодог аргад хамааруулна. Энэ аргыг математик анализын сурах бичгүүдэд [3, 5, 9] дэлгэрэнгүй өгсөн байдаг тул энд товчхон авч үзье. Үүний тулд $f(x)$ функц нь бүх тоон шулуун дээр дифференциалчлагдана гэж үзээд дараах бодлогыг томьёолъё.

$$f(x) \to \min, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Теорем 1.2. (Ферма) $x^0 \in \mathbb{R}$ цэг нь (1.3) бодлогын экстремумын цэг болог. Тэгвэл

$$f'(x^0) = 0. \tag{1.4.}$$

Баталгаа. x^0 цэг нь $f(x)$ функцийн $\mathbb{R}$ дээрх минимумын цэг болог. Тэгвэл тодорхойлолт 1.6 ёсоор эерэг тоо ε орших бөгөөд:

$$f(x^0 + \xi) - f(x^0) \geq 0, \quad \forall \xi : |\xi| < \varepsilon \tag{1.5}$$

биелэгдэнэ. Нөгөө талаас x^0 цэг дээр Тейлорын томъёоны задаргааг бичвэл: $f(x^0 + \xi) = f(x^0) + \xi f'(x^0) + o(\xi^2)$, үүнд $\lim\limits_{\xi \to 0} \frac{o(\xi^2)}{\xi} = 0$.
$f'(x^0) \neq 0$ гэж үзээд $\xi = -\rho f'(x^0)$ гэе.
$\rho > 0 : |f'(x^0)|\rho < \varepsilon$ нөхцөл биелэгдэнэ.
Тэгвэл

$$\frac{f(x^0 + \xi) - f(x^0)}{\rho} = -(f'(x^0))^2 + \frac{o(\rho^2)}{\rho}.$$

Нөгөө талаар

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho^2)}{\rho} = 0$$

тул ρ-ийн хүрэлцээтэй бага холбогдолд сүүлчийн илэрхийллийн баруун талын тэмдэг нь түүний 1-р нэмэгдэхүүний тэмдгээр тодорхойлогдоно. Өөрөөр хэлбэл,

$$f(x^0 + \xi) - f(x^0) < 0$$

болж (1.5)-тай зөрчилд орж байна. Иймд $f'(x_0) = 0$ болж теорем батлагдав. ■

Теорем 1.2 нь экстремумын цэгийн зайлшгүй нөхцөлийг тодорхойлно. (1.4) нөхцлийг хангах $x \in \mathbb{R}$ цэгүүдийг функцийн экстремум орших сэжигтэй цэгүүд гэж нэрлэнэ. Цаашид ийм цэгүүдийг (1.3) бодлогын сэжигтэй цэг гэж нэрлэе.

Теорем 1.3. (экстремум байх хүрэлцээтэй нөхцөл) $f(x)$ функц нь 2- удаа дифференциалчлагдах бөгөөд $x^0 \in \mathbb{R}$ цэг нь (1.3) бодлогын сэжигтэй цэг болог.

Хэрэв $f''(x^0) > 0 (f''x^0) < 0)$ бол x^0 нь орчны минимумын (максимумын) цэг болно.

Баталгаа. x^0 сэжигтэй цэг учир $f'(x^0) = 0$ байна. $f(x)$ функцийг x^0 цэгийн орчинд Тейлорын томъёонд задалбал:

$$f(x^0 + \xi) - f(x^0) = \frac{1}{2}\xi^2 f''(x^0) + o(\xi^2).$$

$f''(x^0) \neq 0$ үед энэ илэрхийллийн баруун талын тэмдэг нь $f''(x^0)$-ийн тэмдгээр тодорхойлогдоно. Иймд

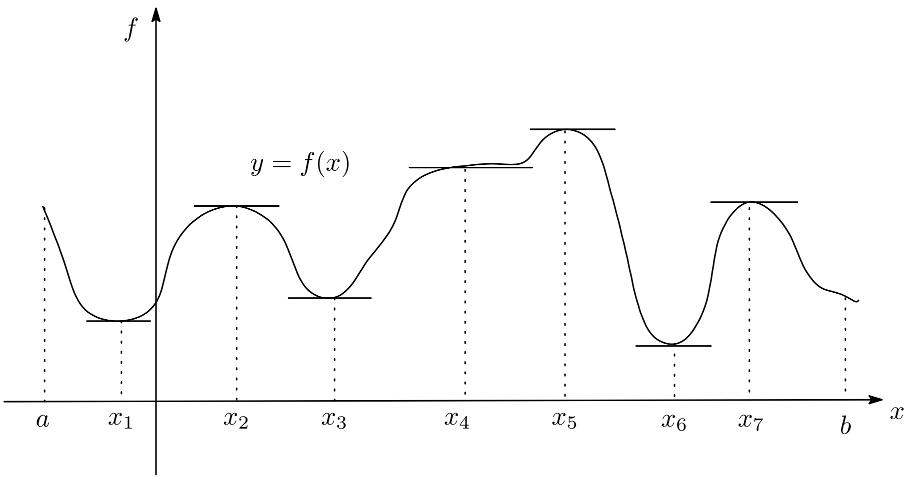
$$f(x^0 + \xi) - f(x^0) > 0$$

болж x^0 цэг нь орчны минимумын цэг болно.
Мөн үүнтэй ижилхэнээр x^0-ийг орчны максимумын цэг үед баталгааг хийж болно. Теорем батлагдав. ■

Теорем 1.2-ыг ашиглан дифференциалчлагддаг функцийн өгөгдсөн хэрчим дээрх хамгийн их, хамгийн бага утгуудыг олж болно. Энэ бодлогыг

$$f(x) \to \min(\max), \quad x \in [a, b] \tag{1.6}$$

хэлбэрт томъёолж болно. $x_i (i = \overline{1, k})$ цэгүүд нь (1.6) бодлогын сэжигтэй цэгүүд бөгөөд $x_i \in [a, b], \quad i = 1, 2, \ldots, k$ байг.
Тэгвэл $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k), f(b)\}$,
$\min\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k), f(b)\}$.
Жишээлбэл:



Зураг 1.2.

Зураг 1.2-д өгөгдсөн функцийн хувьд $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ нь экстремумын сэжигтэй цэгүүд бөгөөд

$$\min_{[a,b]} f(x) = f(x_6), \qquad \max_{[a,b]} f(x) = f(x_5)$$

юм. Иймд сэжигтэй цэгүүд нь

$$f'(x) = 0 \tag{1.7}$$

тэгшитгэлийн язгуур болох нь илэрхий.
(1.7) тэгшитгэлийн бүх язгууруудыг мэдэж байгаа тохиолдолд функцийн хамгийн их, хамгийн бага утгуудыг дээр дурьдсан түүвэрлэх замаар олж болох юм.
Харамсалтай нь энэ арга практикт хязгаарлагдмал хэрэглээтэй байдаг. Учир нь, функц тэр болгон дифференциалчлагдах албагүй, эсвэл функцийн утгууд нь туршилтын үр дүнгээр тодорхойлогдох бөгөөд түүний уламжлалыг мэдэх боломжгүй, эсвэл функцийн уламжлалыг олсон боловч $f'(x) = 0$ тэгшитгэлийг бодох явдал нилээд бэрхшээлтэй тулгардаг билээ. Иймд функцийн экстремумыг олох уламжлал ашигладаггүй бөгөөд орчин үеийн

тооцон бодох техникийг өргөн хэрэглэж болохуйц аргыг авч үзэх зайлшгүй шаардлага практикаар дэвшигдэн тавигдаж байгаа юм.

II Бүлэг. Минимум олох тоон аргууд

§ 2.1. Унимодаль функцийн анги.

Тодорхойлолт 2.1. Хэрэв $[a, b]$ завсар дээр тодорхойлогдсон $f(x)$ функцийн хувьд $D_* = [a_*, b_*]$ бөгөөд

$$a \leq x_1 < x_2 < a_* \quad \text{үед} \quad f(x_1) > f(x_2), \tag{2.1}$$
$$b_* \leq x_1 < x_2 \leq b \quad \text{үед} \quad f(x_1) < (x_2) \tag{2.2}$$

нөхцөл биелэгддэг бол $f(x)$ функцийг $[a, b]$ завсар дээр унимодаль функц гэж нэрлэнэ.

Өөрөөр хэлбэл, унимодаль функц нь a_* цэгээс зүүн тийш монотон буурдаг, b_* цэгээс баруун тийш монотон өсдөг функц байх ба

$$\min_{[a,b]} f(x) = f(c), \quad \forall c : c \in [a_*, b_*] \subset [a, b]$$

Тодорхойлолт 2.2. Хэрэв $D \subset R$ олонлогийн дурын $x_1, x_2 \in D$ цэгүүдийн хувьд

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in D, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

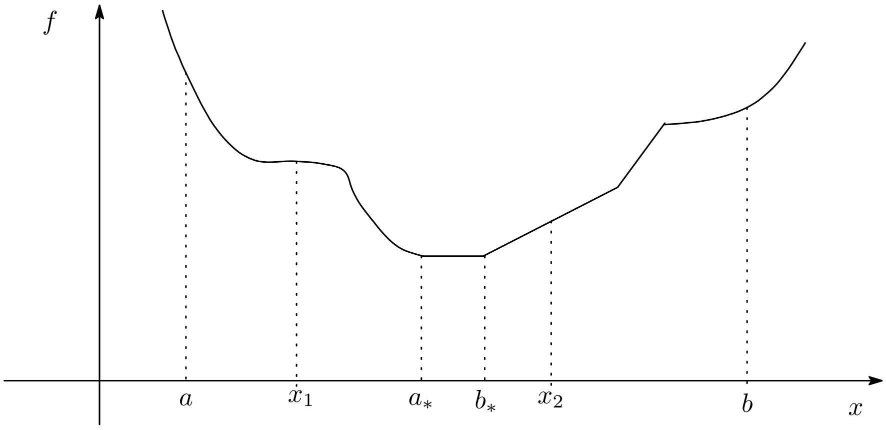
нөхцөл биелэгдэж байвал D олонлогийг гүдгэр олонлог гэж нэрлэнэ.

Жишээлбэл: $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, ба $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ олонлогууд гүдгэр олонлогууд юм.

Тодорхойлолт 2.3. Хэрэв $[a, b]$ дээр тодорхойлогдсон $f(x)$ функцийн хувьд

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

нөхцөл дурын $x_1, x_2 \in [a, b]$ ба $\forall \alpha \in [0, 1]$-ийн хувьд биелэгдэж байвал $f(x)$ функцийг $[a, b]$ завсар дээр квазигүдгэр функц гэж нэрлэнэ.



Зураг 2.1. Квазигүдгэр функцийн график

Теорем 2.1. $f(x)$ функц $[a,b]$ дээр квазигүдгэр байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$L(c,f) = \{x \in [a,b] | f(x) \leq c\}, \quad \forall c \in R$$

олонлог гүдгэр байхад оршино.

Баталгаа. Зайлшгүй нөхцөл. $f(x)$ функц $[a,b]$ дээр квазигүдгэр байг. Дурын $c \in R$-г өгөгдсөн гэж үзье. Хэрэв $x_1, x_2 \in L(c,f)$ бол $f(x_1) \leq c$ ба $f(x_2) \leq c$ байх ба $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \leq C, \ \ \forall \alpha \in [0,1]$ биелэгдэнэ.
Иймд $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in L(c,f), \quad \alpha \in [0,1]$ болж $L(c,f)$ гүдгэр байна.
Хүрэлцээтэй нөхцөл. Дурын $c \in R$-г авахад $x_1 \in [a,b]$ ба $x_2 \in [a,b]$ цэгүүд авч, $c = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ гэж үзье. Тэгвэл $x_1 \in L(c,f)$ ба $x_2 \in L(c,f)$.
$L(c,f)$ гүдгэр тул $\alpha(x_1) + (1-\alpha)x_2 \in L(c,f), \ \ \forall \alpha \in [0,1]$ байх буюу $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \max\{f(x_1 0, f(x_2)\}, \ \ \forall \alpha \in [0,1]$ болж $f(x)$ функц $[a,b]$ дээр квазигүдгэр байна. Теорем батлагдав. ■
Тодорхойлолт 2.4. Хэрэв дурын $x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2$-ийн

хувьд

$$f(x) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \quad x \in (x_1, x_2) \tag{2.3}$$

тэнцэтгэл биш биелэгдэж байвал $f(x)$ функцийг $[a, b]$ завсар дээр эрс квазигүдгэр функц гэж нэрлэнэ.
Өөрөөр хэлбэл, эрс квазигүдгэр функц нь $a_* = b_*$ байх үеийн унимодаль функц гэдгийг шалгаж болно. Түүнчлэн эрс квазигүдгэр функц нь квазигүдгэр функц гэдэг нь илэрхий юм. Харин квазигүдгэр функц эрс квазигүдгэр байх албагүй юм.
$[a, b]$ завсар дээр тодорхойлогдсон бүх эрс квазигүдгэр функцийн олонлогийг $U[a, b]$-ээр тэмдэглэе.
Одоо $f(x)$ функцийн хамгийн бага утгыг $[a, b]$ завсар дээр олох бодлого авч үзье.

$$f(x) \to \min, \quad x \in [a, b] \tag{2.4}$$

Эхлээд эрс квазигүдгэр функцийн зарим чанаруудтай танилцъя.

Лемм 2.1. Хэрэв $f \in U[a, b]$ бол (2.4) бодлого нь цорын ганц x^* шийдтэй байна.

Баталгаа: Эсрэгээс баталъя. Өөрөөр хэлбэл, $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ -ийн хувьд

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1) = f(x_2)$$

болог. Тэгвэл тодорхойлолт 2.4 ёсоор

$$\forall x \in (x_1, x_2) : f(x) < \max\{f(x_1), f(x_2)\} = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

болж функцийн минимумын тодорхойлолтонд харшилж байна. Лемм батлагдав. ■

Лемм 2.2. $f \in U[a, b]$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь дурын $x_1, x_2 \in [a, b]$, $\; x_1 < x_2$-ийн хувьд

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Хэрэв} & x_2 \leq x^* & \text{бол} & f(x_2) < f(x_1) \\ \text{Хэрэв} & x_1 \leq x^* & \text{бол} & f(x_1) < f(x_2) \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

нөхцөл биелэгдэж байх явдал юм.

Баталгаа. Зайлшгүй нөхцөл: $f \in U[a,b]$, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ болог.

Тэгвэл тодорхойлолт 2.4 ёсоор:

$$\begin{array}{llll} \text{Хэрэв} & x_2 < x^* & \text{бол} & f(x_2) < \max\{f(x_1), f(x^*)\} = f(x_1) \\ \text{Хэрэв} & x_1 > x^* & \text{бол} & f(x_1) < \max\{f(x^*), f(x_2)\} = f(x_2) \\ \text{Хэрэв} & x_2 = x^* & \text{бол} & \text{Лемм- 2.1 ёсоор} \quad f(x_2) < f(x_1) \\ \text{Хэрэв} & x_1 = x^* & \text{бол} & f(x_1) < f(x_2) \end{array}$$

Эдгээр бүх нөхцлүүдийг нэгтгэн бичвэл (2.5) гарна.

Хүрэлцээтэй нөхцөл. (2.5) нөхцөл биелэгдэж байг.

Дурын $x \in (x_1, x_2)$ цэг авьяа. Тэгвэл $x \leq x^*$ үед $f(x) < f(x_1) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$

$x \geq x^*$ үед $f(x) < f(x_2) \leq \max\{f(x_1), fx_2)\}$

Энэ 2 нөхцлийг нэгтгэж бичвэл (2.3) гарна. Лемм батлагдав.

Мөрдлөг. $f \in U[a,b]$, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ болог.

Хэрэв $f(x_1) < f(x_2)$ бол $x^* \in [a, x_2)$

Хэрэв $f(x_1) = f(x_2)$ бол $x^* \in (x_1, x_2)$

Хэрэв $f(x_1) > f(x_2)$ бол $x^* \in (x_1, b]$

Санамж. Энэ мөрдлөг унимодаль функцүүдийн хувьд мөн хүчинтэй гэдгийг хялбархан шалгаж болно.

Одоо (2.4) бодлогыг эрс квазигүдгэр функцийн ангид авч үзье. Энэ бодлогын ойролцоо шийдийг олохын тулд зөвхөн функцийн утгуудыг ашиглах шаардлагатай. Үүний тулд:

1. (a,b) интервалыг x_i цэгүүдээр $n+1$ хэсэгт хувааж x_i цэгүүдийг өсөх дарааллаар байрлуулбал
$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b, \quad a = x_0, \quad b = x_{n+1}$

2. $f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$ утгуудыг бодож x_r цэгийг ялгая.
$f(x_r) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$

3. $[x_{r-1}, x_r]$ завсрын дурын цэгийг, жишээлбэл x_r-ийг (2.4) бодлогын ойролцоо шийдээр авъя.

Лемм 2.3 $f \in U[a,b]$ болог. Тэгвэл дурын $\{x_i\}$, $(i = \overline{1,n})$ цэгүүдийн хувьд 1-3 үйлдлийг гүйцэтгэвэл $x^* \in [x_{r-1}, x_r]$ болно.
Баталгаа. Эсрэгээс баталъя. $x^* \notin [x_{r-1}, x_r]$.
Жишээлбэл, $x^* < x_{r-1}$ болог. Тэгвэл $x^*, x_{r-1} < x_r$, $f \in U[a,b]$ учир $f(x_{r-1}) < \max\{f(x^*), f(x_r)\} = f(x_r)$. Энэ нь x_r цэгийн тодорхойлолтонд харшилж байна. Лемм батлагдав. ■

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ цэгүүдийг x^* цэгийн дөхөлтийн цэгүүд гэж нэрлээ. $[x_{r-1}, x_r]$ завсрыг шийдийг нарийвчлах завсар гэж нэрлэнэ.

Одоо дээрх 1-3 схемийн дагуу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ цэгүүдийг байгуулах оновчтой аргатай танилцья. Дөхөлтийн цэгүүдийг дараах хоёр аргаар байгуулж болдог.
а). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ цэгүүдийг байгуулахдаа $f(x_i)$-ийн утгуудыг харгалзаж үздэггүй. Дөхөлтийн цэгүүдийг ингэж байгуулах аргыг идэвхгүй арга гэж нэрлээ.
в). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ цэгүүдийг байгуулахдаа өмнөх байгуулсан цэгүүд дээрх функцийн утгуудыг харгалзаж үзэх замаар дэс дараалан байгуулдаг. Энэ аргыг дараалсан арга гэж нэрлэнэ.

§ 2.2. Оновчтой аргын тухай

Одоо (2.4) бодлогыг $U[a,b]$ функцийн ангид өгөгдсөн n цэгийн хувьд бодох оновчтой аргыг авч үзье. n цэгийн хувьд 1-3 схемийг гүйцэтгэсэн гэж үзье.
Тэгвэл $x_r : f(x_r) = \min\limits_{1 \le i \le n} f(x)$. Нөгөө талаас $x^* \in [x_{r-1}, x_{r+1}]$ тул алдааг үнэлбэл $|x_r - x^*| \le \max\{x_{r+1} - x_r, x_r - x_{r-1}\}$.
Энэ үнэлгээ нь $f \in U[a,b]$ функцээс хамаарч байна.
$U[a,b]$ ангийн хувьд алдааны дараах үнэлгээг тодорхойлъё.

$$\max_{1 \le r \le n} \max\{x_{r+1} - x_r, x_r - x_{r-1}\} = \max_{0 \le i \le n} \{x_{i+1} - x_i\} \triangleq I_n(\{x_i\}).$$

$I_n(\{x_i\})$ хэмжигдэхүүн нь $f \in U$ функцээс хамаарахгүй бөгөөд $\{x_i\}$ аргын $U[a,b]$ анги дээр чанарын үзүүлэлтүүдийг харуулах тоо юм.

Хэрэв $I_n(\{x_i\}) < I_n(\{x'_i\})$ нөхцөл биелэгдэж байвал $\{x_i\}$ аргыг $\{x'_i\}$ аргаас давуу гэж үзнэ. $U[a,b]$ анги дээр алдааны оновчтой үнэлгээг дараах аргаар тодорхойлно.

$$I_n^* = \inf_{\{x_i\}} I_n(\{x_i\}). \tag{2.6}$$

Хэрэв $\{x_i^*\}$ дөхөлтийн цэгүүдийн хувьд

$$I_n^* = I_n(\{x_i^*\})$$

нөхцөл биелэгдэж байвал $\{x_i^*\}$-г оновчтой дөхөлт буюу эсвэл (2.4) бодлогын оновчтой идэвхгүй арга гэж нэрлэнэ. Иймд оновчтой идэвхгүй аргыг байгуулахын тулд дараах

$$\min_{\{x_i\}} \max_{0\le i\le n} \{x_{i+1} - x_i\}$$

бодлогыг бодох шаардлага гарч байна.

Теорем 2.2. Оновчтой идэвхгүй арга нь

$$x_i^* = a + i\frac{b-a}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n \tag{2.7}$$

томьёогоор байгуулагдах бөгөөд энэ нь цорын ганц юм.
Баталгаа. $I_n(\{x_i^*\}) = \frac{b-a}{n+1}$ илэрхий юм. $\{x_i\}$ дурын дөхөлтийн цэг байг. Тэгвэл ямагт

$$x_{k+1} - x_k \ge \frac{b-a}{n+1} \tag{2.8}$$

биелж байхаар $[x_k, x_{k+1}], \quad k \in \{0, \dots, n\}$ завсар олдоно.
Эсрэг тохиолдолд

$$x_{k+1} - x_k < \frac{b-a}{n+1}, \qquad k = 0, \dots, n$$

байх бөгөөд эндээс

$$b - a = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) < \sum_{k=0}^{n} \frac{b-a}{n+1} = b - a$$

болж зөрчилд хүрнэ.
Иймд (2.8)-г харгалзан үзвэл

$$I_n(\{x_i\}) = \max_{0\le i\le n}\{x_{i+1} - x_i\} \ge \frac{b-a}{n+1} = I_n(\{x_i^*\}).$$

Хэрэв $\{x_i\} \neq \{x_i^*\}$ бол $I_n(\{x_i\}) > I_n(\{x_i^*\})$ гэдгийг хялбархан шалгаж болно. Теорем батлагдав. ■

Тэгвэл идэвхгүй аргуудын алдааны оновчтой үнэлгээ нь

$$I_n^* = \frac{b-a}{n+1}. \tag{2.9}$$

Дурын $f \in U[a,b]$ функцийн хувьд оновчтой идэвхгүй арга нь (2.4) бодлогын шийдийг I_n^*-ээс хэтрэхгүй алдааны нарийвчлалтайгаар олно.

§ 2.3. Дараалсан арга.

Одоо (2.4) бодлогыг бодох дараалсан (идэвхтэй) аргуудтай танилцья. Үүний тулд $f(x)$ функц нь $[a,b]$ завсар дээр унимодаль гэж үзье.

