ГАУССЫН САНАМСАРГҮЙ ПРОЦЕССЫН ДУНДАЖ УТГЫН ХАМГИЙН ИХ ҮНЭНИЙ ХУВЬ БҮХИЙ ҮНЭЛЭЛТЭНД ОЙРОЛЦОО ҮНЭЛЭЛТ

Ч.Зоригт [1] , О.Цэрэнбат [2] , Б.Чимэд-Очир [3]

[1] МУБИС, Математик Статистикийн Сургууль
И-мэйл: ch_zorigt@yahoo.com

[2] МУИС, Математик Компьютерийн Сургууль

[3] МУБИС, Математик Статистикийн Сургууль

Abstract

In this paper, we investigate problem to construct nearly estimation for maximum likelihood estimation of expectation value of gaussian random processes. Let $\xi(t),\ t\in[0,\ T]$ *gaussian random process with correlation function* $R(s,t)$ *and expectation*

$$a(t)=\sum_{r=1}^{N}\alpha_r\varphi_r(t)$$

where α_r *unknown coefficients,* $\varphi_r(t)$ *given functions. So maximum likelihood estimation is*

$$a^*(t)=\sum_{s,r=1}^{N}b_{\bar{s}r}\int_0^T p^{(s)}(\tau)\xi(\tau)d\tau\varphi_r(t),$$

where $p^{(s)}(\tau)$ *is solution of equation*

$$\int_0^T R(t,\tau)\,p^{(s)}(\tau)\,d\tau = \varphi_s(t). \quad 0 \le t \le T;\ s = \overline{1,\ N},$$

But to find $p^{(s)}(t)$ *is not easy for practice.*

Theorem. *Let* $R(t,\tau)$ *symmetrical, summable, positively defined kernel. Then* $\{p_n^{(s)}(t)\}$ *sequence of functions converges to solution of equation.*

$$p_n^{(s)}(t) = p_{n-1}^{(s)}(t) + \lambda\left[\varphi_s(t) - \int_0^T R(t,\tau)\,p_{n-1}^{(s)}(\tau)\,d\tau\right],$$

where

$$p_0^{(s)}(t) \in L_2[a,b]$$

$$0 < \lambda < 2