1.Хэрчмийг таллан хуваах арга.
$f(x)$ функцийн минимумын цэгийг $[a,b]$ завсар дээр эрэхдээ x_1, x_2 цэгүүдээс эхэлнэ.

$$x_1 = \frac{a+b-\delta}{2}, \qquad x_2 = \frac{a+b+\delta}{2}.$$

Үүнд δ-нь энэ аргын параметр бөгөөд $0 < \delta < b-a$. x_1, x_2 цэгүүд нь $[a,b]$ хэрчмийн дунджийн хувьд тэгш хэмтэй байрлах бөгөөд δ-г хүрэлцээтэй бага үед $[a,b]$ хэрчмийг бараг хагаслан хуваана. Үүний дараа $f(x_1)$, $f(x_2)$ утгуудыг харьцуулаад $[a_1,b_1]$ хэрчмийг байгуулна:

$$[a_1,b_1] = \begin{cases} [a,x_2] & \text{хэрэв} \quad f(x_1) \le f(x_2) \quad \text{бол} \\ [x_1,b] & \text{хэрэв} \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \text{бол} \end{cases}$$

$f(x)$ функц унимодаль учир $D_* \bigcap [a_1, b_1] \neq \emptyset$ ба

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a-\delta}{2} + \delta.$$

Одоо $[a_1, b_1]$ хэрчмийн хувьд дээрх үйлдлийг давтан гүйцэтгэж $[a_2, b_2]$ хэрчмийг байгуулна.

$$x_3 = \frac{a_1 + b_1 - \delta}{2}, \qquad x_4 = \frac{a_1 + b_1 + \delta}{2}$$

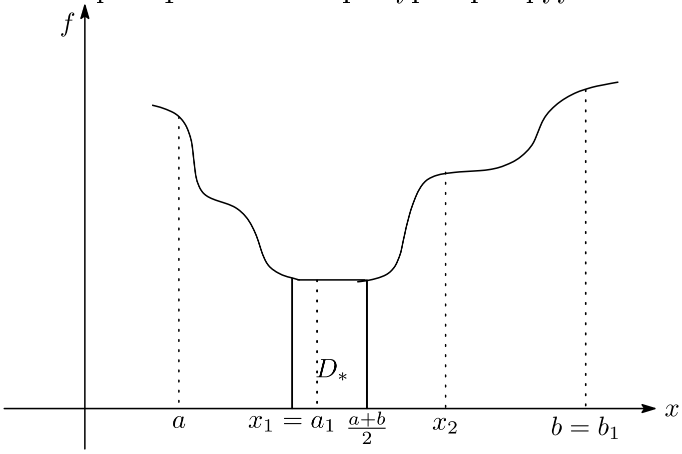
$$[a_2, b_2] = \begin{cases} [a_1, x_4] & \text{хэрэв} \quad f(x_3) \leq f(x_4) \\ [x_3, b_1] & \text{хэрэв} \quad f(x_3) > f(x_4) \end{cases}$$

Унимодаль функцийн тодорхойлолтыг ашиглавал

$$D_* \bigcap [a_2, b_2] \neq \emptyset$$

ба $b_2 - a_2 = b_1 - x_3 = x_4 - a_1 = \frac{a_1+b_1+\delta}{2} - a_1 = \frac{b_1-a_1+\delta}{2} = \frac{b-a-\delta}{2^2} + \delta$

Дээрх 2 үйлдлийг доорх зургаар харуулбал



Зураг 2.2

Одоо $(k-1)$-р итерацийг (үйлдлийг) гүйцэтгэсэн болог.
$D_* \bigcap [a_{k-1}, b_{k-1}] \neq \emptyset$,

$b_{k-1} - a_{k-1} = \frac{(b-a-\delta)}{2^{k-1}} + \delta > \delta \quad (k \geq 2)$.
x_{2k-1}, x_{2k}-цэгүүдийг байгуулъя.
$x_{2k-1} = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}-\delta}{2}, \quad x_{2k} = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}+\delta}{2}$.
$[a_k, b_k]$ хэрчмийг байгуулъя.

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [a_{k-1}, x_{2k}] & \text{хэрэв} \quad f(x_{2k-1}) \leq f(x_{2k}) \quad \text{бол} \\ [x_{2k-1}, b_{k-1}] & \text{хэрэв} \quad f(x_{2k-1}) > f(x_{2k}) \quad \text{бол} \end{cases}$$

Тэгвэл $D_* \bigcap [a_k, b_k] \neq \emptyset$ болох ба $b_k - a_k = \frac{b-a-\delta}{2^k} + \delta > \delta$.
Байгуулалт ёсоор

$$[a_{k-1}, b_{k-1}] \subset [a_k, b_k] \subset \ldots [a_1, b_1] \subset [a, b].$$

Ийм аргаар хэрчмийг таллан хуваах үйлдлийг $b_k - a_k < \varepsilon$ нөхцөл биелэгдэх хүртэл үргэлжлүүлнэ. Үүнд ε нь өгөгдсөн нарийвчлал бөгөөд $\varepsilon > \delta$. Эндээс

$$k > \log_2((b - a - \delta)/(\varepsilon - \delta))$$

Хуваалт бүрд функцийн 2 утгыг боддог тул $b_k - a_k < \varepsilon$ нөхцлийг хангахын тулд нийт $n = 2k > 2\log_2(\frac{b-a-\delta}{\varepsilon-\delta})$ утгыг бодох шаардлагатай. $[a_k, b_k]$ хэрчмийг тодорхойлсны дараа бодлогын ойролцоо шийд $\overline{x}_n$-г тодорхойлно.

$$\overline{x}_n = \begin{cases} x_{2k-1} & \text{хэрэв} \quad f(x_{2k-1}) \leq f(x_{2k}) \quad \text{бол} \\ x_{2k} & \text{хэрэв} \quad f(x_{2k-1}) > f(x_{2k}) \quad \text{бол} \end{cases}$$

$f(\overline{x}_n)$ утгыг $f_* = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$-ийн ойролцоо утга болгож авна.
Ингэж тодорхойлоход гарах алдааг үнэлбэл:

$$\rho(\overline{x}_n, D_*) \leq \max\{b_k - \overline{x}_n; \overline{x}_n - a_k\} = \frac{(b-a-\delta)}{2^k}.$$

Мөн $\overline{x}_n$ цэгийг $[a_k, b_k]$ хэрчмийн дундаж байхаар авбал:

$$\overline{x}_n = \frac{a_k + b_k}{2},$$

$$\rho(\overline{x}_n, D_*) \leq \max\{b_k - \overline{x}_n, \overline{x}_n - a_k\} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a - \delta}{2^{k+1}} + \frac{\delta}{2},$$

$$f^* \approx f(\overline{x}_n).$$

Дээрх аргаар $f(x)$ функцийн $[a, b]$ хэрчим дээрх минимумын цэгийг ойролцоогоор (ε-нарийвчлалтайгаар)олоход функцийн утгыг $n = 2k$ удаа бодож байгаа билээ. Тэгвэл бодлогын шийдийг мөн ийм нарийвчлалтайгаар ойролцоо олоход шаардагдах функцийн утгыг цөөрүүлэх асуудал зүй ёсоор тавигдана. Энэ асуудалд хариу болгож дараах аргыг авч үзье.

2. Алтан огтлолын арга.

Хэрчмийг тэнцүү биш хоёр хэсэгт хуваахад хэрчмийн уртыг түүний их хэсгийн уртад харьцуулсан харьцаа нь их хэсгийн уртыг бага хэсгийн уртад харьцуулсан харьцаатай тэнцүү байхаар хийгдсэн хуваалтыг алтан огтлол гэж нэрлэнэ. Хэрчмийг x_1, x_2 цэгүүдээр алтан огтлол хийсэн гэж үзье. Өөрөөр хэлбэл, $a < x_1 < x_2 < b$ үед

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} = \frac{b-a}{x_2-a} = \frac{x_2-a}{b-x_2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

x_1, x_2 цэгүүд нь $[a, b]$ хэрчмийн дунджийн хувьд тэгш хэмтэй байрласан бөгөөд

$$x_1 = a + \frac{(3-\sqrt{5})(b-a)}{2} = a + 0.381966011...(b-a)$$

$$x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a) = a + 0.618033989...(b-a)$$

гэдгийг хялбархан харуулж болно.

Нөгөө талаас $x_2 - x_1 < x_1 - a = b - x_2$ ба

$$\frac{x_2-a}{x_1-a} = \frac{x_1-a}{x_2-x_1}$$

тул x_1 нь $[a, x_2]$ хэрчмийн алтан огтлолын цэг болж байна. Мөн үүний адилаар x_2 нь $[x_1, b]$ хэрчмийн алтан огтлолын цэг болно.

Иймд алтан огтлолын аргын итерацид, нарийвчлах завсар $[a_k, b_k]$-г байгуулах явцад итерац бүр дээр $f(x)$-ийн утгыг зөвхөн ганц удаа бодно. Одоо алтан огтлолын аргын алгоритмыг бичвэл: $a_1 = a, \quad b_1 = b$ болог. x_1, x_2 нь $[a_1, b_1]$ хэрчмийн алтан огтлолын цэгүүд. $f(x_1), f(x_2)$ утгуудыг бодож $[a_2, b_2]$ хэрчмийг байгуулна. Ингэхдээ

$$[a_2, b_2] = \begin{cases} [a_1, x_2] & \text{хэрэв} \quad f(x_1) \le f(x_2) \quad \text{бол} \\ [x_1, b_1] & \text{хэрэв} \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \text{бол} \end{cases}$$

Түүнээс гадна $\overline{x}_2$-цэгийг тодорхойлно.

$$\bar{x}_2 = \begin{cases} x_1 & \text{хэрэв} \quad f(x_1) \le f(x_2) \quad \text{бол} \\ x_2 & \text{хэрэв} \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \text{бол} \end{cases}$$

$f(x)$ функц унимодаль учраас $D_* \bigcap [a_2, b_2] \neq \emptyset$ байна. Нөгөө талаас $b_2 - a_2 = \frac{(\sqrt{5}-1)(b-a)}{2}$ бөгөөд $x_2 \in [a_2, b_2]$ нь $[a_2, b_2]$ хэрчмийн алтан огтлолын цэг юм. $f(\overline{x}_2) = \min\{f(x_1), f(x_2)\}$ байх нь илэрхий юм. $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ цэгүүдийг тодорхойлж $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$ утгуудыг бодсон гэж үзье. $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ хэрчмийн хувьд

$$D_* \bigcap [a_{n-1}, b_{n-1}] \neq \emptyset, \quad b_{n-1} - a_{n-1} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n-2} (b-a).$$

$\overline{x}_{n-1}$ цэг нь $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ хэрчмийн алтан огтлолын цэг болог. Тэгвэл $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ хэрчмийн алтан огтлолын нөгөө нэг цэгийг

$$x_n = a_{n-1} + b_{n-1} - \overline{x}_{n-1}$$

гэж тодорхойлох ба $f(x_n)$ утгыг бодож олно.
Тодорхой болгохын тулд $a_{n-1} < x_n < \overline{x}_{n-1} < b_{n-1}$ гэж үзье.

$$[a_n, b_n] = \begin{cases} [a_{n-1}, \overline{x}_{n-1}] & \text{хэрэв} \quad f(x_n) \le f(\overline{x}_{n-1}) \quad \text{бол} \\ [x_n, b_{n-1}] & \text{хэрэв} \quad f(x_n) > f(\overline{x}_{n-1}) \quad \text{бол} \end{cases}$$

$$\overline{x}_n = \begin{cases} x_n & \text{хэрэв} \quad f(x_n) \le f(\overline{x}_{n-1}) \quad \text{бол} \\ \overline{x}_{n-1} & \text{хэрэв} \quad f(x_n) > f(\overline{x}_{n-1}) \quad \text{бол} \end{cases}$$

Ингэж байгуулсан $[a_n, b_n]$-ийн хувьд

$$D_* \bigcap [a_n, b_n] \neq \emptyset, \quad b_n - a_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1}(b-a).$$

x_n нь $[a_n, b_n]$-хэрчмийн алтан огтлолын цэг юм.
$f(\overline{x}_n) = \min\{f(x_n), f(\overline{x}_{n-1}\} = \min\limits_{1\leq i\leq n} f(x_i)$
Дээрх итерацийг $b_n - a_n < \varepsilon$ нөхцөл биелэгдэх хүртэл үргэлжлүүлнэ. Үүнд $\varepsilon > 0$ өгөгдсөн нарийвчлал. $\overline{x}_n$ цэгийг бодлогын ойролцоо шийд болгож авна. Ойролцоо шийдийн алдааны нарийвчлалыг тооцвол:
$\rho(\overline{x}_n, D_*) \leq \max\{b_n - \overline{x}_n, \overline{x}_n - a_n\} =$
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)(b_n - a_n) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b-a) = A_n.$

Одоо алтан огтлолын аргыг хэрчмийг таллан хуваах аргатай харьцуулъя. Функцийн утгыг $n = 2k$ удаа бодсны дараа ойролцоо шийдийн алдааны нарийвчлал хэрчмийг таллан хуваах аргын хувьд

$$\rho(\overline{x}_n, D^*) \leq 2^{-n/2}(b-a-\delta) < 2^{-n/2}(b-a) = B_n$$

байдаг. Эндээс

$$\frac{A_n}{B_n} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}\right)^n \approx (0.87\ldots)^n$$

тул n-ийн бага холбогдолд алтан огтлолын аргын давуу нь илэрхий юм. Тооцоолох техникт энэ аргыг хэрэгжүүлэхэд $\sqrt{5}$ тоог ойролцоо өгдөг учраас үүнтэй холбогдсон x_1 цэг мөн ойролцоо бодогдоно. Энэ алдаа нь дараагийн итерацид мөн $\overline{x}_1$ утгыг ойролцоо олоход нөлөөлдөг бөгөөд цаашид алдаа улам өснө. Өөрөөр хэлбэл, n хүрэлцээтэй их үед $[a_n, b_n]$ хэрчим ба $\overline{x}_n$, $x_{n+1} = a_n + b_n - \overline{x}_n$ цэгүүд нь харгалзах онолын утгуудаас эрс ялгарна. Иймд энэ аргыг n-ийн их холбогдолд хэрэглэх нь тохиромжгүй юм.

Санамж: Хэрчмийг таллан хуваах арга ба алтан огтлолын аргыг унимодаль биш дурын функцийн ангид хэрэглэж болох боловч ингэж олсон шийд нь функцийн хэрчим дээрх глобаль минимумын цэг болох албагүй.

§ 2.4. Дараалсан аргын оновчтой алгоритм

Идэвхгүй аргын хувьд оновчтой алгоритмыг өмнө нь тодорхойлсоны адилаар дараалсан аргын оновчтой алгоритмыг тодорхойлъё. Үүний тулд урьдын адилаар (2.4) бодлогыг $U[a,b]$ функцийн ангид авч үзье.

Ямар нэг дараалсан арга P_n-ийн тусламжтайгаар $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ цэгүүдийн дараалал байгуулагдсан ба x_n^* цэг нь (2.4) бодлогын ойролцоо шийд болог. Энэ аргаар бодоход гарах алдааны үнэлгээг бичвэл:

$$|x_n^* - x^k| \le \delta_n.$$

δ_n -хэмжигдэхүүн нь сонгосон арга ба бодлогын параметрүүдээс хамаарна. Өөрөөр хэлбэл,

$$\delta_n = \delta_n(P_n, f, b-a).$$

P_n-аргын $U[a,b]$ анги дээрх алдааны үнэлгээг дараах томьёогоор тодорхойлъё.

$$I_n(P_n, b-a) = \sup_{f \in U} \delta_n(P_n, f, b-a).$$

Тэгвэл оновчтой арга P_n^*-ийн хувьд

$$I_n(P_n^*, b-a) = \inf_{\{P_n\}} I_n(P_n, b-a) \triangleq I_n^*(b-a)$$

биелэгдэнэ. $I_n^*(b-a)$-хэмжигдэхүүнийг алдааны оновчтой үнэлгээ гэж нэрлэдэг. Дараалсан аргын оновчтой алгоритм нь Фибоначчийн тоонууд F_i-тэй холбоотой байдаг ба эдгээр тоонууд нь

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{i+1} = F_i + F_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

дүрмээр байгуулагдана. Одоо энэ аргатай танилцъя.

Фибоначчийн арга

Фибоначчийн арга Φ_n-ийн дараалсан дөхөлтийг $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ гэж тэмдэглэе. $n = 1$ тохиолдлыг авч үзье. Тэгвэл Φ_1 аргын цорын ганц цэг нь $[a, b]$ хэрчмийн дундаж цэг $x_1^* = \frac{a+b}{2}$ болох ба энэ цэгийг бодлогын ойролцоо шийд болгож авдаг. Алдааны үнэлгээг бодвол:

$$|x_1^* - x^*| \leq \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{F_2}. \tag{2.10}$$

Энэ тохиолдолд Φ_1 арга нь оновчтой идэвхгүй аргатай давхцах учраас (2.10) үнэлгээг сайжруулах боломжгүй юм. Иймд (2.10) үнэлгээ нь оновчтой үнэлгээ

$$I_1^*(b-a) = \frac{b-a}{F_2}$$

байх бөгөөд Φ_1 нь байгуулалт ёсоор оновчтой арга юм. Одоо $n \geq 2$ ерөнхий тохиолдлыг авч үзье. $a = a_1, \quad b = b_1$ гэж үзээд $[a_1, b_1]$ хэрчим дээр

$$x_1^* = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b_1 - a_1)$$

цэг байгуулж функцийн утга $f(x_1^*)$ -г олно. $\{[a_1, b_1], x_1^*\}$ хос нь Φ_n аргын эхний дөхөлт юм. Туслах чанарын $\overline{x}_1$ цэгийг байгуулна.

$$\overline{x}_1 = a_1 + b_1 - x_1^*$$

$x_1^*, \overline{x}_1$ цэгүүд $[a_1, b_1]$ хэрчим дээр тэгш хэмтэй байрлана. Үүнийг шалгавал:

$$\overline{x}_1 - a_1 = a_1 + b_1 - x_1^* - a_1 = b_1 - x_1^*,$$

үүнд $x_1^* < \overline{x}_1, \quad \left(\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} < \frac{1}{2}\right)$.

$f(x_1)$ утгыг бодно. Дараагийн дөхөлт $\{[a_2, b_2], x_2^*\}$-г доорх дүрмээр байгуулна.

$$\{[a_2, b_2], x_2^*\} = \begin{cases} \{[a_1, \overline{x}_1], x_1^*\} & \text{хэрэв} \quad f(x_1^*) \leq f(\overline{x}_1) \\ \{[x_1^*, b_1], \overline{x}_1\} & \text{хэрэв} \quad f(x_1^*) > f(\overline{x}_1) \end{cases}$$

Φ_n-аргын шинэ дөхөлтийн хувьд дараах чанарууд биелэгдэнэ.
1). $x^* \in [a_2, b_2]$
2). $b_2 - a_2 = \overline{x}_1 - a_1 = b_1 - x_1^* = \frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a)$
3). x_2^* цэг нь x_2', x_2''-цэгүүдийн аль нэгтэй давхцана.

$$x_2^* = \begin{cases} x_2', & x_2' = a_2 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_2 - a_2), \quad \text{if} \quad f(x_1^*) > f(\overline{x}_1) \\ x_2'', & x_2'' = a_2 + b_2 - x_2', \qquad\qquad \text{if} \quad f(x_1^*) \le f(\overline{x}_1) \end{cases}$$

түүнээс гадна x_2', x_2'' цэгүүд нь $[a_2, b_2]$ хэрчим дээр тэгш хэмтэй байрлах бөгөөд

$$x_2' < x_2'' \quad (n > 2), \quad \text{эсвэл} \quad x_2' = x_2'' \qquad (n = 2)$$

Эдгээр чанаруудыг шалгая.
Чанар 1 нь эрс квазигүдгэр функцийн тодорхойлолтоос мөрдөн гарна. Чанар 2-ыг шууд шалгавал:

$$b_1 - x_1^* = (b_1 - a_1)\Big(1 - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}\Big) = \frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a)$$

Чанар 3-ыг эхний тохиолдолд ($f(x_1^*) > f(\overline{x}_1)$) шалгая.
$x_2' = x_1^* + \frac{F_{n-2}}{F_n} \cdot \frac{F_n}{F_{n+1}}(b_1 - a_1) = a_1 + \left(\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} + \frac{F_{n-2}}{F_{n+1}}\right)(b_1 - a_1) =$
$a_1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}(b_1 - a_1) = \overline{x}_1 = x_2^*$.
Мөн үүнтэй төстэйгээр нөгөө тохиолдолд $x_2'' = x_2^*$ гэдгийг харуулж болно.
$[a_2, b_2]$ хэрчмийн x_2', x_2'' цэгүүдээс Φ_{n-1} арга эхэлнэ.
Одоо ерөнхий аргыг томъёолъё.
Φ_n аргын k -р дөхөлт $\{[a_k, b_k], x_k^*\}$-г $(2 \le k \le n)$ байгуулсан гэж үзье.
Дараах нөхцлүүд биелэгддэг болог.
k1). $x^* \in [a_k, b_k]$
k2). $b_k - a_k = \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+1}}(b-a)$
k3). x_k^* цэг нь x_k', x_k'' цэгүүдийн аль нэгтэй давхцана.

$$\begin{aligned} x_k' &= a_k + \tfrac{F_{n-k}}{F_{n-k+2}}(b_k - a_k), \\ x_k'' &= a_k + b_k - x_k'. \end{aligned}$$

x_k', x_k'' цэгүүд $[a_k, b_k]$ хэрчим дээр тэгш хэмтэй байрлах ба
$x_k' < x_k''$ $(k < n)$, $x_k' = x_k''$ $(k = n)$ $k < n$ болог.
Тэгвэл $(k+1)$-р дөхөлтийг байгуулахдаа
$\overline{x}_k = a_k + b_k - x_k^*$ цэгийг байгуулж $f(\overline{x}_k)$-г олно. Тодорхой болгохын тулд $x_k^* = x_k'$ байг. Тэгвэл $\overline{x}_k = x_k''$.

$$\{[a_{k+1}, b_{k+1}], x_{k+1}^*\} = \begin{cases} \{[a_k, \overline{x}_k], x_k^*\} & \text{хэрэв} \quad f(x_k^*) \leq f(\overline{x}_k) \\ \{[x_k^*, b_k], \overline{x}_k\} & \text{хэрэв} \quad f(x_k^*) > f(\overline{x}_k) \end{cases}$$

Дараах нөхцлүүд биелэгдэхийг хялбархан шалгаж болно.
$k4$). $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$
$k5$). $b_{k+1} - a_{k+1} = \overline{x}_k - a_k = b_k - x_k^* = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+1}}(b-a)$
$k6$). $x_{k+1}^* = \begin{cases} x_{k+1}' = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_{k+1} - a_{k+1}), & \text{if} \quad f(x_k^*) > f(\overline{x}_k) \\ x_{k+1}'' = a_{k+1} + b_{k+1} - x_{k+1}', & \text{if} \quad f(x_k^*) \leq f(\overline{x}_k) \end{cases}$
$k4$). нөхцөл эрс квазигүдгэр функцийн тодорхойлолт ёсоор биелнэ.
$k5$). нөхцлийг шууд шалгавал:

$$b_k - x_k^* = (b_k - a_k)\left(1 - \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+2}}\right) = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}(b_k - a_k) = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+1}}(b-a).$$

$(k6)$-нөхцлийг эхний тохиолдолд шалгавал:

$$x_{k+1}' = x_k^* + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} \cdot \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+1}}(b-a) = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+1}}(b-a) = \overline{x}_k = x_{k+1}^*.$$

Үүний адилаар 2-р тохиолдлыг хялбархан шалгана.
Одоо $k = n$ болог. Тэгвэл Фибоначчийн аргын хамгийн сүүлчийн дөхөлт $\{[a_n, b_n], x_n^*\}$ болох ба бодлогын ойролцоо шийд болгож x_n^*-г авна. Ойролцоо шийдийн алдааг үнэлье. $k = n$ үед $(k3)$-чанар ёсоор $x_n^* = x_n' = x_n''$. Иймд x_n^* цэг нь $[a_n, b_n]$ хэрчмийн дундаж болно. $(k2)$ чанар ёсоор $k = n$ үед

$$b_n - a_n = \frac{F_2}{F_{n+1}}(b-a) = \frac{2(b-a)}{F_{n+1}}.$$

Нөгөө талаас $x^* \in [a_n, b_n]$ тул алдааны үнэлгээ нь

$$|x_n^* - x^*| \leq \frac{b-a}{F_{n+1}}$$

болох бөгөөд $f \in U[a,b]$ функцээс хамаарахгүй байна. Иймд эрс квазигүдгэр функцийн ангид Φ_n аргын алдаа нь

$$I_n(\Phi_n, b-a) = \frac{b-a}{F_{n+1}}.$$

Одоо алтан огтлолын арга ба Фибаноччийн аргыг харьцуулъя. Индукцийн аргаар Фибаноччийн n-р тоог дараах томьёогоор олно.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\right], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Эндээс $n \to \infty$ үед

$$F_{n+1} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}\right)^{n+1}$$

гэж үзэж болно. Энэ үед нарийвчлах завсрын алдаа нь ойролцоогоор

$$\frac{2(b-a)}{F_{n+1}} \approx 2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}(b-a).$$

Нөгөө талаас алтан огтлолын аргын хувьд алдааны нарийвчлалын завсар нь

$$b_n - a_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1}(b-a) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n-1}(b-a).$$

Эндээс харахад $n \to \infty$ үед алтан огтлолын арга нь Фибоначчийн аргаас

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n-1}(b-a) : \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}(b-a)2\sqrt{5} \approx 1.1708\ldots$$

дахин муу юм.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

тул $n \to \infty$ үед алтан огтлолын болон Фибоначчийн аргын дөхөлтийн эхний цэгүүд x_1, x_2 нь адилхан байна.

III Бүлэг. Глобаль минимум олох аргууд

Энэ бүлэгт унимодаль биш бөгөөд Липшицийн болон гүдгэр функцийн ангид багтах функцийн глобаль минимум олох аргыг авч үзнэ.

§ 3.1. Тахир шугамын арга

Тодорхойлолт 3.1. Хэрэв $[a, b]$ завсар дээр тодорхойлогдсон $f(x)$ функцийн хувьд $L > 0$ тогтмол орших бөгөөд

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b] \tag{3.1}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал $f(x)$ нь Липшицийн нөхцлийг хангаж байна гэж нэрлэнэ. L-тогтмолыг Липшицийн тогтмол гэнэ.

(3.1) нөхцлийн геометр утгыг тайлбарлавал: $y = f(x)$ муруйн $(x, f(x))$ ба $(y, f(y))$ цэгүүдийг холбосон хөвчийн өнцгийн коэффициент $|f(x) - f(y)| \cdot |x - y|^{-1}$ нь дурын $x, y \in [a, b]$ цэгүүдийн хувьд L тогтмолоос ихгүй гэсэн үг юм.
$f(x)$ функц $[a, b]$ дээр тасралтгүй гэдэг нь (3.1) нөхцөлөөс шууд мөрдөн гарах ба теорем 1.1 ёсоор $D_* \neq \emptyset$ байна.

Теорем 3.1. $f(x)$ функц нь $[a, b]$ хэрчим дээр тасралтгүй бөгөөд $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, m; \quad a_1 = a, \quad a_{m+1} = b)$ завсар дээр (3.1) нөхцлийг L_i тогтмолын хувьд хангадаг болог. Тэгвэл $f(x)$ функц нь (3.1) нөхцлийг $[a, b]$ завсар дээр $L = \max\limits_{1 \leq i \leq m} L_i$ тогтмолтойгоор хангана.
Баталгаа. Дурын $x, y \in [a, b]$ цэгүүд сонгоё.
$a_{p-1} \leq x \leq a_p, \quad a_s \leq y \leq a_{s+1}$ нөхцөл тодорхой p, s-ийн хувьд биелдэг болог. Тэгвэл

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(a_p) + \sum_{i=p}^{s-1} (f(a_i) - f(a_{i+1})) + f(a_s) - f(y)| \leq$$

$$\leq L_{p-1}|x - a_p| + |\sum_{i=p}^{s-1} L_i(a_{i+1} - a_i)| + L_s|a_s - y| \leq L|x - y|$$

болж теорем батлагдав. ■

Теорем 3.2. $f(x)$ функц нь $[a,b]$ хэрчим дээр дифференциалчлагддаг бөгөөд түүний уламжлал $f'(x)$ энэ хэрчим дээр зааглагдсан байг. Тэгвэл $f(x)$ нь (3.1) нөхцлийг $L = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ тогтмолтойгоор хангана.

Баталгаа. Дурын $x, y \in [a,b]$-ын хувьд төгсгөлөг өөрчлөлтийн томьёо бичье.

$$f(x) - f(y) = f'(y + \theta(x-y))(x-y), \quad (0 < \theta < 1).$$

Тэгвэл $f'(x)$ зааглагдсан гэдгээс теоремын нөхцөл мөрдөж гарна.

Тахир шугамын аргын схем

$f(x)$ функц нь $[a,b]$ завсар дээр (3.1) нөхцлийг хангадаг болог. $y \in [a,b]$ цэгийг сонгон авч x-ээс хамаарсан

$$g(x,y) = f(y) - L|x-y|$$

функц тодорхойлъё. $(a \le x \le b)$.
$g(x,y)$ функц нь $[a,b]$ дээр хэсэгчилсэн шугаман функц гэдгийг хялбар харж болно.
(3.1) нөхцлийг ашиглавал

$$f(x) - g(x,y) \ge \left(L - \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \right) |x-y| \ge 0, \quad x \ne y$$

болох ба эндээс

$$g(x,y) = f(y) - L|x-y| \le f(x), \quad \forall x \in [a,b]. \tag{3.2}$$

Нөгөө талаас

$$g(y,y) = f(y).$$

Иймд $f(x)$ функцийн график нь $g(x,y)$ тахир шугамаас үргэлж дээр байрлаж байна. (3.2) чанарыг ашиглан тахир шугамын аргыг байгуулна. Үүнд эхлээд $x_0 \in [a,b]$ цэгийг сонгож

$$g(x,x_0) = f(x_0) - L|x-x_0| = p_0(x)$$

функц байгуулна. x_1 цэгийг дараах нөхцлөөс тодорхойлно.

$$p_0(x_1) = \min_{x\in[a,b]} p_0(x)$$

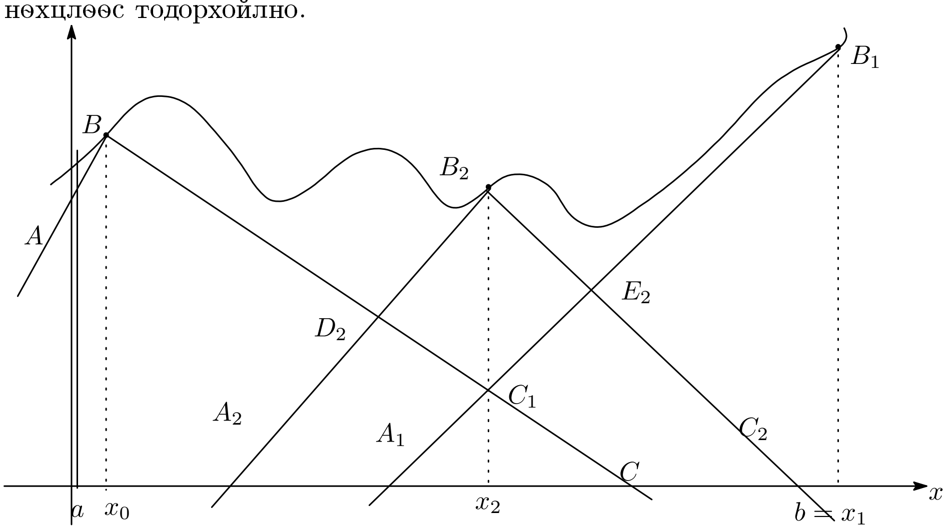
Энэ бодлогын шийд нь эсвэл $x_1 = a$ эсвэл $x_1 = b$ байх нь илэрхий юм. Үүний дараа $p_1(x)$ функц байгуулна.

$$p_1(x) = \max\{g(x, x_1); p_0(x)\}$$

Дараагийн x_2 цэгийг

$$p_1(x_2) = \min_{x\in[a,b]} p_1(x), \qquad (x_2 \in [a, b])$$

нөхцлөөс тодорхойлно.



Зураг 3.1

ABC тахир шугамаар дүрслэгдэх функц

$$p_0(x) = g(x, x_0).$$

A_1B_1-шугамаар дүрслэгдэх функц

$$p_0(x) = g(x, x_1).$$

ABC_1B_1-шугамаар дүрслэгдэх функц

$$p_1(x) = \max\{g(x, x_1), g(x, x_0)\}.$$

$A_2B_2C_2$-шугамаар дүрслэгдэх функц

$$y = g(x, x_2).$$

$ABD_2B_2E_2B_1$-шугамаар дүрслэгдэх функц

$$y = p_2(x).$$

Одоо дээрх аргаар $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 1)$ цэгүүдийг байгуулсан гэж үзье.

$$p_n(x) = \max\{g(x, x_n), p_{n-1}(x)\} = \max_{0 \leq i \leq n} g(x, x_i)$$

функцийг байгуулна.
x_{n+1}-цэгийг дараах нөхцлөөс тодорхойлно.

$$p_n(x_{n+1}) = \min_{x \in [a,b]} p_n(x), \quad x_{n+1} \in [a, b], \tag{3.3}$$

$$p_{n-1}(x) = \max_{0 \leq i \leq n-1} g(x, x_i) \leq \max_{0 \leq i \leq n} g(x, x_i) = p_n(x), ++ \ x \in [a, b] \tag{3.4}$$

Нөгөө талаас (3.2) ёсоор

$$g(x, x_i) \leq f(x), \ x \in [a, b], \ \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

Иймд

$$p_n(x) \leq f(x), \ x \in [a, b], \ n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.5}$$

Эндээс үзэхэд, тахир шугамын арга нь $f(x)$ функцийн минимумыг хэсэгчилсэн шугаман функцүүдийн минимумаар сольж байна. Эдгээр $\{p_n(x)\}$ функцүүд нь монотон өсөх бөгөөд $f(x)$ функцийг доороос нь зааглаж өгнө.

Теорем 3.3. $f(x)$ функц нь $[a, b]$ завсар дээр Липшицийн нөхцлийг хангадаг байг. Тэгвэл тахир шугамын аргаар байгуулагдсан $\{x_n\}$ дарааллын хувьд дараах нөхцлүүд биелнэ.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(x_{n+1}) = f_* = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$

2. $0 \le f(x_{n+1}) - f_* \le f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$

3. $\{x_n\}$ дараалал нь $f(x)$ функцийн $[a, b]$ дээрх минимум цэгүүдийн олонлог болох D_* олонлог руу нийлнэ, өөрөөр хэлбэл:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, D_*) = 0.$$

Баталгаа. Дурын $x_* \in D_*$ цэг авъя. (3.4)-(3.5) нөхцлүүдийг ашиглавал

$$p_{n-1}(x_n) = \min_{x\in[a,b]} p_{n-1}(x) \le$$

$$\le p_{n-1}(x_{n+1}) \le p_n(x_{n+1}) = \min_{x\in[a,b]} p_n(x) \le p_n(x_*) \le f(x_*) = f_*.$$

Иймд $\{p_n(x_{n+1})\}$ дараалал нь монотон өсөх ба дээрээсээ зааглагдсан байна. Эндээс теоремын (2) нөхцөл гарах ба

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x_{n+1}) = p_* \le f_*$$

Одоо $p_* = f_*$ гэдгийг харуулъя.
$\{x_n\}$ дараалал нь зааглагдсан бөгөөд Больцано-Вейерштрассын теорем ёсоор ядаж нэг хязгаарын цэгтэй байна. v_* нь $\{x_n\}$ дарааллын аль нэг хязгаарын цэг болог.
Тэгвэл $\{x_n\}$-ийн дэд дараалал $\{x_{n_k}\}$ орших бөгөөд

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = v_*.$$

$n_1 < n_2 < \dots < n_{n-1} < n_k < \dots$ гэж үзэж болно.
$f(x_i) = g(x_i, x_i) \le p_n(x_i) \le f(x_i)$ тул $f(x_i) = p_n(x_i), \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$
Тэгвэл

$$0 \le p_n(x_i) - \min_{x\in[a,b]} p_n(x) = f(x_i) - p_n(x_{n+1}) =$$

$$p_n(x_i) - p_n(x_{n+1}) \le L|x_i - x_{n+1}|, \quad \forall n, i = 0, 1, \dots$$

Хэрэв $n = n_k - 1$ ба $i = n_{k-1} \leq n_k - 1$ гэвэл
$0 \leq f(x_{n_{k-1}}) - p_{n_k - 1}(x_{n_k}) \leq L|x_{n_{k-1}} - x_{n_k}|, \quad (k \geq 2)$
Эндээс $k \to \infty$ үед

$$f_* \leq f(v_*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_{k-1}}) = \lim_{k\to\infty} p_{n_k-1}(x_{n_k}) = p_* \leq f_*$$

Иймд $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} p_{n_k-1}(x_{n_k}) = p_* = f_*$
болж теоремын (1) нөхцөл батлагдав.
(3) нөхцөл Теорем 1.1-ээс мөрдөн гарч теорем 3.1 батлагдав.

Санамж 1. Тахир шугамын арга нь $f(x)$ функцийн унимодаль байхыг шаардахгүй бөгөөд $[a, b]$ дээр орчны хэдэн ч минимумын цэгтэй байж болно.

Санамж 2. Тахир шугамын арга нь анхны дөхөлтийн цэгийн сонголтоос хамаарахгүй нийлнэ.

Санамж 3. Итерацийн тоо n-ийг ихсэхэд $p_n(x)$ тахир шугамын бүх оройг мэдэх шаардлагтай тул компьютерийн их хэмжээний санах ойг шаардана.

§3.2. **Нэг хувьсагчийн гүдгэр функцийн минимум**

Тахир шугамын арга нь гүдгэр функцийн ангид эрчимтэй ажилладаг.

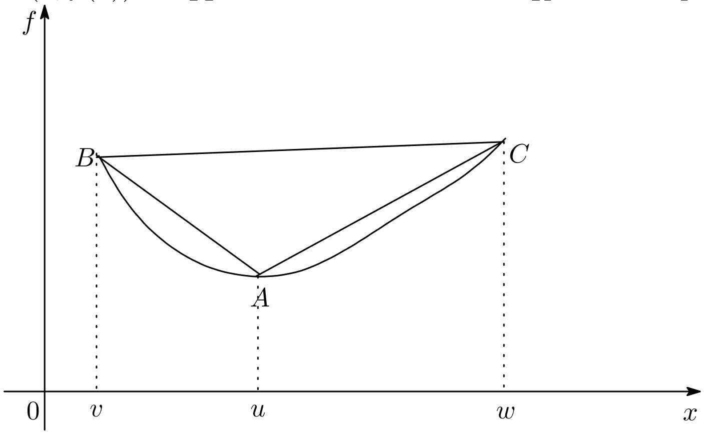
Тодорхойлолт 3.2. $[a, b]$ завсар дээр тодорхойлогдсон $f(x)$ функцийн хувьд

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v) \tag{3.6}$$

тэнцэтгэл биш дурын $u, v \in [a, b], \quad \alpha \in [0, 1]$-ийн хувьд биелэгдэж байвал $f(x)$ функцийг $[a, b]$ хэрчим дээр гүдгэр функц гэж нэрлэнэ.

Гүдгэр функцийн геометр утгыг тайлбарлавал: Дурын хэрчим $[u, v] \subseteq [a, b]$ дээрх функцийн график нь графикийн $A(u, f(u))$ ба

$B(v, f(v))$ цэгүүдийг холбосон хөвчөөс үргэлж доор байрлана.



Зураг 3.2

Жишээлбэл, $f(x) = x^2$, $\quad f(x) = |x|$ функцүүд дурын хэрчим дээр гүдгэр байна.

Тодорхойлолт 3.3 $[a, b]$ хэрчим дээр тодорхойлогдсон $f(x)$ функцийн хувьд

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) \geq \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v) \tag{3.7}$$

тэнцэтгэл биш дурын $u, v \in [a, b]$, $\quad \alpha \in [0, 1]$-ийн хувьд биелэгдэж байвал $f(x)$ функцийг $[a, b]$ хэрчим дээр хотгор функц гэж нэрлэнэ.

Гүдгэр ба хотгор функцүүдийн хувьд дараах хамаарал оршино. Хэрэв $f(x)$ функц $[a, b]$ завсар дээр хотгор бол $-f(x)$ нь $[a, b]$ завсар дээр гүдгэр байна. Иймд зөвхөн гүдгэр функцийн чанаруудыг судлах нь хангалттай юм.

Теорем 3.4. $f(x)$ функц $[a, b]$ завсар дээр гүдгэр байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \tag{3.8}$$

тэнцэтгэл биш дурын $u, v, w, \quad a \leq v < u < w < b$ утгуудын хувьд биелэгдэх явдал юм.

Баталгаа. Зайлшгүйг баталъя. $f(x)$ функц $[a, b]$ хэрчим дээр гүдгэр болог. u-цэгийг дараах хэлбэрт бичиж болно.

$$u = \alpha v + (1-\alpha)w, \quad \alpha = \frac{w-u}{w-v} \quad (0 < \alpha < 1)$$

Гүдгэр функцийн тодорхойлолт ёсоор

$$f(u) \leq \frac{(w-u)f(v)}{w-v} + \left(1 - \frac{(w-u)}{w-v}\right) f(w),$$

эсвэл

$$(w-v)f(u) \leq (w-u)f(v) + (u-v)f(w).$$

Энэ тэнцэтгэл бишийг дараах 2 хэлбэрт бичиж болно.

$$(w-v)(f(u)-f(v)) \leq (u-v)(f(w)-f(v)),$$

$$(w-u)(f(w)-f(v)) \leq (w-v)(f(w)-f(u)).$$

эндээс (3.8) мөрдөн гарна.
Хүрэлцээтэй нөхцлийг баталъя. $f(x)$ функц нь (3.8) нөхцлийн аль нэгийг хангадаг болог. Тэгвэл дээрх хувиргалтуудыг буцааж хийх замаар $f(x)$ нь (3.6) нөхцлийг $[a, b]$ дээр хангадаг буюу гүдгэр гэдгийг харуулж болно.Теорем батлагдав. ■

(3.8) нөхцлийн геометр утгыг авч үзье.
$f(x)$ функцийн графикийн $A(u, f(u))$, $B(v, f(v))$ цэгүүдийг холбосон шулууны өнцгийн коэффицент k_{AB} бол.

$$k_{AB} = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}.$$

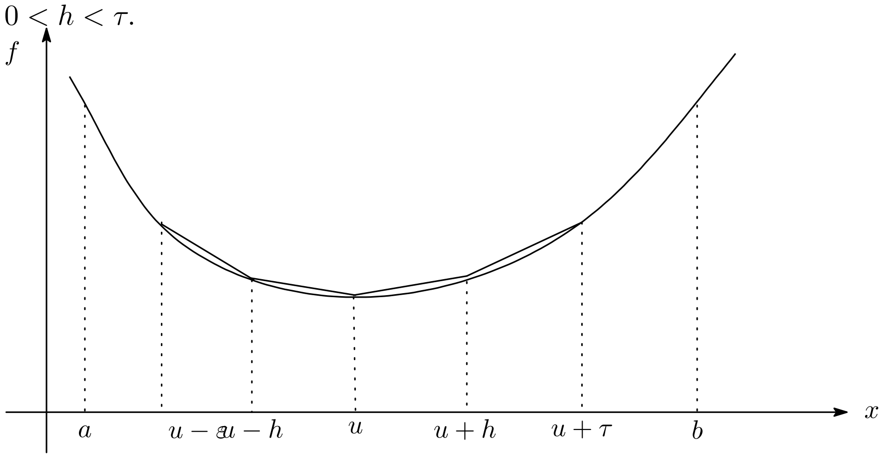
Тэгвэл (3.8) нөхцөл нь

$$k_{AB} \leq k_{BC} \leq k_{AC}$$

хэлбэртэй болно.

Теорем 3.5. $[a, b]$ хэрчим дээр тодорхойлогдсон гүдгэр функц $f(x)$ нь (a, b) завсар дээр тасралтгүй, дурын $u \in (a, b)$ цэг дээр баруун, зүүн өрөөсгөл $f'(u+0)$, $\quad f'(u-0)$ уламжлалуудтай байх бөгөөд $f'(u-0) \le f'(u+0)$ байна.

Баталгаа. $u, u \pm h$, $\quad u \pm \tau \in (a, b)$ цэгүүдийг сонгоё. Үүнд $0 < h < \tau$.



зураг 3.3

Теорем 3.4 ёсоор

$$\frac{f(u)-f(u-\tau)}{\tau} \le \frac{f(u)-f(u-h)}{h} \le \frac{f(u+h)-f(u)}{h} \le$$

$$\le \frac{f(u+\tau)-f(u)}{\tau}. \tag{3.9}$$

Эндээс үзэхэд $\frac{f(u+h)-f(u)}{h}$ хэмжигдэхүүн нь h-г буурахад монотон буурч байгаа бөгөөд доороосоо $\frac{f(u)-f(u-\tau)}{\tau}$ хэмжигдэхүүнээр зааглагдсан байна. Иймд $h \to +0$ үед энэ дараалал нь хязгаартай байх ба энэ нь u цэг дээрх баруун өрөөсгөл уламжлал болно. Өөрөөр хэлбэл,

$$f'(u+0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(u+h)-f(u)}{h}.$$

Нөгөө талаас $\frac{f(u)-f(u-\tau)}{\tau}$ хэмжигдэхүүн τ-г буурахад монотон өсөх бөгөөд дээрээсээ $\frac{f(u+h)-f(u)}{h}$ хэмжигдэхүүнээр зааглагдсан байна. Иймд $\tau \to 0$ үед энэ дарааллын хязгаар орших ба энэ нь $f'(u-0)$ болно:

$$f'(u-0) = \lim_{\tau \to +0} \frac{f(u) - f(u-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Одоо (3.9) илэрхийлэлд $h \to +0$ үед хязгаарт шилжвэл

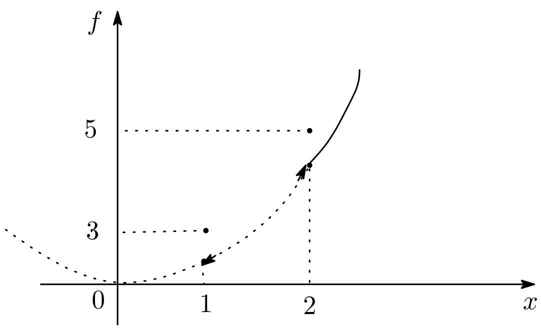
$$f'(u-0) \leq f'(u+0).$$

$f(x)$ функцийн дурын $u \in (a,b)$ цэг дээрх баруун ба өрөөсгөл зүүн уламжлалууд оршиж байгаа тул $f(x)$ функц (a,b) дээр тасралтгүй байна. Теорем батлагдав. ■

$f(x)$ функц нь $[a,b]$ завсарын төгсгөлийн цэгүүд дээр өрөөсгөл уламжлалгүй байж болох ба функц энэ цэгүүд дээр тасралттай байж болно.

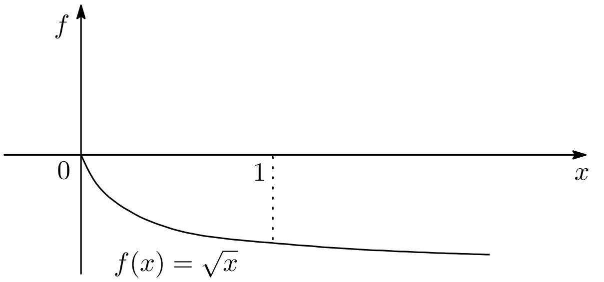
Жишээ 3.1.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x = 1 \\ x^2 & 1 < x < 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$$



зураг 3.4.

$f(x)$ функц $[1,2]$ хэрчим дээр гүдгэр боловч тасралттай байна.
Жишээ 3.2. $f(x) = -\sqrt{x}$ функц нь $[0,1]$ хэрчим дээр тасралтгүй, гүдгэр боловч $f'(0+0)$ оршихгүй байна.



зураг 3.5.

Теорем 3.6. $f(x)$ функц $[a,b]$ хэрчим дээр гүдгэр бөгөөд төгсгөлөг $f'(a+0), f'(b-0)$ уламжлалуудтай болог. Тэгвэл

$$f'(a+0)(u-v) \leq f(u) - f(v) \leq f'(b-0)(u-v) \tag{3.10}$$

тэнцэтгэл биш дурын $u, v(a \leq v \leq u \leq b)$-ийн хувьд биелэх ба $f(x)$ функц $[a,b]$ хэрчим дээр Липшицийн нөхцлийг $L = \max\{|f'(a+0)|; |f'(b-0)|\}$ тогтмолтойгоор хангана.

Баталгаа. Теорем 3.4 ёсоор $h > 0, \quad a+h < v < u < b-h$ үед

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq \frac{f(v)-f(a)}{v-a} \leq$$

$$\leq \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leq \frac{f(b)-f(u)}{b-u} \leq \frac{f(b)-f(b-h)}{h}$$

Эндээс $h \to +0$ үед хязгаарт шилжвэл

$$f'(a+0) \leq \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leq f'(b-0)$$

болж (3.10) нөхцөл гарна. Хэрэв $L = \max\{|f'(a+0), |f'(b-0)|\}$ гэвэл функц $[a,b]$ дээр Липшицийн нөхцлийг хангах нь илэрхий тул теорем батлагдав. ■

Теорем 3.7. $f(x)$ функц нь (a,b) хэрчим дээр гүдгэр бөгөөд дурын $l(v)$ функц нь $v \in (a,b)$ хувьд

$$f'(v-0) \leq l(v) \leq f'(v+0)$$

нөхцлийг хангадаг байг. Тэгвэл

$$f(u) \geq f(v) + l(v)(u-v), \quad u \in [a,b] \tag{3.11}$$

нөхцөл биелэх ба хэрэв $f(x)$ нь $[a,b]$ дээр дифференциалчлагддаг бол

$$f(u) \geq f(v) + f'(v)(u-v), \quad u \in [a,b] \tag{3.12}$$

нөхцөл дурын $v \in [a,b]$-ийн хувьд биелэгдэнэ.
Баталгаа. Гүдгэр функцийн тодорхойлолт (3.6)-г дараах хэлбэрт бичвэл

$$f(v+\alpha(u-v)) - f(v) \leq \alpha(f(u) - f(v)), \quad (0 < \alpha < 1).$$

Эндээс

$$\frac{f(v+\alpha(u-v)) - f(v)}{\alpha} \leq f(u) - f(v)$$

болох ба $\alpha \to +0$ үед хязгаарт шилжвэл

$$f(u) - f(v) \geq f'(v+0)(u-v).$$

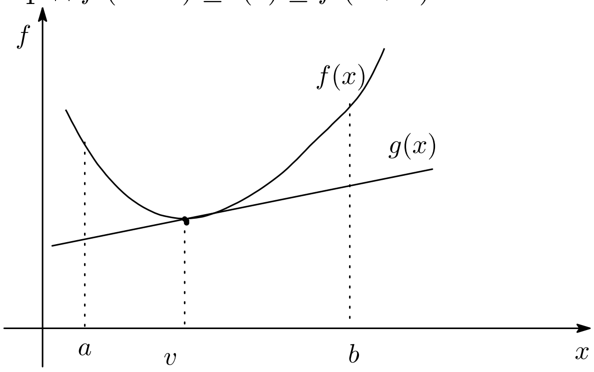
Хэрэв $u > v$ бол $f(u) - f(v) \geq f'(v+0)(u-v) \geq l(v)(u-v)$, харин $u < v$ үед

$$f(u) - f(v) \geq f'(v-0)(u-v) \geq l(v)(u-v)$$

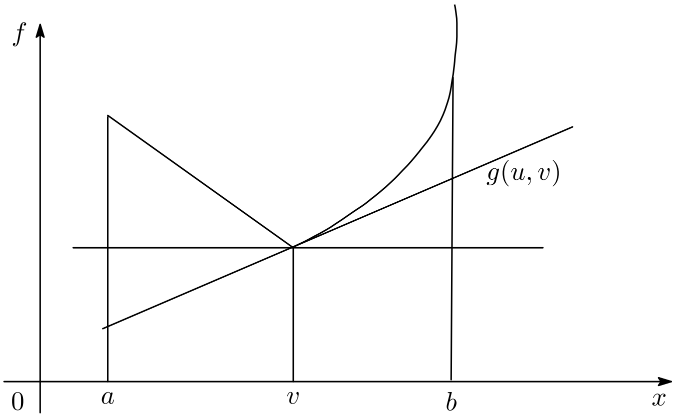
болж (3.11) батлагдана. Одоо $f(x)$ нь $[a,b]$ дээр дифференциалчлагддаг байг. Өөрөөр хэлбэл, $f'(u+0) = f'(u-0), \quad \forall u \in [a,b]$. (3.11)-д $l(v) = f'(v)$ гэж үзвэл (3.12) мөрдөн гарна.
$f'(a+0), \quad f'(b-0)$ уламжлалууд төгсгөлөг тул (3.12) нь $v = a$ ба $v = b$ биед биелж теорем бүрэн батлагдлаа. ■

Теорем 3.7-ын геометр утгыг тайлбарлая.
$g(u) = f(v) + f'(v)(u-v), \quad u \in [a,b]$ шугаман функц нь $y = f(x)$ функцийн $(v, f(v))$ цэгт татсан шүргэгч болно. Гүдгэр, дифференциалчлагдахгүй тохиолдолд $g(u,v) = f(v) + l(v)(u-v)$ функц нь мөн л $f(x)$ функцийн $(v, f(v))$ цэг дээрх шүргэгчүүдийг дүрслэнэ.

Үүнд $f'(v-0) \leq l(v) \leq f'(v+0)$.



Зураг 3.6. Дифференциалчлагдах тохиолдол



Зураг 3.7. Дифференциалчлагдахгүй тохиолдол

(3.11) ба (3.12) тэнцэтгэл бишүүд нь Зураг (3.6) ба (3.7)-д тус тус харгалзана.
Эндээс үзэхэд гүдгэр функцийн графикийн шүргэгчүүд графикаас үргэлж доор байрлалтай байна.

Лемма 3.1. Теорем 3.7-ын нөхцлийг хангаж буй $l(v)$ функц нь (a, b) дээр монотон өснө.

Баталгаа. (3.11) нөхцөл биелэгдэнэ.

$$f(u) \geq f(v) + l(v)(u - v), \quad u \in [a, b]$$

Энэ тэнцэтгэл бишийг v-ийн хувьд дахин бичвэл

$$f(v) \geq f(u) + l(u)(v - u).$$

Энэ 2 тэнцэтгэл бишийг нэмбэл

$$(l(u) - l(v))(u - v) \geq 0, \quad \forall u, v \in (a, b)$$

биелнэ. Иймд $l(v)$ функц $[a, b]$ хэрчим дээр монотон өснө.

Лемма 3.2. $f(x)$ функц $[a, b]$ хэрчим дээр гүдгэр болог.
Тэгвэл $f'(u + 0), f'(u - 0)$ уламжлалууд $u \in (a, b)$ үед монотон өснө.

Баталгаа. Лемма 3.1-ээс $l(v) = f'(v + 0)$, эсвэл $l(v) = f'(v - 0)$ үед мөрдөж гарна.

Мөрдлөг 3.1. Хэрэв $f'(a + 0), f'(b - 0)$ төгсгөлөг бол $f'(u + 0), f'(u - 0)$ уламжлалууд бүх $[a, b]$ дээр монотон өснө.

Теорем 3.8. $f(x)$ функц $[a, b]$ хэрчим дээр гүдгэр бөгөөд
$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a), \quad \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$ байг.
Тэгвэл $f(x)$ функцийн $[a, b]$ дээрх глобаль минимумын цэгүүдийн олонлог $D_* \neq \emptyset$ байх ба $f(x)$-ийн $[a, b]$ дээрх орчны бүх минимумын цэгүүд D_*-д харъяалагдана. Мөн $x^* \in D_*$ байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$f'(x^* + 0) \geq 0, \quad f'(x^* - 0) \leq 0 \tag{3.13}$$

байх явдал юм.
Баталгаа. Теоремын нөхцөл болон Теорем 3.5-аас $f(x)$ функц нь $[a, b]$ дээр тасралтгүй байна. Иймд Вейерштрассын теорем ёсоор $D_* \neq \emptyset$ болно. x^* нь $f(x)$-ийн орчны минимумын цэг болог. Тэгвэл $|h|$-ийн хүрэлцээтэй бага утганд

$$f(x^* \pm h) - f(x^*) \geq 0, \quad \forall h : \quad x^* \pm h \in [a, b].$$

Эндээс

$$f'(x^*+0) = \lim_{h\to+0} \frac{f(x^*+h)-f(x^*)}{h} \geq 0,$$

$$f'(x^*-0) = \lim_{h\to+0} \frac{f(x^*)-f(x^*-h)}{h} \leq 0.$$

Теорем 3.5 ёсоор $a < x^* < b$ үед $f'(x^*+0)$ ба $f'(x^*-0)$ өрөөсгөл уламжлалууд төгсгөлөг байна.
Одоо $x^* \in (a,b)$ цэг нь (3.13) нөхцлийг хангадаг болог. (3.12)-д $v = x^*$ ба $l(v) = 0$ гэж орлуулъя.
Тэгвэл $f(u) \geq f(x^*), \quad \forall u \in [a,b]$ болж $x^* \in D_*$. Иймд (a,b) завсар дээр тасралтгүй, гүдгэр функцийн орчны минимум бүр түүний глобаль минимумын цэг болж байна.
Мөрдлөг 3.2. Хэрэв $x^* = a$ эсвэл $x^* = b$ бол (3.13) нөхцөл нь

$$f'(a+0) \geq 0 \qquad \text{эсвэл} \qquad f'(b-0) \leq 0 \tag{3.14}$$

хэлбэртэй болох ба $f(x)$ функцийн $[a,b]$ хэрчим дээрх орчны минимумын цэг нь түүний $[a,b]$ дээрх глобаль минимумын цэг болно.
Учир нь $x^* = a$ ба $h \to +0$ үед $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$ хэмжигдэхүүн монотон буурах ба доороосоо 0-ээр зааглагдсан байна.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$$

Иймд $f'(a+0)$ төгсгөлөг оршиж байна.

$$f'(a+0) = \lim_{h\to+0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0.$$

Үүний адилаар $x^* = b$ үед $f'(b-0)$ төгсгөлөг оршино. Одоо Теорем 3.6-ын (3.10) нөхцөлд $v = x^* = a$ гэж үзвэл

$$0 \leq f'(a+0)(u-a) \leq f(u) - f(x^*), \quad \forall u \in [a,b].$$

Эндээс $f(x^*) \leq f(u), \quad \forall u \in [a,b]$ болно. Хэрэв (3.10) нөхцөлд $u = x^* = b$ гэвэл:

$$f(x^*) - f(v) \leq f'(b-0)(x^*-v) \leq 0, \quad \forall v \in [a,b]$$

$$f(x^*) \leq f(v), \qquad \forall v \in [a,b]$$

буюу $x^* = b \in D_*$

Теорем 3.9. $f(x)$ функц $[a,b]$ хэрчим дээр гүдгэр, $\lim\limits_{u\to a+0} f(u) = f(a)$, $\lim\limits_{u\to b-0} f(u) = f(b)$, D_* нь $f(x)$-ийн $[a,b]$ дээрх глобаль минимумын цэгүүдийн олонлог ба $v \in (a,b)$ байг.
Тэгвэл $D_* \bigcap [a,v] = \emptyset$ ($D_* \bigcap [v,b] = \emptyset$). байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$f'(v+0) < 0 \quad (f'(v-0) > 0)$$

Баталгаа. Зайлшгүй: $D_* \bigcap [a,v] = \emptyset$ байг.
Эсрэгээс нь $f'(v+0) \geq 0$ гэж үзье. Тэгвэл $f'(v-0) \leq 0$ эсвэл $f'(v-0) > 0$ байна. Хэрэв $f'(v-0) \leq 0$ бол (3.13) нөхцөлөөс $v \in D_*$ болно. Хэрэв $f'(v-0) > 0$ бол v-нь минимумын цэг биш бөгөөд Лемм 3.2 ёсоор $f'(v-0)$ нь (a,b) дээр монотон өсдөг тул $D_* \bigcap [v,b] = \emptyset$ байна. Эндээс $D_* \bigcap [a,v] \neq \emptyset$. Иймд дээрх 2 тохиолдолд нь $D_* \bigcap [a,v] = \emptyset$ гэдэгтэй зөрчилдөж байна.

Мөн үүнтэй төсөөтэйгээр $D_* \bigcap [v,b] = \emptyset$ байх зайлшгүй нөхцөл нь $f'(v-0) > 0$ гэдгийг хялбархан харуулж болно.
Хүрэлцээтэй: $f'(v+0) < 0$ гэж үзье. Тэгвэл Лемм 3.2 ёсоор $f'(u+0) < 0, \quad \forall u \in [a,v]$. Тэгвэл Теорем 3.8 ёсоор $D_* \bigcap [a,v] = \emptyset$.
Хэрэв $f'(v-0) > 0$ бол дээрхтэй төстэйгээр $f'(u-0) > 0, \quad \forall u \in [v,b]$ болох ба $D_* \bigcap [v,b] = \emptyset$ болно.

Теорем 3.10 Хэрэв $f(x)$ функц $[a,b]$ хэрчим дээр гүдгэр ба $\lim\limits_{u\to a+0} f(u) = f(a), \quad \lim\limits_{u\to b-0} f(u) = f(b)$ бол $f(x)$ $[a,b]$ хэрчим дээр унимодаль байна.
Баталгаа. $u_* = \inf D_*$ ба $v_* = \sup D_*$ гэж тэмдэглэе. $f(x)$ функц $[a,b]$ дээр тасралтгүй ба D_* олонлогийн inf, sup-ийн тодорхойлолтыг ашиглавал $u_*, v_* \in D_*$.
Хэрэв $u_* = v_*$ бол $D_* = \{u_*\}$ ганц элементээс тогтоно. Хэрэв $u_* < v_*$ бол

$$f_* = \inf_{u\in[a,b]} f(u) \leq f(\alpha u_* + (1-\alpha)v_*) \geq \alpha f(u_*) + (1-\alpha) f(v_*) = f_*$$

Өөрөөр хэлбэл $f(\alpha u_* + (1-\alpha)v_*) = f_*, \quad \forall \alpha \in [0,1]$.
Иймд $D_* = [u_*, v_*]$. Нөгөө талаас $D_* \bigcap [a,v] = \emptyset, \quad \forall v : (a \le v < u_*)$ тул Теорем 3.9 ёсоор $f'(v+0) < 0, \quad \forall v : a \le v < u_*$.
Тэгвэл $f'(v+0) \le \frac{f(v+h)-f(v)}{h} < 0$ тэнцэл биш нь хүрэлцээтэй бага h-ын утганд биелнэ. Иймд $f(x)$ функц нь $[a,u]$ дээр эрс монотон буурч байна. Үүнтэй төстэйгээр $f(x)$ функц $[v_*, b]$ дээр эрс монотон өснө. Теорем батлагдав. ■

Санамж. Теоремын нөхцөл биелэгдэхгүй бол $D_* = \emptyset$ байж болно.

Жишээ 3.3. $f(x) = x^2$ функц $[-1;1]$ хэрчим дээр гүдгэр бөгөөд $D_* = \{0\}$.

Жишээ 3.4. $f(x) = |x| + |x-1|$ функц $[-1;2]$ хэрчим дээр гүдгэр бөгөөд $D_* = [0,1]$

Жишээ 3.5. $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \le 1 \end{cases}$
функцийн хувьд $D_* = (0,1]$ бөгөөд $\lim\limits_{u \to +0} f(u) \ne f(0)$.

Теорем 3.11. $[a,b]$ хэрчим дээр дифференциалчлагдах $f(x)$ функц гүдгэр байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь $f'(x)$ функц $[a,b]$ хэрчим дээр үл буурах функц байх явдал юм.
Баталгаа. Зайлшгүй нөхцөл нь Лемм-3.1-ээс $l(v) = f'(v)$ $(v \in [a,b])$ үед мөрдөн гарна.
Хүрэлцээтэй нөхцлийг баталья. $f'(x)$ функц $[a,b]$ дээр үл буурах функц болог. $a \le v < u < w \le b$ үед Лагранжийн теоремыг ашиглавал

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v} = f'(c_1), \quad v < c_1 < u$$
$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u} = f'(c_2), \quad u < c_2 < w$$

нөхцөл ёсоор $f'(c_1) \le f'(c_2)$ болж Теорем 3.4 ёсоор функц гүдгэр байх хүрэлцээтэй нөхцөл биелэгдэж байна. Иймд $f(x)$ функц $[a,b]$ хэрчим дээр гүдгэр болж теорем батлагдав. ■

Теорем 3.12. $[a,b]$ хэрчим дээр хоёр дахин дифференциалчлагдах $f(x)$ функц гүдгэр байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a,b]$.

Баталгаа. $f'(x)$ функц $[a,b]$ хэрчим дээр үл буурах зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь $f''(x) \geq 0$ юм. Иймд Теорем 3.11 ёсоор $f(x)$ нь $[a,b]$ дээр гүдгэр байна.

Теорем 3.12-ыг ашиглавал $f(x) = e^x, \quad f(x) = -\ln x$, ба $f(x) = x \ln x$ функцүүд нь $(0, \infty)$ завсар дээр үргэлж гүдгэр гэдгийг хялбархан шалгаж болно.

§ 3.3. Шүргэгчийн арга

. $f(x)$ функц нь $[a,b]$ завсар дээр гүдгэр ба дифференциалчлагддаг болог․ тэгвэл Теорем 3.6 ба 3.8 ёсоор $f(x)$ нь $[a,b]$ дээр Липшицийн нөхцлийг хангах ба унимодаль юм.
Иймд $f(x)$ функцийн $[a,b]$ завсар дээрх глобаль минимумыг олохын тулд өмнө нь үзсэн бүх аргуудыг тухайлбал тахир шугамын аргыг хэрэглэж болно.
Функцийн уламжлал $f'(x)$-ийг энгийн аргаар бодож болж байвал тахир шугамын аргын өөр нэг тохиромжтой хувилбар болох шүргэгчийн аргыг ашиглах нь чухал. Энэ аргын алгоритмыг авч үзье.
$v \in [a,b]$ цэгийг сонгон авч $g(x,v)$ функц тодорхойлъё.

$$g(x,v) = f(v) + f'(v)(x-v), \quad a \leq x \leq b.$$

(3.2) ёсоор

$$g(x,v) \leq f(x), \quad \forall x \in [a,b] \tag{3.15}$$

Анхны дөхөлтийн цэг $x_0 \in [a,b]$ -ийг сонгоно.
$p_0(x) = g(x, x_0)$ функц зохиож

$$p_0(x_1) = \min_{x \in [a,b]} p_0(x)$$

нөхцлөөс x_1 цэгийг тодорхойлно.
Шинэ функц $p_1(x) = \max\{p_0(x), g(x, x_1)\}$ зохиож дараагийн цэг x_2-ыг

$$p_1(x_2) = \min_{x \in [a,b]} p_1(x)$$

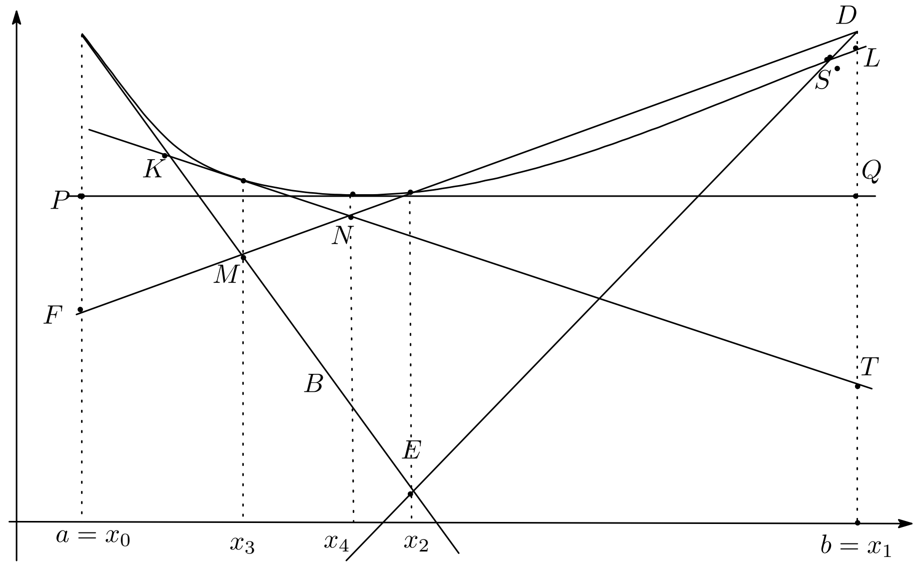
нөхцлөөс тодорхойлно. Одоо $x_0, x_1, \ldots, x_n (n \geq 1)$ цэгүүдийг олсон гэж үзье. Тэгвэл $p_n(x)$ функц зохиоё.

$$p_n(x) = \max\{p_{n-1}(x), g(x, x_n)\}, \quad g(x, x_n) = \max_{0 \leq i \leq n} g(x, x_i).$$

x_{n+1} цэгийг доорх нөхцлөөс олно.

$$p_n(x_{n+1}) = \min_{x \in [a,b]} p_n(x), \quad (x_{n+1} \in [a, b]).$$

Хэрэв ямар нэг n-ийн хувьд $f'(x_n + 0) \geq 0, \quad f'(x_n - 0) \leq 0$ бол ($a < x_n < b$ үед энэ нь $f'(x_n) = 0$ гэсэн үг юм.) Теорем 3.8 ёсоор $x_n \in D_*$ болж итерац зогсоно. $p_n(x)$ функц нь тасралтгүй хэсэгчилсэн шугаман функц бөгөөд шүргэгчийн аргын геометр тайлбарыг зураг 3.8-д харуулав.



Зураг 3.8.

AB: $g(x, x_0)$ функцийн график,
CD : $g(x, x_1)$ функцийн график,
AED : $p_1(x)$ функцийн график,

$FL: g(x, x_2)$ функцийн график,
$AMSD: p_2(x)$ функцийн график,
$KT: g(x, x_3)$ функцийн график,
$AKNSD: p_3(x)$ функцийн график,
$PQ: g(x, x_4)$ функцийн график,
$x_4 = x_*$ бодлогын шийд.
Шүргэгчийн аргын нийлэлт дараах теоремоор үндэслэгдэнэ.

Теорем 3.13. $f(x)$ функц $[a, b]$ завсар дээр гүдгэр ба дифференциалчлагддаг болог. Хэрэв $\{x_n\}$ дараалал нь ($x_n \notin D_*$, $n = 0, 1, \dots,$) өмнөх шүргэгчийн аргын алгоритмаар байгуулагдсан бол

1.) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(x_{n+1}) = f_*$

$$0 \leq f(x_{n+1} - f_* \leq f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, D_*) = 0$ хүчинтэй байна.

Баталгаа. Теоремын нөхцлөөр $f'(a+0), f'(b-0)$ төгсгөлөг учраас Теорем 3.6 ёсоор $f(x)$ функц $[a, b]$ дээр $L = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$ тогтмолтойгоор Липшицийн нөхцлийг хангана. Нөгөө талаас (3.14) ба $p_n(x)$-функцийн тодорхойлолтыг ашиглавал

$$p_{n-1}(x) \leq p_n(x) \leq f(x), \quad x \in [a, b], \ \ n = 1, 2, \dots \tag{3.16}$$

Тэгвэл

$$\begin{aligned} f(x_i) = g(x_i, x_i) \leq p_n(x_i) \leq f(x_i), \\ f(x_i) = p_n(x_i), i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.17}$$

$g(x, x_i)$ шугамын шүргэгчийн өнцгийн коэффициент нь $f'(x_i)$ байх ба $|f'(x_i)| \leq L$. Теорем 3.1-ийг ашиглавал, $p_n(x)$ функц L тогтмолтойгоор Липшицийн нөхцлийг хангана. Одоо теорем 3.3-ын баталгааг давтан гүйцэтгэвэл теоремын 1.) ба 2.) өгүүлбэрүүд батлагдана. ■

Санамж. $f(x)$ функц $[a, b]$ завсар дээр унимодаль ба $x_n \notin D_* = [u_*, v_*]$, $n \geq 0$, $u_* = \inf D_*$, $v_* = \sup D_*$ тул $\{x_n\}$ дарааллын хязгаарын цэгүүд u_* эсвэл v_* үед л $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, D_*) = 0$ биелэгдэнэ.

Функц гүдгэр бөгөөд түүний уламжлалыг хялбар аргаар олж байгаа үед шүргэгчийн аргыг хэрэглэх нь тохиромжтой. Тооцоолон бодох техникт $p_n(x)$ $(x \in [a,b])$ тахир шугамын бүх мэдээллийг санах албагүй юм. Үүнээс зайлсхийх дараах аргыг дэвшүүлье.
$a_1 = a$, $b_1 = b$ гэж үзээд $f'(a_1) = f'(a+0)$, $f'(b_1) = f'(b-0)$.
Хэрэв $f'(a_1) \geq 0$ эсвэл $f'(b_1) \leq 0$ бол Теорем 3.8-ын мөрдлөг ёсоор $a \in D_*$ эсвэл $b \in D_*$ болж бодлого шийдэгдэнэ. Одоо $f'(a_1) < 0$, $f'(b_1) > 0$ бологь. Тэгвэл Теорем 3.9 ёсоор $D_* \subset (a,b)$ байна.
$[a_{n-1}, b_{n-1}]$ $(n \geq 2)$ хэрчмийг байгуулсан бөгөөд $f'(a_{n-1}) < 0$, $f'(b_{n-1}) > 0$ бологь. Тэгвэл $D_* \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$.
$g(x, a_{n-1})$ ба $g(x, b_{n-1})$ шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэгийн абсциссыг x_n-ээр тэмдэглэе. Тэгвэл $a_{n-1} < x_n < b_{n-1}$ байх нь илэрхий юм. $f'(x_n)$-ийг бодьё. Хэрэв $f'(x_n) = 0$ бол $x_n \in D_*$ болж бодлого шийдэгдэнэ.
Хэрэв $f'(x_n) \neq 0$ бол

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} & \text{хэрэв} \quad f'(x_n) > 0 \\ x_n & \text{хэрэв} \quad f'(x_n) < 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

$$b_n = \begin{cases} x_n & \text{хэрэв} \quad f'(x_n) > 0 \\ b_{n-1} & \text{хэрэв} \quad f'(x_n) < 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Байгуулалт ёсоор $f'(a_n) < 0$, $f'(b_n) > 0$ байх ба Теорем 3.9 ёсоор $D_* \subset (a,b)$ байна. Энэ арга нь $x_0 = a$ үеийн шүргэгчийн аргатай давхцаж байна (Зураг 3.8). Энэ аргын алгоритмыг компьютерт хэрэгжүүлэхэд хялбархан юм. Учир нь итерац бүрд $a_n, b_n, f(a_n), f(b_n), f'(a_n), f'(b_n)$ утгуудыг хадгалахад хангалттай.
x_{n+1} цэгийг $f'(a_n) < 0$, $f'(b_n) > 0$ үед $g(x, a_n) = g(x, b_n)$ нөхцөлөөс

$$x_{n+1} = \frac{f(a_n) - f(b_n) + b_n f'(b_n) - a_n f'(a_n)}{f'(b_n) - f'(a_n)}, \quad n \geq 1 \tag{3.20}$$

гэж олно. Шүргэгчийн аргын нийлэлтийн асуудалд дараах теорем хариу өгнө.

Теором 3.14. $f(x)$ функц нь $[a,b]$ завсар дээр 2 дахин дифференциалчлагддаг ба $\inf\limits_{x \in [a,b]} f''(x) > 0$, $f(x_*) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ бологь. Тэгвэл

$x_0 = a,\ a_1 = a,\ b_1 = b$ үед шүргэгчийн аргын (3.18)-(3.20) схемээр байгуулагдсан $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_*, \quad n = 0, 1, \dots)$ дарааллын хувьд дурын бага $\varepsilon > 0$ тоо авахад $N = N(\varepsilon)$ дугаар орших бөгөөд

$$|x_n - x_*| \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{n-N}(b_N - a_N), \quad n \geq N. \qquad (3.21)$$

Баталгаа. Теорем 3.12-оос $f(x)$ функц $[a, b]$ завсар дээр гүдгэр гэж мөрдөн гарна. $f'(x)$ эрс өсөж байгаа тул D_* нь цор ганц x_* цэгээс тогтоно. Теорем 3.13 ёсоор $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$. Нөгөө талаас $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $(n = 1, 2, \dots)$ тул $\{a_n\}$ дараалал монотон өсөж $\{b_n\}$ монотон буурна. Мөн $a_n < x_* < b_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Одоо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_*$ гэдгийг харуулъя. (3.18)-(3.19) ёсоор $\{a_n\}$ эсвэл $\{b_n\}$ дарааллууд нь $\{x_n\}$ дарааллын дэд дараалал болох ба x_* рүү нийлнэ. Жишээлбэл, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_*$ байг. Харин $\{b_n\}$ дараалал x_* цэг рүү нийлэхгүй гэж үзье. Тэгвэл (3.19)-өөс $\{b_n\}$ дараалал $\{x_n\}$-ийн дэд дараалал биш болно. Өөрөөр хэлбэл, $n_0 \geq 1$ дугаар орших бөгөөд $b_n = b_{n_0}$, $\forall n \geq n_0$ байна. Хэрэв $n \to \infty$ үед (3.20)-д хязгаарт шилжвэл

$$f(x_*) = f(b_{n_0}) + f'(b_{n_0})(x_* - b_{n_0}).$$

Дурын $u = \alpha x_* + (1-\alpha)b_{n_0}, \quad \alpha \in [0, 1]$ цэг авьяа.
Гүдгэр функцийн чанар ёсоор

$$\begin{aligned} &f(u) = f(\alpha x_* + (1-\alpha)b_{n_0}) \leq \alpha f(x_*) + (1-\alpha)f(b_{n_0}) = \\ &\alpha[f(b_{n_0}) + f'(b_{n_0})(x_* - b_{n_0})] + (1-\alpha)f(b_{n_0}) = \\ &f(b_{n_0}) + f'(b_{n_0})(u - b_{n_0}), \quad \forall u \in [x_*, b_{n_0}]. \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Нөгөө талаас Теорем 3.7-ын (3.12) чанарыг ашиглавал

$$f(u) \geq f(b_{n_0}) + f'(b_{n_0})(u - b_{n_0}). \qquad (3.23)$$

(3.22)-ыг (3.23)-тай харьцуулбал $f(u) = f(b_{n_0}) + f'(b_{n_0})(u - b_{n_0})$ тэнцэтгэл нь дурын $u \in [x_*, b_{n_0}]$-ийн хувьд биелэгдэнэ. Эндээс $f'(b_{n_0}) = f'(x_*)$ болж $f'(b_{n_0}) > 0$ гэдэгтэй зөрчилдөнө. Иймд

$$\lim_{n\to\infty} b_n = x_*, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = x_*.$$

Хэрэв (3.20)-д Тейлорын томъёог хэрэглэвэл

$$x_{n+1} - a_n = \frac{f(a_n) - f(b_n) - f'(b_n)(a_n - b_n)}{f'(b_n) - f'(a_n)} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f''(\mu_n)}(b_n - a_n),$$

$$b_n - x_{n+1} = \frac{f(b_n) - f(a_n) - f'(a_n)(b_n - a_n)}{f'(b_n) - f'(a_n)} = \frac{1}{2}\frac{f''(\gamma_n)}{f''(\mu_n)}(b_n - a_n),$$

үүнд $\xi_n, \gamma_n, \mu_n \in [a_n, b_n]$. Дээрх томьёоноос

$$b_{n+1} - a_{n+1} \le \max\{x_{n+1} - a_n; b_n - x_{n+1}\} \le q_n \frac{(b_n - a_n)}{2},$$

$$q_n = \max\left\{\frac{f''(\xi_n)}{f''(\mu_n)}; \frac{f''(\gamma_n)}{f''(\mu_n)}\right\}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_*$ тул $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = x_*$.
$f''(x)$ функц тасралтгүй ба $\inf\limits_{x\in[a,b]} f''(x) > 0$ тул

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1.$$

Иймд дурын бага $\varepsilon > 0$ авахад $N = N(\varepsilon)$ дугаар орших бөгөөд

$$q_n \le 1 + \varepsilon, \quad \forall n \ge N.$$

Тэгвэл

$$b_{n+1} - a_{n+1} \le q(b_n - a_n), \ (n \ge N), \qquad q = \frac{1+\varepsilon}{2}.$$

Эндээс $b_n - a_n \le q^{n-N}(b_N - a_N)$ болох ба

$$|x_n - x_*| \le (b_n - a_n) \le q^{n-N}(b_N - a_N), \quad (n \ge N) \tag{3.24}$$

болж теорем бүрэн батлагдав. ■
(3.24)-өөс харахад шүргэгчийн арга нь ойролцоогоор $q = \frac{1+\varepsilon}{2} \approx 0.5$ ноогдвортой геометрийн прогрессийн хурдаар нийлж байна. Иймд дифференциалчлагддаг гүдгэр функцийн ангийн хувьд шүргэгчийн аргын нийлэлт нь хэрчмийг таллан хуваах аргын нийлэлтээс илүү давуу байж чадахгүй байна.

Хэрэв функцийн уламжлалыг хялбар аргаар тооцоолж болдог бол хэрчмийг таллан хуваах аргын өөр нэг хувилбарыг дэвшүүлж болно. Үүнд: $x_0 = a_1 = a, \quad x_1 = b_1 = b$ гэж үзнэ.

$$f'(a_1) = f'(a+0), \quad f'(b_1) = f'(b-0).$$

Хэрэв $f'(a_1) \geq 0$ эсвэл $f'(b_1) \leq 0$ бол (3.14) ёсоор $a \in D_*$ эсвэл $b \in D_*$ байна. Иймд $f'(a_1) < 0, \quad f'(b_1) > 0$ байг. Тэгвэл $D_* \subset (a_1, b_1)$. Одоо $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ $(n \geq 2)$ хэрчмийг байгуулсан гэж үзье. $f'(a_{n-1}) < 0$, $f'(b_{n-1}) > 0$ ба $D_* \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$ бологə. $x_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ гэж үзээд $f'(x_n)$-ийг олъё. Хэрэв $f'(x_n) = 0$ бол $x_n \in D_*$ болж бодлого шийдэгдэнэ. Хэрэв $f'(x_n) \neq 0$ бол (3.18) ба (3.19)-ийн тусламжтайгаар a_n ба b_n-ийг байгуулна. $x_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$-ийг тодорхойлно. Байгуулалт ёсоор $f'(a_n) < 0, \quad f'(b_n) > 0$ тул Теорем 3.9-ийн үндсэн дээр $D_* \subset (a_n, b_n)$. Түүнээс гадна

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

§3.4. Олон гишүүнтийн интерполяцын арга.

Энэ аргаар $f(x)$ функцийн $[a, b]$ завсар дээрх минимумыг олохдоо өгөгдсөн функцийг олон гишүүнтээр аппроксимачилж түүний минимумыг $[a, b]$ завсар дээр олох замаар дараагийн дөхөлтийг сонгоно.

Параболын арга.
$[a, b]$ завсраас x_1, x_2, x_3 цэгүүдийг $x_1 < x_2 < x_3$ нөхцлийг хангасан байхаар сонгоё. $f_1 = f(x_1), \quad f_2 = f(x_2), \quad f_3 = f(x_3)$.
Хавтгайн $(x_1, f_1), \quad (x_2, f_2)$ ба (x_3, f_3) цэгүүдийг холбосон $\psi(x) = c_0(x - x_2)^2 + c_1(x - x_2) + c_2$ парабол байгуулъя. c_0, c_1, c_2 коэффициентүүдийг доорх нөхцлөөс олно.

$$\psi(x_1) = f_1, \quad \psi(x_2) = f_2, \quad \psi(x_3) = f_3$$

Тухайлбал, c_0-ийг олбол:

$$c_0 = \frac{1}{x_1 - x_3}\left[\frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} - \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}\right] \tag{3.25}$$

Хэрэв $\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2}-\frac{f_1-f_2}{x_1-x_2}>0$ бол $y=\psi(x)$ парабол нь дээш харсан байх бөгөөд минимумын цэгтэй байна. Энэхүү глобаль минимумын цэгийг олбол

$$\bar{x}=x_2+\frac{1}{2}\frac{(x_3-x_2)^2(f_1-f_2)-(x_2-x_1)^2(f_3-f_2)}{(x_3-x_2)(f_1-f_2)+(x_2-x_1)(f_3-f_1)} \tag{3.26}$$

Ерөнхий тохиолдолд $\bar{x}$ цэг нь $[x_1,x_3]$ завсарт харьяалагдах албагүй юм. Хэрэв

$$\begin{cases} (f_3-f_2)\geq 0, \quad f_1-f_2\geq 0 & (3.27)\\ (f_3-f_2)+(f_1-f_2)>0 & (3.28)\end{cases}$$

нөхцлүүд биелэгдвэл $\bar{x}\in[x_1,x_3]$.

Тодорхойлолт 3.5 Хэрэв $x_1<x_2<x_3$ цэгүүдийн хувьд (3.27) нөхцөл биелэгдэж байвал x_1,x_2,x_3 цэгүүдийг гүдгэр гурвал гэж нэрлээд $<x_1,x_2,x_3>$ гэж тэмдэглэнэ.

Хэрэв $f(x)$ гэсэн гүдгэр функцийн хувьд x_1,x_2,x_3 цэгүүд гүдгэр гурвал үүсгэж байвал $[x_1,x_3]$ хэрчим нь $f(x)$ функцийн ядаж нэг глобаль минимумын цэгийг агуулна. Хэрэв $f_1=f_2=f_3$ бол $[x_1,x_3]$ хэрчмийн дурын цэг нь глобаль минимумын цэг болно.
Одоо параболын аргын алгоритмыг схемчлэн бичье.
$f(x)$ функц нь $[a,b]$ завсар дээр гүдгэр бөгөөд $<x_1,x_2,x_3>$ болог. $x_*\in[x_1,x_3]$ учир, хэрэв $x_3-x_1\leq\varepsilon$, $(\varepsilon>0)$ бол $\hat{x}=x_2$ нь бодлогын ε нарийвчлалтай ойролцоо шийд болно. Хэрэв $f_1=f_2=f_3$ бол $[x_1,x_3]$ хэрчим бүхэлдээ бодлогын шийд юм.
Хэрэв $x_3-x_1>\varepsilon$ бөгөөд (3.27) нөхцлийн аль нэг нь эрс тэнцэтгэл бишээр биелэгдэж байвал (3.26)-ын тусламжтайгаар $\bar{x}$-г олно.
Хэрэв $\bar{x}=x_2$ бол $\bar{x}:=\frac{x_1+x_2}{2}$ эсвэл $\bar{x}=\frac{x_2+x_3}{2}$ гэж үзнэ.
Дараах хоёр тохиолдол үүснэ.
1. $x_1<\bar{x}<x_2$ байг. $f(x)$ гүдгэр бөгөөд (3.27) нөхцлийг ашиглавал

$$f(x)\leq\alpha f_1+(1-\alpha)f_2\leq f_1.$$

Иймд $f(\bar{x})<f_2$ бол $x_1,\bar{x},x_2$ нь гүдгэр гурвал болно.
Хэрэв $f(\bar{x})>f_2$ бол $\bar{x},x_2,x_3$ нь гүдгэр гурвал байна.

2. $x_2 < x < x_3$ байг. Тэгвэл $f(\bar{x}) \leq \alpha f_2 + (1-\alpha) f_3 \leq f_3$.
Хэрэв $f(\bar{x}) < f_2$ бол $x_2, \bar{x}, x_3$ цэгүүд гүдгэр гурвал,
хэрэв $f(\bar{x}) > f_2$ бол $x_1, x_2, \bar{x}$ цэгүүд гүдгэр гурвал тус тус болно. Шинээр үүссэн гүдгэр гурвалыг анхны гүдгэр гурвал гэж үзээд дээрх процессыг давтан үргэлжлүүлнэ. Анхны гурвалыг олохдоо янз бүрийн эвристик аргуудыг ашиглаж олно.

Кублэг интерполяцын арга.

$f(x)$ функц нь $[a, b]$ завсар дээр тасралтгүй дифференциалчлагддаг ба гүдгэр болог. Мөн $f'(a) < 0$ ба $f'(b) > 0$ гэе.
$f(x)$ функцийг 3-р эрэмбийн олон гишүүнтээр аппроксимачилъя.

$$\psi(x) = c_0(x-a)^3 + c_1(x-a)^2 + c_2(x-a) + c_3,$$

үүнд c_0, c_1, c_2, c_3 коэффициентүүдийг

$$\psi(a) = f(a), \quad \psi(b) = f(b), \quad \psi'(a) = f'(a), \quad \psi'(b) = f'(b)$$

нөхцлүүдээс тодорхойлно. Дараа нь $\bar{x} = arg \min\limits_{[a,b]} \psi(x)$ цэгийг тодорхойлно. Үүнийг дараах томъёогоор олно.

$$\bar{x} = a + \alpha(b-a), \qquad \alpha = \frac{z + w - f'(a)}{f'(b) - f'(a) + 2w},$$

$$z = 3\frac{f(a) - f(b)}{b-a} + f'(a) + f'(b), \qquad w = \sqrt{z^2 - f'(a)f'(b)}.$$

Хэрэв $f'(\bar{x}) < 0$ бол $[x, b]$ хэрчим нь функцийн минимумыг агуулсан шинэ хэрчим буюу $[a, b] := [x, b]$.
Хэрэв $f'(\bar{x}) >$ бол $[a, b] := [a, x]$ бөгөөд итерацийг $[a, b]$ хэрчмээс эхлэн $b - a < \varepsilon$ хүртэл давтан үргэлжлүүлнэ.

IV бүлэг. Дасгал, график тооцооны ажил, программ хангамж

Дасгалууд

4.1. $f(x) = arctgx$ функцийн багасгагч ба ихэсгэгч дарааллуудыг $D = R$ дээр байгуул.
Функц R дээр дээд ба доод торгон хилдээ хүрэх үү?

4.2. $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$
$f(x)$ функцийн R дээрх минимумын цэгүүдийн олонлог D_* -г ол. Энэ функцийн дурын багасгагч дараалал D_* руу нийлнэ гэж үзэж болох уу?

4.3. $f(x) = |||x^2 - 1| - 1| - 1|$ функцийн $[a, b]$ хэрчим дээрх бүх орчны экстремумын цэгүүдийг a ба b-ийн янз бүрийн утгуудын хувьд ол. a ба b-ийн ямар утганд энэ функц $[a, b]$ завсар дээр унимодаль байх вэ?

4.4. $f(x) = e^x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$, $f(x) = \sqrt{|x|}$, $f(x) = \cos x$ функцүүд ямар хэрчим дээр унимодаль байх вэ?

4.5. $f(x) = \max\limits_{0 \le t \le 1} |t^2 - xt|$ функцийн $D = \{x \in R | 1 \le x < \infty\}$ дээрх хамгийн бага утгыг ол.

4.6. $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ функцийн $[0, \dfrac{3\pi}{4}]$ ба $[0, 2\pi]$ хэрчмүүд дээрх экстремумын цэгүүдийг ол.

4.7. $f(x) = \begin{cases} (1 + e^{\frac{1}{x}})^{-1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
функцийн экстремумын цэгүүдийг $[0, 1]$, $[-1, 0]$, $[-1, 1]$, $[1, 2]$ хэрчмүүд дээр ол.

4.8. Липшицийн нөхцлийг хангадаг боловч унимодаль биш функцийн жишээ гарга.

4.9. $[a, b]$ хэрчим дээрх дурын унимодаль функц $[a, b]$ завсар дээр Липшицийн нөхцлийг үргэлж хангаж чадах уу? Жишээлбэл, $f(x) = \sqrt{x}$ функцийг $[0, 1]$ дээр авч үз.

4.10. $f(x) = ||x^2 - 1| - 1|$ функцийн $[-2, 2]$ хэрчим дээрх глобаль минимум олох тахир шугаман аргын эхний 6 алхмыг дурын дөхөлтийн цэг $x_0 \in [-2, 2]$-оос эхлэн гүйцэтгэ.

4.11. $f(x) = 1$ функцийн $[0; 1]$ хэрчим дээрх минимумыг олоход тахир шугамын арга хэрхэн ажиллах вэ?

4.12. Хэрэв $f(x)$ функц $[a, b]$ хэрчим дээр гүдгэр бол дурын $x \in [a, b]$ хувьд

$$f'(x+0) = \inf_{h>0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x-0) = \sup_{h>0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

гэдгийг батал.

4.13. $f(x)$ функц нь $[a, b]$ хэрчим дээр гүдгэр бөгөөд урвуу функцтэй болог. Тэгвэл урвуу функц нь мөн гүдгэр байна гэж үзэж болох уу? $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$ функцүүдийн жишээн дээр тайлбарла.

4.14. $f(u)$ функц нь $[a, b]$ хэрчим дээр гүдгэр ба монотон өсдөг, $z(x)$ функц нь $[c, d]$ хэрчим дээр гүдгэр ба $z(x) \in [a, b]$, $x \in [c, d]$ болог. Тэгвэл нийлмэл функц $g(x) = f(z(x))$ нь $[c, d]$ дээр гүдгэр гэдгийг батал.

4.15. $x \geq 0$ ба $f(0) \leq 0$ үед $f(x)$ функц гүдгэр болог. $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ функц $x > 0$ үед монотон өснө гэдгийг батал.

График тооцооны ажил

4.16-4.18 бодлогуудад $f(x)$ функцийн $[a, b]$ хэрчим дээрх хамгийн бага утгыг ол.

Бодлогын шийд x^*-г алтан огтлолын ба хэрчмийг таллан хуваах аргаар 0.05 нарийвчлалтайгаар тодорхойл.

4.16. $f(x) = x + x^2 - x^3 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^6, \quad [-1; 0]$

4.17. $f(x) = x \sin x + 2\cos x, \qquad [\frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{3}]$

4.18. $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + e^{-2x}, \quad [0; 1]$

4.19-4.21 бодлогуудад $f(x)$ функцийн $[a, b]$ завсар дээрх хамгийн их утгыг ол. x^*-г 0.05 нарийвчлалтайгаар алтан огтлол ба хэрчмийг таллаан хуваах аргаар тодорхойл.

4.19. $f(x) = 72x + 6x^2 - 8x^3 - x^4, \quad [1.5; 2]$

4.20. $f(x) = 2x - x^2 - e^{-x}, \qquad [1; 1.5]$

4.21. $f(x) = 2\sin x - tgx, \quad [0; \frac{\pi}{4}]$

4.22-4.48 бодлогуудад $f(x)$ функцийн $[a, b]$ хэрчим дээрх хамгийн их эсвэл хамгийн бага утгыг ол. Шийдийг 0.01 нарийвчлалтайгаар тодорхойл.

4.22. $f(x) = 1 - 32x + 4x^2 + x^4, \quad [1; 2], \qquad f_{\min} = ?$

4.23. $f(x) = 1 + 4x + 2x^2 + x^4, \quad [-1; 0], \qquad f_{\min} = ?$

4.24. $f(x) = 2 + 5x - 10x^2 + 5x^3 - x^5, \quad [-3; -2], \qquad f_{\max} = ?$

4.25. $f(x) = 3 + 120x - 4x^2 - x^4, \quad [2.5; 3], \qquad f_{\min} = ?$

4.26. $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{7}x^7, \quad [1; 1.5], \qquad f_{\max} = ?$

4.27. $f(x) = 5x + x^2 - \frac{1}{4}x^4, \quad [2; 3], \qquad f_{\max} = ?$

4.28. $f(x) = 1 + x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad [0; 1], \qquad f_{\max} = ?$

4.29. $f(x) = 2x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4$, $[0; 0.5]$, $f_{\min} = ?$

4.30. $f(x) = 2x^2 - (x+1)^4$, $[-3; -2]$, $f_{\max} = ?$

4.31. $f(x) = 2x + x^2 - \frac{1}{5}x^5$, $[-1; -0.5]$, $f_{\min} = ?$

4.32. $f(x) = x - 2x^2 + \frac{1}{5}x^5$, $[1; 2]$, $f_{\min} = ?$

4.33. $f(x) = 1 - 6x - 3x^2 - x^6$, $[-1; 0]$, $f_{\max} = ?$

4.34. $f(x) = 2x^2 + 3(5-x)^{4/3}$, $[1.5; 2]$, $f_{\min} = ?$

4.35. $f(x) = 20x - 5x^2 + 8x^{\frac{5}{4}}$, $[3; 3.5]$, $f_{\max} = ?$

4.36. $f(x) = 80x - 30x^2 - \frac{1}{4}x^4$, $[1; 2]$, $f_{\max} = ?$

4.37. $f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^6$, $[1; 1.5]$, $f_{\max} = ?$

4.38. $f(x) = 10x \lg \frac{x}{e} - \frac{x^2}{2}$, $[0.5; 1]$, $f_{\min} = ?$

4.39. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x(\lg \frac{x}{e} - 2)$, $[1.5; 2]$, $f_{\min} = ?$

4.40. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x(\ln x - 1)$, $[0.5; 1]$, $f_{\min} = ?$

4.41. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (1+x)[\ln(1+x) - 1]$, $[-0.5; 0.5]$, $f_{\max} = ?$

4.42. $f(x) = \frac{1}{\ln 2}2^x - 2x^2$, $[3.5; 4.5]$, $f_{\min} = ?$

4.43. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - e^x - 2x$, $[-1.5; 1]$, $f_{\max} = ?$

4.44. $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cos x$, $[0; 1]$, $f_{\max} = ?$

4.45. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x, \quad [0.5; 1], \qquad f_{\min} = ?$

4.46. $f(x) = x^3 - 3\sin x, \quad [0.5; 1], \qquad f_{\min} = ?$

4.47. $f(x) = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt[3]{x^2})-xarctg\sqrt[3]{x}, [0.5; 1], f_{\min} = ?$

4.48. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x\ln x, \quad [1.5; 2], \qquad f_{\min} = ?$

4.49-4.54 бодлогуудад $f(x)$ функцийн гүдгэр чанарыг $[a, b]$ хэрчим дээр тогтоож, функцийн хамгийн бага утгыг ол. $|f'(c)| \leq 0.05$ үед бодолтыг зогсоо.

4.49 $f(x) = -\ln(\cos x) - x^2, \qquad [\frac{\pi}{4}; \frac{2}{5}\pi], \quad f_{\min} = ?$

4.50 $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x, \qquad [0; \frac{\pi}{4}], \quad f_{\min} = ?$

4.51 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x(2-x)}, \qquad [0.5; 1], \quad f_{\min} = ?$

4.52 $f(x) = -2x - x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}, \qquad [1.25; 1.75], \quad f_{\min} = ?$

4.53 $f(x) = 5e^{-x} + 4x - \frac{x^3}{3}, \qquad [0; 0.5], \quad f_{\min} = ?$

4.54 $f(x) = -2(x + 1)e^{-x} - 2\cos x - x, \qquad [0; \frac{\pi}{6}], \quad f_{\min} = ?$

График тооцооны ажлын хариу

4.16 $f_{\min} = -1.6913, \qquad x^* = -0.292$
4.17 $f_{\min} = 1.910, \qquad x^* = 1.038$
4.18 $f_{\min} = 1.4653, \qquad x^* = 0.6565$
4.19 $f_{\max} = 92.1376, \qquad x^* = 1.603$
4.20 $f_{\max} = 0.6609, \qquad x^* = 1.156$
4.21 $f_{\max} = 0.4501, \qquad x^* = 0.6605$

4.22 $f_{\min} = -33.5064, \qquad x^* = 1.6702$
4.23 $f_{\min} = -0.5814, \qquad x^* = -0.6823$
4.24 $f_{\max} = -59.1806, \qquad x^* = -2.2340$
4.25 $f_{\min} = 246.6345, \qquad x^* = 2.8931$
4.26 $f_{\max} = 1.7557, \qquad x^* = 1.2963$
4.27 $f_{\max} = 10.0481, \qquad x^* = 2.0946$
4.28 $f_{\max} = 1.1004, \qquad x^* = 0.2016$
4.29 $f_{\min} = 1.1377, \qquad x^* = 0.3684$
4.30 $f_{\max} = 7.7290, \qquad x^* = -2.3247$
4.31 $f_{\min} = -0.8945, \qquad x^* = -0.7976$
4.32 $f_{\min} = -1.4814, \qquad x^* = 1.4934$
4.33 $f_{\max} = 3.6347, \qquad x^* = -0.7549$
4.34 $f_{\min} = 20.4415, \qquad x^* = 1.5160$
4.35 $f_{\max} = 47.1447, \qquad x^* = 3.3532$
4.36 $f_{\max} = 52.5836, \qquad x^* = 1.2970$
4.37 $f_{\max} = 3.1893, \qquad x^* = 1.2672$
4.38 $f_{\min} = -22.5454, \qquad x^* = 1.3713$
4.39 $f_{\min} = 1.2077, \qquad x^* = 1.7556$
4.40 $f_{\min} = -0.8385, \qquad x^* = 0.6529$
4.41 $f_{\max} = -1, \qquad x^* = 0$
4.42 $f_{\min} = -8.9169, \qquad x^* = 4$
4.43 $f_{\max} = -0.0001, \qquad x^* = -1.4916$
4.44 $f_{\max} = 1.2527, \qquad x^* = 0.511$
4.45 $f_{\min} = -0.4005, \qquad x^* = 0.7391$
4.46 $f_{\max} = 1.6421, \qquad x^* = -0.8241$
4.47 $f_{\min} = 0.8398, \qquad x^* = 0.7339$
4.48 $f_{\min} = -6.0016, \qquad x^* = 1.8411$

Программ хангамж

Нэг хувьсагчийн функцийн минимум олох аргуудын программыг Паскаль хэл дээр зохиож зарим бодлогыг бодож үзүүлэв. Зарим процедурыг тайлбарлавал:
PROGRAMM METHOD нь

1. Хагаслан хуваах
2. Алтан огтлол

3. Фибоначчи
4. Параболын аргуудыг нэгтгэсэн
Функцийн хэлбэрийг өгч, $[a, b]$, ε-г оруулсны дараа аргаа сонгох замаар программыг ажиллуулна.
PROGRAMM TSH нь тахир шугамын аргын программ. Энд Липшицын тогтмолыг олох, эрэмбэлэх хоёр процедур ашигласан.
PROGRAMM RMP нь жигд алхамтай түүврийн арга юм.
Жишээ: $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $a = -0.5$; $b = 0.8$; $eps = 0,001$; $x \in [a, b]$.

үр дүн: $x = 0,707082999$, $f(x) = 0,499999999$.

```
Program Хэрчмийг таллан хуваах арга;
label M1,M2,M3;
var a,b,c,d,eps,x,k,l,fx:real;
Function F(x:real):real;
begin
    F:=x*sqrt(1-x*x);
end;
Begin
    write('a='); readln(a);
    write('b='); readln(b);
    write('eps='); readln(eps);
M1: if ABS(b-a)<2*eps then goto M3;
    c:=(a+b-eps)/2; d:=(a+b+eps)/2;
    x:=c; k:=F(x);
    x:=d; L:=F(x); if k>L then goto M2; a:=c; goto M1;
M2: b:=d; goto M1;
M3: x:=(a+b)/2; Fx=f(x);
    writeln('x=',x:12:9,'F(x)=',Fx:12:9');
end.
```

Алтан огтлолын арга

Жишээ: $f(x) = 0,1x^3 - 2x^2 + 10x$; $a = 2$, $b = 5$, $eps = 0.001$.
Үр дүн: $x^* = 3,3349538$; $f_{\max} = 14,81481479$.

```
Program Алтан огтлолын арга;
    uses crt, dos;
    Label M1, M2, M3;
    var a,b,c,z,x,x1,x2,k,eps,Fx,Fx1,Fx2: real;
    it: real;
function f(x:real):real;
    begin
        f:=0.1*x*x*x-2*x*x+10*x;
    end;
procedure Ts(a,b,z: real; var c, fun:real);
    begin
        c:=a+z*(b-a); fun=f(c);
    end;
begin Clrscr;
    write('a='); readln(a);
    write('b='); readln(b);
    write('eps='); readln(eps);
        k:=(Sqrt(5)-1)/2; z:=1-k;
        Ts(a,b,z,x1,Fx1); Ts(a,b,k,x2,Fx2);
M1: if ABS(x2-x1)<eps then goto M3;
    if Fx>fx2 then goto M2;
        a:=x1; x1:=x2; Fx1:=Fx2; Ts(a,b,k,x2,Fx2);
    goto M1;
M2: b:=x2; x2:=x1; Fx2=Fx1; Ts(a,b,z,x1,Fx1);
    goto M1;
M3: x:=(x1+x2)/2; Fx:=f(x);
        write('x=',x:12:9); writeln('F(x)=', Fx:12:9);
end.
```

Унимодал функцийн минимум олох аргуудын нэгтгэсэн программ.
(Тэсэлгээний бодлогын зардлын функц C_y (§ 5.4) дээр гүйцэтгэв.)

```
PROGRAM metod;
   uses dos, crt;
   var
       a,b,e,v:real;
       f: function (x:real):real;
       hour, min,sec,sec100: word;
       Countf: integer;

       function ff(x:real):real;
       begin
           ff:=3*exp((4/3)*ln(5-x))+2*x*x;
               {4*ln(x)-14*x*x*x+60*x*x-70*x;}
           inc(Countf)
       end;
       function fk(x:real):real;
       begin
           if x<=-2 then fk:=-3*x-3
           else
               if x<=0 then fk:=3
               else
                   if x<=2 then fk:=3-x
                   else
                       if x<=4 then fk:=2*x-3
                       else
                           if x<=6 then fk:=5 else fk:=3*x-13;
           inc(Countf)
       end;
       function TF(x:real):real;
           begin
               TF:=-(0.001758*sqr(0.2474*exp((1/1.5)*ln(x))+
               +5.416666/x)*(49.06124*(sqr(x*x+1)/(x*x*x))*
               *(1/sqr(0.2474*exp(1/1.5*ln(x)+5.416666/x)+
               +131.859*(1/(x*(0.2474*exp((1/1.5)*ln(x))+
               +5.416666/x))-0.601))));
```

```
        inc(Countf)
    end;

function SqrX(x:real):real;
    begin
        SqrX:=-2*x*Sqrt(1-x*x)+x*x;
        inc(Countf)
    end;
function ExpX(X:real):real;
    begin
        ExpX:=-exp(-x)*ln(x);
        inc(Countf)
    end;
function ExpX1(x:real):real;
begin
    ExpX1:=2*x*x-exp(x);
    inc(Countf)
end;
function Poly(X:real):real;
begin
    Poly:=x*x*x*x-14*x*x*x+60*x*x-70*x;
    inc(Countf)
end;
Procedure hagas(A,B,e,v:real):real;
begin
    var n:integer;
    begin
        n:=0;
        while b-a>e do
        begin
            if f((a+b-v)/2)<=f((a+b+v)/2)
                then b:=(a+b+v)/2
                else a:=(a+b-v)/2;
            n:=n+1;
```

```
        end
        writeln('Итерацийн тоо:',n);
        writeln('Минимум орших
        завсар:(',a:0:10,',',b:0:10,',');
        writeln('Минимумын цэг:',(b+a)/2,'Функцын утга :',
        f((b+a)/2):0:10);
        writeln;
    end
end;

Procedure se(A,B,e:real):real;
const
    SQRT5=2.2360679775;
var n:integer;
fa,fb:real;
begin
    n:=0;
    fa:=f(a+(3-sqrt5)*(b-a)/2);
    fb:=f(a+(sqrt5-1)*(b-a)/2);
while b-a>e do
begin
    if fa<=fb then
        begin
            b:=a+(sqrt5-1)*(b-a)/2;
            fb:=fa; fa:=f(a+(3-sqrt5)*(b-a)/2);
        end
    else
        begin
            a:=a+(3-sqrt5)*(b-a)/2;
            fa:=fb; fb:=f(a+(sqrt5-1)*(b-a)/2);
        end
        n:=n+1;
    end;
    writeln('Итерацийн тоо:','n');
```

```
    writeln('Минимум орших завсар: (',
    a:0:10,',',b:0:10,')');
    writeln('Минимумын цэг:',(b+a)/2,'Функцын утга:',
    f((b+a)/2):0:10);
    writeln;
end;
Procedure mfib(A,B,e:real; m:integer);
var n:integer;
l,l1:real;
x:real;
begin
    m:=0; l:=1; l1:=1; n:=0;
    while (l<(b-a)/e) do
    begin
        l:=l+1; l1:=l-l1;
        m:=m+1;
    end
    l:=l-l1; l1:=l1-l;
    l1:=l1/l; l:=1-l1;
    while b-a>e do
    begin
        x:=a+(b-a)*l;
        if f(x)<=f(a+(b-a)*l1) then b:=x
            else a:=a+(b-a)*l1;
        n:=n+1;
    end;
    writeln('Итерацийн тоо:','n');
    writeln('Минимум орших завсар: (',
    a:0:10,',',b:0:10,')');
    writeln('Минимумын цэг:',(b+a)/2,'Функцын утга:',
    f((b+a)/2):0:10);
    writeln;
end;
```

```
procedure par(a,h,e:real);
var x,f1: array [1..4] of real;
n,s1,s2,s3,i,j,k : integer;
x1,f2,d,m: real;

function sgn(x:real):integer;
begin
    if x>0 then sgn:=1
        else if x<0 then sgn:=-1;
            else sgn:=0;
end

procedure sort;
var k,j,i:integer;
begin
    for j:=1 to 3 do
    begin
        k:=j+1 to 4 do
            if f1[j]>f1[k] then
            begin x1:=x[j]; x[j]:=x[k]; x[k]:=x1;
                f2:=f1[j]; f1[j]:=f1[k]; f1[k]:=f2;
            end;
    end

end

begin
    x[1]:=a; f1[1]:=f(a);
    x[2]:=a+h; f1[2]:=f(a+h);
    if f1[1]<f1[2] then
    begin
        x[3]:=a-h; f1[3]:=f(a-h)
    end
    else
```

```
        begin
            x[3]:=a+2*h;f1[3]:=f(a+2*h);
        end
    d:=(x[2]-x[3])*f1[1];
    d:=d+(x[3]-x[1])*f1[2]+(x[1]-x[2])*f1[3];
    m:=(x[2]*x[2]-x[3]*x[3])*f1[1];
    m:=m+(x[3]*x[3]-x[1]*x[1])*f1[2];
    m:=m+(x[1]*x[1]-x[2]*x[2])*f1[3];
    x[4]:=m/2*d; f1[4]:=f(x[4]);
    sort;
    n:=0;
    while abs(x[1]-x[2])>=e do
    begin
        s1:=sgn(x[2]-x[1]);
        s2:=sgn(x[3]-x[1]);
        s3:=sgn(x[4]-x[1]);
        if (s1=s2) and (s1=-s3) then
            begin
                x[3]:=x[4];
                f1[3]:=f1[4];
            end
        d:=(x[2]-x[3])*f1[1]+(x[3]-x[1])*f1[2]+(x[1]-x[2])*f1[3];
        f2:=(f1[1]-f1[2])/2*d;
        f2:=f2*(x[2]-x[3])*(x[3]-x[1]);
        x[4]:=(x[1]+x[2])/2+f2;
        f1[4]:=f(x[4]);
        sort;
        n:=n+1;
    end
    writeln;
    writeln(n);
    writeln('x=',x[1],'f(',x[1], ')=',f1[1]);
end; {PAR процедурын төгсгөл}
```

```
var met: integer;
    m: integer;
    h: real;
begin{MAIN PROGRAM}
    clrscr;
    Countf:=0;
    writeln('Завсраа оруул')д
    write('a='); readln(a);
    write('b='); readln(b);
    write('e='); readln(e);
    writeln('1 хагаслан хуваах');
    writeln('2 Алтан огтлол');
    writeln('3 Фибоначчи');
    writeln('4 Парабол');
    f:=ExpX1;
    write('Choose Method'); Read(met);
    case met of
        1: begin write('delta='); readln(v) end;
        4: begin write('h='); readln(h) end;
    end;
    hour:=0; min:=0; sec:=0; sec100:=0;
    settime(hour, min,sec,sec100);
    case met of
        1: hagas(a,b,e,v);
        2: se(a,b,e);
        3: mfib(A,B,E,m);
        4: par(a,h,e);
    end;
    GetTime(Hour,Min,Sec,sec100);
    writeln('Бодолтын
    хугацаа','Hour',:',Min,',:',sec,'.'sec100');
    writeln(Countf);
end;
```

Тахир шугамын арга

```
program TSH(input, Output);
    {$M $F000,0,655000}
Uses Dos;
Const
    MaxPoint=3000;
    var x,y : array [0..MaxPoint] of real;
    k,n,i,j : integer;
    l,a,b,eps : real;
    H,M,S,S100: word;

    function F(x:real):real;
    begin
        f:=-(0.001758*x*sqr(0.2474*exp((1/1.5)*ln(x))+5.416666/x)*
        *(49.06124*(sqr(x*x+1)/x*x*x))*(1/sqr(0.2474*exp((1/1.5)*
        *ln(x))+5.416666/x)+131.859*(1/(x*(0.2474*exp((1/1.5)*
        *ln(x))+5.416666/x))-0.601))))
    end;

    function f(x: real):real;
    begin
        if x<=-2 then f:=-3*x-3
            else if x<=0 then f:=3
                else if x<=2 then f:=3-x
                    else if x<=4 then f:=2*x-3
                        else if x<=6 then f:=5 else f:=3*x-13;

    end;

    function g(x,x1:real):real;
    begin
        g;=f(x1)-L*abs(x-x1);
    end
    procedure LifConst(var l: real);
```

```
const mm=100;
var l1:array [0..MaxPoint] of real;
k,i: integer;
begin
    x[0]:=a;
    for i:=1 to mm do
    begin
        x[i]:=x[0]+i*(b-a)/mm;
        l1[i]:=abs(f(x[i])-f(x[i-1]))/(x[i]-x[i-1]);
    end
    i:=0;
    for k:=1 to mm do if l1[i]<l1[k] then i:=k;
    l:=l1[i];
end;

function min(var i: integer): real;
var k: integer;
begin
    i:=0;
    for k:=1 to n do
        if y[i]>y[k] then i:=k;
        min:=f(x[i])-y[i];
end;

Procedure QuickSort(Lo, Hi: integer);
procedure sort(l,r:integer);
var i,j: integer;
xx,yy: real;
begin
    i:=l; j:=r; xx:=x[(l+r)DIV 2];
    repeat while x[i]<xx do i:=i+1;
           while xx<x[j] do j:=j-1;
           if i<=j then
           begin
```

```
            yy:=x[i]; x[i]:=x[j]; x[j]:=yy;
            yy:=y[i]; y[i]:=y[j]; y[j]:=yy;
            i:=i+1; j:=j-1;
           end;
    until i>j;
    if l<j then sort(l,j);
    if i<r then sort(i,r);
end

begin {quicksort}
    Sort{Lo, Hi};
end;
var ii:integer;
rr: real;
begin
    H:=0; M:=0; S:=0; S100:=0;
    writeln('завсраа оруул');
    write('a='); readln(a);
    write('b='); readln(b);
    LifConst(l);
    fillchar(y, sizeof(y),#0);
    fillchar(x, sizeof(x),#0);
    x[0]:=a; x[2]:=b;
    repeat
        writeln('Анхны дөхөлтийн цэг');
        write('x0='); readln(x[1]);
    until (x[0]<=x[1]) and (x[1]<=x[2]);
    write('eps='); readln(eps);
    SetTime(H,M,S,s100);
    n:=2;
    y[1]:=f(x[1]);
    y[0]:=g(x[0], x[1]);
    y[2]:=g(x[2], x[1]);
    while min(k)>=eps do
```

```
    begin
        j:=0;
        if k>0 then
        begin
            j:=j+1;
            x[n+j]:=(y[k-1]-f(x[k]))/(2*L)+(x[k]-x[k-1])/2;
            y[n+j]:=g(x[n+j],x[k]);
        end;
        if k<n then
        begin
            j:=j+1;
            x[n+j]:=(f(x[k])-y[k+1])/(2*L)+(x[k+1]+x[k])/2;
            y[n+j]:=g(x[n+j],x[k]);
        end
        y[k]:=f(x[k]);
        n:=n+j;
        QuickSort(1,n);
    end;
    GetTime(H,M,S,S100);
    Assign(output,''); Rewrite(output);
    writeln('Тахир шугамын оройн цэгийн тоо',n);
    writeln('Бодолт гүйцэтгэсэн
    хугацаа',H,':',M,':',S,'.',S100);
    writeln('Минимумын цэг Функцын утга')д
    writeln(x[k]:0:15,'     ',f(x[k]):0:15);
    assign(input,''); Reset(input);
    readln;
end;
```

V бүлэг. Нэг хувьсагчийн функцийн экстремумын техник эдийн засгийн хэрэглээ

§ 5.1. Пүүсийн ашгийг максимумчлах бодлого

Тухайн пүүсийн эрхэм зорилго нь максимум ашиг олоход оршдог. Нэг төрлийн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэж буй пүүсийн ашгийг төгс өрсөлдөөнт зах зээлийн орчинд томъёолбол:

$$\pi(x) = px - C(x) \to \max, \quad x \geq 0 \tag{5.1}$$

хэлбэртэй байна. Үүнд p нь бүтээгдэхүүний нэгжийн үнэ, x-бүтээгдэхүүний тоо хэмжээ, $C(x)$ нь зардлын функц, $\pi(x)$ нь ашгийн функц.

Хэрэв энэ пүүсийн үйлдвэрлэлийн функц нь дифференциалчлагддаг хотгор бол зардлын функц $C(x)$ нь дифференциалчлагдах, эрс гүдгэр функц [4] болох ба (5.1) бодлого нь хотгор функцийн максимум олох бодлого болно. Максимум байх оновчтой нөхцлийг бичвэл:

$$\pi'(x) = (px - C(x))' = p - C'(x) = 0$$

буюу $p = C'(x)$ болно. $C'(x)$ нь эдийн засгийн утгаараа ахиу зардлыг илэрхийлдэг. Өөрөөр хэлбэл, ахиу зардал нь нэгж бүтээгдэхүүнийг нэмж үйлдвэрлэх зардал юм. $C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$. Иймд үнэ нь ахиу зардалтай тэнцүү байх x^* цэг дээр пүүсийн ашиг хамгийн их байна. Жишээлбэл, ашгийн функц

$$\pi(x) = 22x - x^2 - 102$$

бол максимум байх цэг нь $x^* = 11$ болох ба максимум ашиг нь $\pi_{\max} = 19$ байна. Ерөнхий тохиолдолд ашгийн функц тасралтгүй бөгөөд дифференциалчлагдах албагүй байдаг. Энэ тохиолдолд максимумын цэгийг дээрх аргаар олох боломжгүй бөгөөд зөвхөн тоон аргаар бодох боломжтой юм. (5.1) бодлогыг түүнтэй тэнцүү чанартай минимумын бодлогоор томьёолбол

$$\varphi(x) = -\pi(x) = C(x) - px \to \min, \quad x \in [0, a], \tag{5.2}$$

үүнд a нь бүтээгдэхүүнийг үйлдвэрлэх дээд хязгаар. Тэгвэл (5.2) бодлого нь гүдгэр функцийн минимум олох бодлого бөгөөд алтан огтлолын аргаар бодож болно.
Харин монополь зах зээл дээр үнэ нь пүүсийн үйлдвэрлэж буй бүтээгдэхүүний тооноос хамаарах функц $p = p(x)$ болох тул (5.1) бодлого нь

$$-\pi(x) = C(x) - p(x) \to \min, \quad x \in [0, a] \tag{5.3}$$

хэлбэртэй байна. $p : R_+ \to R, \quad C : R_+ \to R$ функцүүд тасралтгүй дифференциалчлагддаг үед $\pi(x)$ функц нь Липшицийн нөхцлийг хангах ба (5.3) бодлогыг тахир шугамын аргаар бодох боломжтой болно.

§5.2. **Зардлыг минимумчлах**

Пүүсийн үйлдвэрлэлийн зардал нь хүчин зүйлийн үнэ тогтмол үед бүтээгдэхүүний тоо хэмжээнээс хамаарсан нэг хувьсагчийн функц байдаг. Ерөнхий тохиолдолд зардлын функцийг үйлдвэрлэлийн функцийн тусламжтайгаар байгуулсан технологийн зааглал дээр хүчин зүйлийн зардал хамгийн бага байх нөхцлөөс гаргаж авдаг.
Үүнийг хялбар тохиолдолд Кобб-Дугласын 2 хувьсагчтай үйлдвэрлэлийн функцийн жишээн дээр харуулъя.

$$f(y_1, y_2) = y_1^{\alpha} y_2^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta \leq 1.$$

f-үйлдвэрлэлийн хотгор функц,
y_1-хөдөлмөрийн тоо хэмжээ,
y_2-үйлдвэрлэлд ашиглаж буй капиталын хэмжээ,
α-хөдөлмөрийн мэдрэмж,
β-капиталын мэдрэмж. Өөрөөр хэлбэл, капиталыг 1%-иар өсгөхөд бүтээгдэхүүний тоо хэмжээ $\beta(\%)$-иар өснө
Хүчин зүйлийн зардал хамгийн бага байх бодлогыг томьёолбол:

$$\begin{cases} p_1 y_1 + p_2 y_2 \to \min, \\ f(y_1, y_2) = x \end{cases} \tag{5.4}$$

Үүнд p_1 нэгж хөдөлмөрийн үнэ, p_2 нэгж капиталын үнэ, x-нь бүтээгдэхүүний тоо хэмжээ. Энэ бодлого нь хоёр хувьсагчийн функцийн нөхцөлт экстремумын бодлого бөгөөд үүнийг Лагранжийн аргаар бодож болох боловч, бид нэг хувьсагчийн функцийн минимумын бодлого руу шилжүүлж бодъё. $f(y_1, y_2) = x$ буюу $y_1^\alpha y_2^\beta = x$ нөхцлөөс y_2-хувьсагчийг илэрхийлж зорилгын функцэд орлуулна:

$$y_2 = \left(\frac{x}{y_1^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} = x^{\frac{1}{\beta}} \cdot y_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Зорилгын функц $p_1y_1+p_2y_2$ нь дараах нэг хувьсагчийн функц руу шилжинэ.

$$\varphi(y_1) = p_1y_1 + p_2x^{\frac{1}{\beta}} \cdot y_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Энэ функцийн гүдгэр гэдгийг харуулъя.

$$\varphi'(y_1) = p_1 - \frac{\alpha}{\beta}p_2 \cdot x^{\frac{1}{\beta}} y_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} = p_1 - \frac{\alpha p_2}{\beta}x^{\frac{1}{\beta}} \cdot y_1^{-\frac{\alpha+\beta}{\beta}}.$$

Одоо функцийн 2-р эрэмбийн уламжлалыг олбол:

$$\varphi''(y_1) = \frac{\alpha p_2}{\beta^2}x^{\frac{1}{\beta}} \cdot y_1^{-\frac{\alpha+2\beta}{\beta}} > 0.$$

Иймд Теорем [3.12] ёсоор $\varphi(y_1)$ функц эрс гүдгэр байна. (5.4) бодлого нь дараах нэг хувьсагчийн функцийн минимум олох бодлого болно.

$$\varphi(y_1) \to \min, \quad y_1 \in (0, +\infty)$$

Минимум байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцлийг бичвэл:

$$\varphi'(y_1) = p_1 - \frac{\alpha p_2}{\beta}x^{\frac{1}{\beta}} \cdot y_1^{-\frac{\alpha+\beta}{\beta}} = 0.$$

Эндээс y_1^*-г олбол

$$y_1^* = x^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{p_1\beta}{\alpha p_2}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Одоо y_2^*-г олъё.

$$y_2^* = x^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{p_1\beta}{\alpha p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Хамгийн бага хүчин зүйлийн зардлыг тооцвол:

$$\begin{aligned}
&\psi(p_1, p_2, x) = p_1 y_1^* + p_2 y_2^* = \\
&x^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[p_1 \cdot \left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + p_2 \cdot \left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \\
&= p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \cdot x^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.
\end{aligned}$$

Хэрэв хүчин зүйлийн үнийг өгөгдсөн гэж үзвэл $\psi(p_1, p_2, x)$ нь x-ээс хамаарсан нэг хувьсагчийн функц болох ба үүнийг пүүсийн зардлын функц гэж нэрлэнэ. Пүүсийн зардлын функцийг бичвэл:

$$C(x) = \psi(\bar{p_1}, \bar{p_2}, x).$$

Зардлын функц гүдгэр гэдгийг шалгая:

$$C'(x) = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\overline{p_1} \cdot \left(\frac{\overline{p_1}\beta}{\overline{p_2}\alpha}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \overline{p_2} \cdot \left(\frac{\overline{p_1}\beta}{\overline{p_2}\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \cdot x^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}},$$

$$C''(x) = \frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\left[\overline{p_1} \cdot \left(\frac{\overline{p_1}\beta}{\overline{p_2}\alpha}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \overline{p_2} \cdot \left(\frac{\overline{p_1}\beta}{\overline{p_2}\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \cdot x^{\frac{1-2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}.$$

$\alpha + \beta \leq 1$ тул $C''(x) \geq 0, \quad \forall x \in R_+$ байна. Гүдгэр функцийн шинжүүр (Теорем 3.12) ёсоор $C(x)$ функц гүдгэр байна. Тэгвэл зардлыг минимумчлах бодлого нь

$$C(x) \to \min, \quad x \in (0, a)$$

хэлбэртэй байх ба гүдгэр, дифференциалчлагдах функцийн хамгийн бага утгыг өгөгдсөн завсар дээр олох бодлого болно. Энэ бодлогыг алтан огтлол, хэрчмийг таллан хуваах болон шүргэгчийн аргуудын аль нэгний тусламжтайгаар бодож болно.

Жишээ болгон Уулын баяжуулах Эрдэнэт үйлдвэрийн нийт зардлыг минимумчлах бодлогыг авч үзье.
"Эрдэнэт" үйлдвэрийн нийт зардал нь өрөмдлөг тэсэлгээний ажил, геологи маркшейдерийн ажил, ачих тээвэрлэх процесс, бутлах процесс, баяжуулах процесс зэрэг технологийн процессын зардлын нийлбэрээс тогтдог. Эдгээр процессуудыг хүдрийн бутлалтын дундаж диаметрээс хамааруулан загварчилж нийт зардлыг дараах хэлбэртэй гаргаж авсан [6]:

$$C(x) = \frac{73.93}{170-0.9x} + \frac{389.14}{(40-0.25x)7.2} + \frac{1.58}{1+x} + \frac{0.24}{1+2.5x} + \frac{0.27}{1+3.6x} + \frac{5.72}{1+0.02x} + 10.2x.$$

Энэхүү зардлын функцийг хөрсний хатуулгын шинж чанар 12-р категортой үед гаргасан болно. Тэгвэл нийт зардлыг хамгийн бага байлгах бодлого нь

$$C(x) \to \min, \quad x \in [0.01; 20]$$

хэлбэртэй болсон бөгөөд бодлогыг хэрчмийг таллан хуваах аргаар бодвол шийд нь $x^* = 16.34$ см гэж олдоно.

§ 5.3 Дундаж зардлын минимум

Нийт зардлыг бага байлгахаас гадна дундаж зардлыг бага байлгах нь эдийн засагт чухал ач холбогдолтой юм.
Энэ бодлогыг томъёолбол:

$$\varphi(x) = \frac{C(x)}{x} \to \min, \quad x \in (0, +\infty) \tag{5.5}$$

Үүнд: $\varphi(x)$-дундаж зардлын функц,
$C(x)$-нийт зардлын функц,
x-бүтээгдэхүүний тоо хэмжээ.
Үйлдвэрлэлийн функцийг хотгор гэж үзье. Энэ үед зардлын функц $C(x)$ гүдгэр гэдгийг урьд нь тэмдэглэж байсан. $\varphi(x)$ функцийн төлөв байдлыг тодорхойльёо.

$C(x)$-функц гүдгэр боловч $\varphi(x)$ функц гүдгэр байх албагүй юм.

$$L = \{x \in R_+ | \ \ \varphi(x) \leq K\}, \quad K > 0$$

олонлог байгуулъя. Энэ олонлог нь дараах олонлогтой тэнцүү юм.

$$M = \{x \in R_+ | C(x) - Kx \leq 0\}, \quad K > 0$$

M олонлогийг гүдгэр гэдгийг харуулъя. Дурын $u, v \in M$ элементүүд авъя. $C(x)$ гүдгэр функц учир

$$C(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha C(u) + (1-\alpha)C(v), \quad \alpha \in [0,1]$$

тэнцэтгэл биш биелэгдэнэ.

$$C(\alpha u+(1-\alpha)v) - K(\alpha u+(1-\alpha)v) \leq \alpha C(u) + (1-\alpha)C(v) - \alpha Ku -$$

$$(1-\alpha)Kv = \alpha[C(u) - Ku] + (1-\alpha)[C(v) - Kv] \leq 0.$$

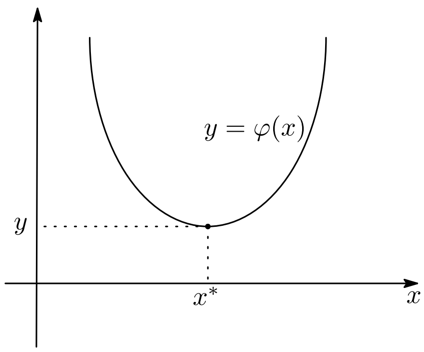
Иймд $\alpha u+(1-\alpha)v \in M, \ \ \alpha \in [0,1]$ болж M гүдгэр болох нь харагдаж байна. Тэгвэл квазигүдгэр функцийн шинжүүр Теорем 2.1. ёсоор дундаж зардлын функц $\varphi(x)$ нь квазигүдгэр байна.
(5.5) бодлогын сэжигтэй цэг буюу минимум байх зайлшгүй нөхцлийг бичвэл:

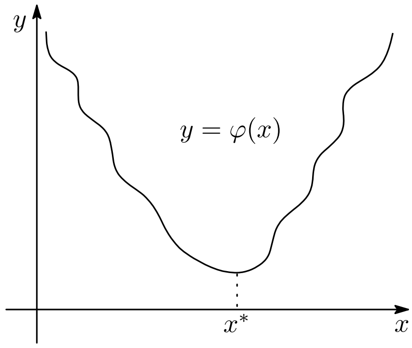
$$\varphi'(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x} = 0$$

Эндээс $C'(x^*)x^* - C(x^*) = 0$ буюу

$$C'(x^*) = \frac{C(x^*)}{x^*} \tag{5.6}$$

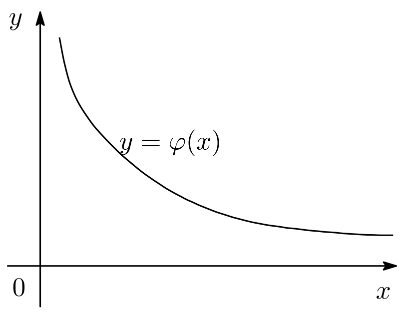
болно. Хэрэв x^* нь минимум цэг бол энэ цэг дээрх ахиу зардал нь дундаж зардалтай тэнцүү байна. Ерөнхий тохиолдолд, x^* цэг нь дундаж зардлын минимумын цэг байх албагүй юм. Үүнийг дараах графикаар харуулав.

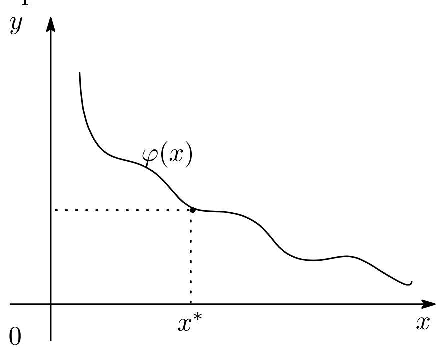




Зураг 5.1. Зураг 5.2.

Зураг 5.1 ба Зураг 5.2-д дундаж зардлын минимумын цэг оршиж байгаа ба энэ цэгийг (5.6) тэгшитгэлээс олно. Нөгөө талаас хэрэв энэ тэгшитгэлийг бодоход хүнд байвал алтан огтлолын арга болон хэрчмийг таллан хуваах аргыг хэрэглэж болно.





Зураг 5.3. Зураг 5.4.

Зураг 5.3 ба 5.4-д дундаж зардлын минимум цэг оршихгүй байна. Тухайлбал, зураг 5.3-д харгалзах (5.6) тэгшитгэл шийдгүй бол зураг 5.4-д харгалзах (5.6) тэгшитгэл шийдтэй боловч энэ шийд нь $y = \varphi(x)$ функцийн зөвхөн сэжигтэй цэг болж байна. Дундаж зардлын функцийн минимум орших асуудал нь зардлын функцийн төлөв байдал болон түүнд нөлөөлөх тогтмол зардлаас ихээхэн хамаарна. Эдийн засгийн онолд зардлын функцийг урт ба богино хугацааны зардал гэж ялган авч үздэг. Богино хугацааны зардлын функц дараах хэлбэртэй байна.

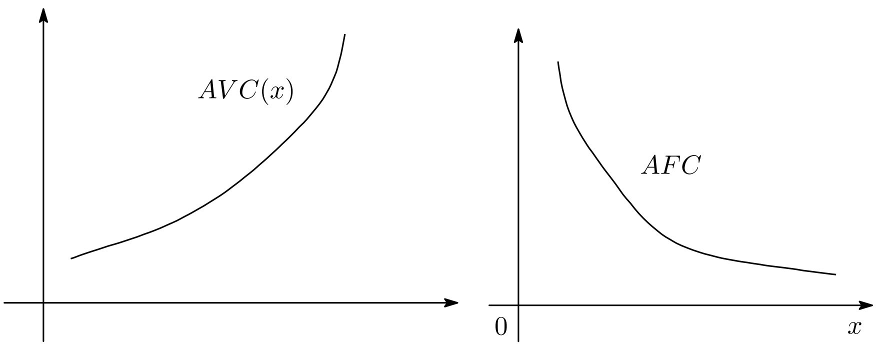
$$C(x) = FC + VC(x).$$

Үүнд:
FC-тогтмол зардал (fixed cost)
VC(x)-хувьсах зардал (Variable cost)
Тэгвэл дундаж зардал

$$\varphi(x) = AVC(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{FC}{x} + \frac{VC(x)}{x}$$

эсвэл

$$AVC(x) = AFC(x) + AVC(x)$$



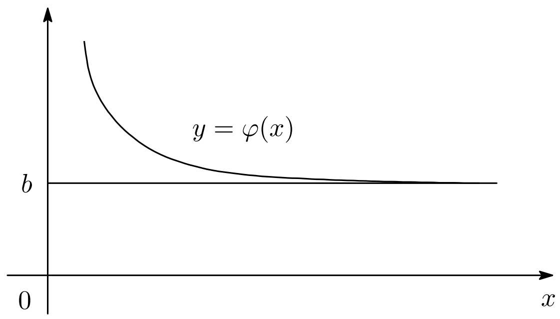
Зураг 5.6. Зураг 5.7.

Дундаж тогтмол зардлын бууралт нь дундаж зардлын функцийн бууралтыг бий болгох ба дундаж хувьсах зардлын өсөлт нь дундаж зардлын өсөлтийг бий болгож байгаа тул дундаж зардлын функц нь квазигүдгэр функцийн хэлбэртэй болж улмаар глобаль минимумын цэгтэй болж хувирна. Үүнийг жишээгээр харуулъя.

$$C(x) = FC + VC(x) = a + bx, \quad a > 0, b > 0.$$

Үүнд, тогтмол зардал $FC = a$, хувьсах зардал $VC(x) = bx$ юм.

$$\varphi(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{a}{x} + b$$



Зураг 5.7.

Зураг 5.7-оос харахад нийт зардал шугаман тохиолдолд бүтээгдэхүүний тоо хязгааргүй ихсэхэд дундаж зардлын функц багасгаж улмаар тогтмол зардал b руу тэмүүлж байна.
Хэрэв зардлын функц квадратлиг хэлбэртэй бол

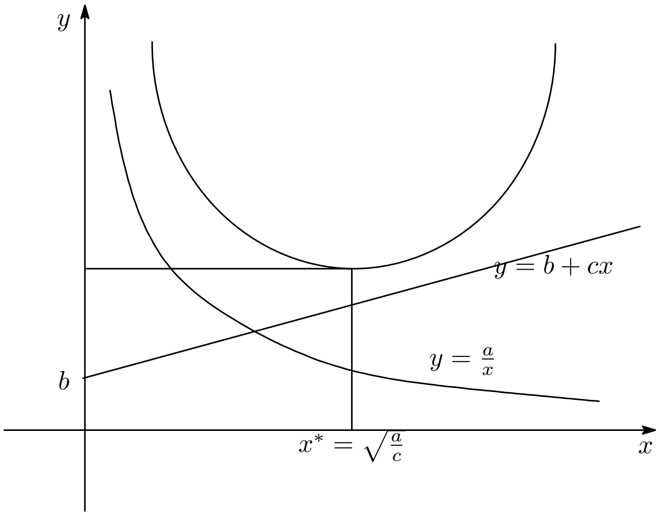
$$C(x) = a + bx + cx^2, \quad (a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0)$$

$$\varphi(x) = \frac{a}{x} + b + cx$$

Энэ функцийн минимумын цэгийг олбол:

$$\varphi'(x) = -\frac{a}{x^2} + c$$

$$x^* = \sqrt{\frac{a}{c}}$$

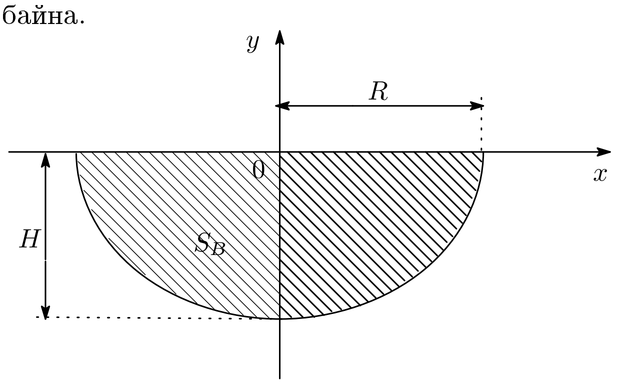


Зураг 5.8.

Зураг 5.8-аас харахад хэрэв зардлын функц квадратлаг бол дундаж зардлын функц минимумын цэгтэй бйна. Өөрөөр хэлбэл, хувьсах зардлын функц нь бүтээгдэхүүний тоотой харьцуулахад дээд эрэмбийн ихсэж барагдахгүй хэмжигдэхүүн байвал дундаж зардлын функц минимум цэгтэй байна. Ерөнхий тохиолдолд дундаж зардлын функцийн минимумын бодлого нь богино хугацааны зардлын функцтэй илүү холбоотой болох нь дээрх жишээнүүдээс харагдаж байна.

§5.4. **Тэсэлгээний математик загвар**

Барилгын аливаа ажил суурь тавихаас эхэлдэг. Энэ ажлын хүрээнд суваг байгуулах ажлын төсөл хийгдэнэ. Төслийг зохиохдоо өнгөн хөрсний хөндлөн огтлолын шугамыг авч үздэг. Тэсэлгээ хийсний дараа үүссэн нүхийг нүх ухдаг тусгай механизмаар төслийн хэмжээнд хүргэдэг байна. Тэсэлгээний дараа үүссэн нүхний хөндлөн огтлолын шугам ба төслийн хөндлөн огтлолын шугам хоёрыг харьцуулан үзэж болно. Тэсэлгээний ажлын параметрүүдийг өөрчилбөл энэ хоёр хөндлөн огтлолын шугамуудын хооронд янз бүрийн харьцаа бий болдог. Ингэснээс барилгын ажлын үр ашгийг тооцоолж байгаа техник эдийн засгийн үзүүлэлтүүд нь өөр өөр гардаг. Иймд техник эдийн засгийн үзүүлэлтүүд нь хамгийн оновчтой байхаар тэсэлгээний параметрүүдийг сонгон авах нь барилгын ажилд чухлаар тавигддаг. Жишээлбэл: Үргэлжилсэн шуудуу ухаж байгаа үед шидэлтийн үзүүлэлтийн зэрэг /коэффициент/ хамгийн их байх тэсэлгээний параметрүүдийг сонгож авах нь оновчтойд тооцогддог байна. Хэдийгээр шидэлтийн коэффициент хамгийн их авагдлаа ч гэсэн үүссэн нүхний хэмжээ төслийн шугамаас хэт их хэлбийх ёсгүй бөгөөд эсвэл төслийн шугамыг шүргэж, эсвэл түүнтэй давхцаж байх шаардлага тавигддаг. Хэрвээ үүссэн нүхний шугам нь төслийн шугамаас их хэлбийсэн бол барилгын ажилд муугаар нөлөөлнө. Туршилтын үр дүнд тэсэлгээний шугам нь нэгэн төрлийн хөрсөнд дараах хэлбэртэй болохыг тогтоосон байна.



Зураг 5.9.

Уг хөндлөн огтлолын шугаман функц нь

$$y = f(x) = \frac{\bar{H}h}{(nh)^{\gamma}}x^{\gamma} - \bar{H}h; \qquad H = \bar{H}h.$$

Үүнд: n-тэсэлгээний үйлчилгээний үзүүлэлт /зэрэг/
γ-чулуулгын бат бэхийн тогтмол, H-тэсэлгээ хийсний дараа үүссэн нүхний гүн, R-нүхний радиус.

Координатын системийн OX тэнхлэгийг газрын гадаргуу дээр авч төслийн шугам ба OY тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг олбол

$$S_B = 2\left|\int_0^R f(x)dx\right|; \quad y = 0 \ \text{үед} \ \ x = hn \ \ \text{буюу} \ \ R = nh.$$

$$S_B = 2\left|\int_0^{nh}\Big(\frac{\bar{H}h}{(nh)^\gamma}\cdot x^\gamma - \bar{H}h\Big)dx\right| = 2\left|\frac{\bar{H}h}{(nh)^\gamma}\cdot\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \bar{H}hx\right|_0^{nh} =$$

$$= 2\left|\frac{\bar{H}h^2n}{\gamma+1} - \bar{H}nh^2\right|;$$

$$S_B = \frac{2\gamma h^2 n\bar{H}}{\gamma+1} \tag{5.7}$$

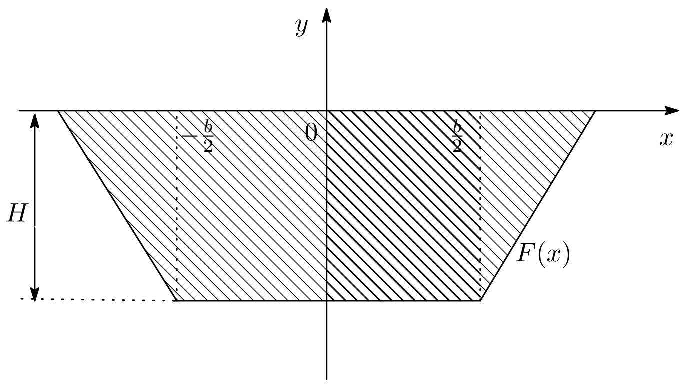
Одоо үргэлжлэх технологтой үед хувийн өртөг нь хамгийн бага байхаар тэсэлгээний ажлын параметрүүдийг оновчтой сонгон авах бодлогыг авч үзье. Хувийн өртгийн функц буюу зорилгын функц дараах хэлбэрээр өгөгдөнө. $C_y = \frac{З_y}{S_B}$
Үүнд: C_y хувийн өртөг, $З_y$ − 1 $м^2$ газарт оногдох тэсэлгээний зардал
Үргэлжлэх технологтой үед тэслэх бодисын цэнэгийг байрлуулж дараа нь булах, туслах газрын хэсгийг бульдозероор булж тэсэлгээ явуулах ба дараа нь хөрс ухагч машинаар янзлах зэрэг ажил хийгдэнэ.
(5.7) томьёог ашиглаж зорилгын функцийг дараах байдлаар бичиж болно.

$$C_y = \frac{\gamma+1}{2\gamma h^2 nH}\left[\bar{R}h^2\frac{(n^2+1)^2}{n}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i + b_R(h - h_З)\sum_{j=1}^{2}\beta_j + \sum_{j=1}^{2}\gamma_j\right]$$

Үүнд: b_R дээд хэсгийн өргөн, $h_З$-цэнэгийн байрлуулах гүн $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j$-тэсрэх бодисын цэнэг, цооног ухах ба булах, цэнэг булах машинд тус тус харгалзах норматив зардлууд, $\bar{R}$-тэсрэх бодисын

хувийн зардал.
Төслийн шугам трапец хэлбэртэй учраас түүний функцийг дараах хэлбэртэй бичиж болно.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-x-mH_{np}-\frac{b}{2}}{m}, & x < -\frac{b}{2} \\ -H & -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ \frac{x-mH_{np}-\frac{b}{2}}{m}, & x > \frac{b}{2} \end{cases}$$



Зураг 5.10.

Үүнд: H_{np} -төслийн дундаж гүн,
b-нүхний ёроолын өргөн,
m-коэффициент,

Төслийн шугам дээрх хэлбэртэй байна. Тэсэлгээний дараах шугам ба төслийн шугам хоёрын шүргэлцэх нөхцлийг бичвэл:

$$F(x) = f(x), \quad F'(x) = f'(x).$$

Одоо $f(x), F(x)$ функцүүдийн уламжлалыг олбол:

$$f'(x) = \frac{\bar{H}h}{(nh)^{\gamma}}\gamma x^{\gamma-1} \qquad F'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{m}, & x < -\frac{b}{2} \\ 0, & -\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2} \\ \frac{1}{m}, & x > \frac{b}{2} \end{cases}$$

$F'(x) = f'(x)$ нөхцлийг $\frac{\bar{H}h}{(nh)^\gamma}\gamma x^{\gamma-1} = \pm\frac{1}{m}$ гэж бичээд үүнээс x-ийг олбол: $x = nh(\frac{n}{m\bar{H}\gamma})^{\frac{1}{\gamma-1}}$ болно. $F(x) = f(x), \quad f(-x) = F(-x)$ нөхцөлд x-ийн утгыг орлуулж хялбарчилбал:

$$\frac{\bar{H}h}{(nh)^\gamma}\gamma x^\gamma - \bar{H}h = \frac{x}{m} - H_{np} - \frac{b}{2m}$$

$$h\Big\{\Big(\frac{n}{m\gamma\bar{H}}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{2m\gamma\bar{H}}{2n(\gamma-1)}\Big\} = \frac{(2mH_{np}+b)^\gamma}{2n(\gamma-1)} \Rightarrow$$

$$h = \frac{\gamma(2mH_{np}+b)}{2n(\gamma-1)[(\frac{n}{m\gamma\bar{H}})^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{m\gamma\bar{H}}{n(\gamma-1)}]} \tag{5.8}$$

(5.8) нь бидний бодлогын тэнцэтгэл хэлбэрээр өгөгдсөн нөхцөл болно. Түүнээс гадна цэнэгийг байрлуулах гүн

$$h : h_T \leq h \leq H_T \tag{5.9}$$

нөхцлийг хангасан байна. Мөн цэнэгийн үйлчилгээний зэрэг n нь n_k гэсэн сэжигтэй утгаас багагүй байна.

$$n \geq n_k \tag{5.10}$$

(5.9), (5.10) нь бодлогын тэнцэтгэл бишээр өгсөн нөхцлүүд юм. Ийм учраас хувийн өртөг нь хамгийн бага байхад тэсэлгээний параметрүүдийг оновчтой сонгох бодлого нь (5.8)-(5.10) нөхцлүүдийг хангасан, C_y функцийг хамгийн бага утгатай байлгах n, h хувьсагчуудын хос $(\bar{n}, \bar{h})$-ийг (цэгийг) ол гэсэн шугаман биш программчлалын бодлого болж байна. Өөрөөр хэлбэл C_y гэсэн хоёр хувьсагчийн функцийн нөхцөлт экстремумын бодлогыг бодно гэсэн үг.

$$C_y \to \min_{n,h} \tag{5.11}$$

$$h = \frac{\gamma(2m\gamma H_{np}+b)}{2n(\gamma-1)}\frac{1}{[(\frac{n}{m\gamma\bar{H}})^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{m\bar{H}}{n}]} \tag{5.12}$$

Дээрх бодлогыг (5.8)-(5.9) нөхцөлөөс нэг хувьсагчийг нөгөөгөөр нь илэрхийлж зорилгын функцэд орлуулбал, нэг хувьсагчийн функцийн экстремумыг хэрчим дээр олох бодлого болж хувирна. (5.12) нөхцөлд h_T, H_T-г харгалзуулан орлуулж тэнцэтгэл бодвол харгалзах h_T, $\bar{n}_T$ олдоно.

$$n_T \leq n \leq \bar{n} \tag{5.12}$$

(5.10)-(5.12) тэнцэтгэл бишүүдээс $\underline{n} \leq n \leq \bar{n}$ гэж олдоно.
(5.8) тэнцэтгэлээс h -ийг C_y-д орлуулбал:

$$C_y = C_y(n) = \frac{\gamma+1}{2\gamma n\bar{H}} \cdot \frac{4n^2(\gamma-1)^2[(\frac{n}{m\gamma\bar{H}})^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{m\bar{H}}{n}]^2}{\gamma^2(2mH_{np}+b)^2}$$

$$\Big\{\bar{R}\cdot\frac{\gamma^2(2mH_{np}+b)^2}{4n^2(\gamma-1)^2}\cdot\frac{1}{\Big[(\frac{n}{m\gamma\bar{H}})^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{m\bar{H}}{n}\Big]^2}\cdot\frac{(n^2+1)^2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{3}\alpha_i +$$

$$b_R\Big(\frac{\gamma(2mH_{np}+b)}{2n(\gamma-1)}\cdot\frac{1}{(\frac{n}{m\gamma\bar{H}})^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{m\bar{H}}{n}} - h_3\Big)\sum_{j=1}^{2}\beta_j + \sum_{j=1}^{2}\gamma_j\Big\} \to \min,$$

$$\underline{n} \leq n \leq \overline{n}$$

гэсэн нэг хувьсагчийн функцийн хэрчим дээрх глобаль минимумыг олох бодлого болно. Уг бодлогыг бодохын тулд дараах параметрүүдийн утгуудыг ашигласан. Үүнд:

1.	$\gamma = 2.5$	6.	$\beta_1 = 0.093$	11.	$m = 2.5$
2.	$\bar{H} = 1.3$м		$\beta_2 = 0.0266$	12	$n_k = 2$
3.	$b_R = 3$м	7.	$\gamma_1 = 0.28$	13.	$H_T = 4.5$м
4.	$R = 1.8$м		$\gamma_2 = 0.016$	14.	$h_T = 3$м
5.	$\alpha_1 = 0.08$	8.	$h_3 = 2.5$м		
	$\alpha_2 = 0.004$	9.	$H_{np} = 4$м		
	$\alpha_3 = 0.005$	10.	$b = 1$м		

Эдгээр тогтмолуудыг бодлогод орлуулбал:

$$C_y = C_1 x\Big(C_2 x^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{C_3}{x}\Big)^2 \cdot \Big[(C_4\frac{(x^2+1)^2}{x^3}\cdot\frac{1}{(C_2 x^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{C_3}{x})^2} +$$

$$+C_5\frac{1}{x(C_2x^{\frac{1}{\gamma-1}}+\frac{C_3}{x})}-C_6+C_7\Big] \quad \text{буюу}$$

$$C_y=C_y(x)=0.001758x\left(0.2474x^{\frac{1}{1.5}}+\frac{5.41666}{x}\right)^2$$

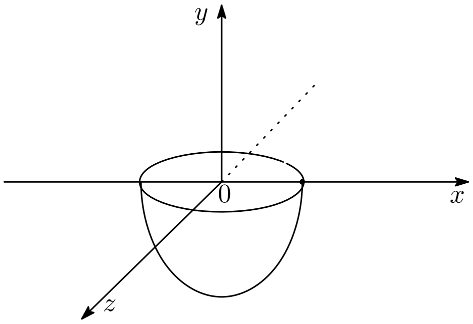
$$\Big[49.06124\cdot\frac{(x^2+1)^2}{x^3}\frac{1}{(0.2474x^{\frac{1}{1.5}}+\frac{5.41666}{x})^2}+$$

$$131.859\frac{1}{x(0.2474x^{\frac{1}{1.5}}+\frac{5.41666}{x})}-0.601\Big].$$

Энэ бодлогыг Днепропетровскийн политехникийн дээд сургууль анх тавьсан ба санамсаргүй хайлтын аргаар уг бодлогыг бодож орчны минимумын цэгийг олсон байдаг. Бид энэ бодлогыг тахир шугамын аргаар бодсон ба энэ нь анхны дөхөлтөөс хамаарахгүй нийлж бодлогын глобаль шийдийг олдог давуу талтай. Өөрөөр хэлбэл, локаль минимумын цэгүүдийг олохгүйгээр шууд глобаль минимумын цэгийг баталгаатай олно гэсэн үг.
Уг бодлогын шийд $x^*=2.3403$, $f(x^*)=293.056$ гэж гарсан. Өөрөөр хэлбэл 4 м гүнтэй 3м амсартай 1м гүн өргөнтэй шуудуу ухахын тулд газрын гүнээс $h=2.619$ зайд $h=2.3403$ хэмжээний үйлчилгээний зэрэгтэй цэнэгийг байрлуулахад зардал 293.056 гарна.

Одоо энэ бодлогыг өргөтгөж тухайн ээлхүүнтэй газрыг тэслэхэд үүсэх хувийн өртөгийг уг ээлэхүүнтэй пропорциональ гэж үзээд уг хувийн өртөгийг хамгийн бага байлгахаар параметрүүдийг оновчтой сонгох гэсэн бодлого авч үзье. Туршилтаар, тэсэлгээний дараах огтлолын шугамыг $y=f(x)=\frac{\bar{H}h}{(nh)^\gamma}x^\gamma-\bar{H}h, \quad h=\bar{H}h$ хэлбэртэй бичиж болдог.

Одоо бид XOY хавтгайд перпендукляр, O цэгийг дайрсан OZ тэнхлэг авч үзвэл огторгуйд тэгш өнцөгт координатын систем үүснэ. $y=f(x)$ шугамыг OY тэнхлэгийг тойруулан эргүүлж үүссэн эргэлтийн гадаргуугийн тэгшитгэлийг энэ координатын системд бичье.



Зураг 5.11

Огторгуйн координатын системд тэсэлгээний хөндлөн огтлолын шугамын тэгшитгэл нь

$$\begin{cases} x = [\frac{y+\bar{H}h}{\bar{H}h}(nh)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}} \\ z = 0 \end{cases}$$

Эргэлтээр үүсэх гадаргуугийн тэгшитгэл

$$x^2 + z^2 = \Big[\frac{y+\bar{H}h}{\bar{H}h}(nh)^\gamma\Big]^{\frac{2}{\gamma}} \Rightarrow y = \frac{(x^2+z^2)^{\frac{\gamma}{2}}\bar{H}h}{(nh)^\gamma} - \bar{H}h.$$

Эргэлтийн биеийн эзлэхүүн V-г бодьё.

$$V = |\iint\limits_D ydxdz| = |\iint\limits_D \frac{(x^2+z^2)^{\frac{\gamma}{2}}\bar{H}h}{(nh)^\gamma}dxdz - \iint\limits_D \bar{H}hdxdz|.$$

$\iint\limits_D (x^2+z^2)^{\frac{\gamma}{2}}dxdz$ давхар интегралыг туйлын координатын системд бодвол

$$\iint\limits_D (x^2+z^2)^{\frac{\gamma}{2}}dxdz = \begin{bmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \\ dxdz = \rho d\rho d\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{nh} \rho^{\gamma H} d\rho = \frac{2\pi(nh)^{\gamma+2}}{\gamma+2}, \qquad \iint\limits_D dxdz = \pi R^2 = \pi(nh)^2.$$

$$V=\iint\limits_D ydxdz=|\frac{\bar{H}h}{(nh)^\gamma}-\frac{2\pi(nh)^{\gamma+2}}{\gamma+2}-\bar{H}h\pi(nh)^2|=\pi\bar{H}h(nh)^2(1-\frac{2}{\gamma+2}),$$

$$V=\frac{\pi\bar{H}h^3n^2}{\gamma+2},\quad C=kV=\frac{k\pi\bar{H}n^2}{\gamma+2}\cdot h^3$$

Шүргэлцэх нөхцлийг бичиж эзлэхүүний томъёонд орлуулъя.
$h=\frac{\gamma(2mH_{np}+b)}{2n(\gamma-1)}\frac{1}{(\frac{n}{m\gamma\bar{H}})^{\frac{1}{\gamma-1}}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{m\bar{H}}{n}},\quad n=x.$

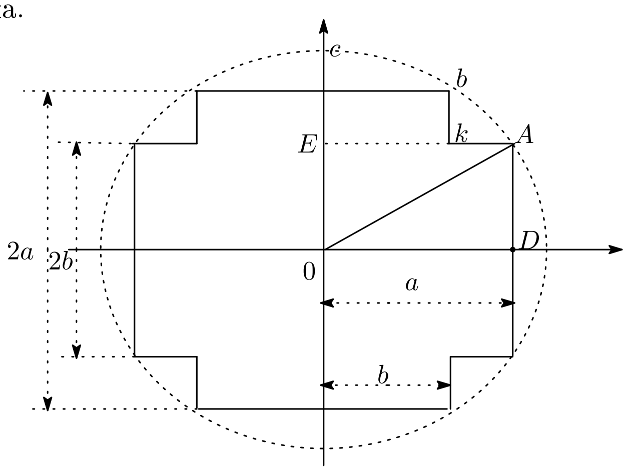
$$C=C(x)=|2.2677k-15.625\cdot(2.1)^3)|(8\cdot 3.375x)\left[\frac{1}{(0.1226x)^{\frac{1}{1.5}}+5.41/x}\right]^3\to$$
min,

$$2\leq x\leq 4$$

Энэ бодлогыг тахир шугамын аргаар бодвол бодлогын шийд $x^*=2.016651$, $C=k\cdot 0.207$

§5.5 Дүнзний оновчлолын бодлого

Энэ бодлого нь өгөгдсөн диаметртэй тойрогт багтсан бөгөөд зурагт үзүүлсэн хэлбэрийн хамгийн их талбайтай дүрсийг олсоноор дуусна.



Зураг 5.12

Тойргийн радиусыг r-гэе. Түүнд багтсан дүнзний талууд тэгш хэмтэй. $OD = OC = a, \quad AD = BC = b$.
a ба b гэсэн хэмжилтийн хоорондын харьцаа ямар байх үед дүнзний хөндлөн огтлолын талбай хамгийн их байх вэ? гэсэн бодлого авч үзье.
Дүнзний хөндлөн огтлолын хэсэг болох анхны квадратыг $ODAKBC$ гэсэн 6 өнцөгт төлөөлнө. Түүний талбайг бүх огтлолын дөрөвний нэг болох $ODAE$ ба $EKBC$ гэсэн тэгш өнцөгтүүдийн талбайн нийлбэрт тавина.
$ODAE$ тэгш өнцөгтийн талбай ab, $\quad EKBC$ тэгш өнцөгтийн талбай $b(a-b)$ болно. Нийт талбай нь $S = a \cdot b + b(a-b) = 2ab - b^2$.
ODA гэсэн гурвалжнаас a-г олвол $a = \sqrt{r^2 - b^2}$ болох ба дээрх томьёонд орлуулбал $S = 2b\sqrt{r^2 - b^2} - b^2$ болно. Бидний авч үзэж буй бодлогын математик томьёолол нь дараах хэлбэртэй болно.

$$S = S(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2} - x^2 \to \max, \qquad 0 \leq x \leq r.$$

Энэхүү бодлогын шийд $x^* = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}r}$ гэж олдоно.

$$S = -S(x) = -2x\sqrt{r^2 - x^2} + x^2 \to \min \quad 0 \leq x \leq r, \quad r = 1$$

гэж үзье. Дээрх бодлогыг программ хангамж ашиглан хагаслан хуваах, алтан огтлол, Фибаннечийн арга, параболын аргуудаар бодож харьцуулсан үр дүнг дараах хүснэгтэд байрлуулав.

f	хагаслан хуваах	алтан огтлол	Фибаначчийн арга	Параболын арга
N	11	15	8	7
t	0.27	0.27	0.21	0.20
M	23	18	17	11
$\hat{x}$	0.52563	0.52585	0.61825	0.5226
$f(\hat{x})$	0.618033	-0.618033	0.5896	0.6118

Ном зүй

1. Ф.П.Васильев, Численные методы решения экстремальных задач, Наука, Москва, 1987.

2. В.Г.Карманов, Математическое Программирование, Наука, 1986.

3. Charles Chapman Pugh, Real Mathematical Analysis, Springer, 2002.

4. Donald W.Katzner, Walrasian Microeconomics, New York, 1988.

5. Edward D.Gaughan, Introduction to Analysis, Brooks Core, 1997.

6. R.Enkhbat, Quasiconvex Programming, Ulaanbaatar, 2004.

7. R.Enkhbat, Global Optimization in Microeconomic Analysis, Working paper 2000-1, University of Massachusetts, pp. 27, 2000

8. R.Horst and Panos M.Pardalos(edit.,) Handbook of Global Optimization, Klumer Academic Publishers, 1995.

9. P.P.Narayanaswami, Herbert S.Gaskill, Elements of Real Analysis, Prentice Hall, 1997.

10. O.V.Vasiliev, Optimization Methods, World Federation Publishers, 1996.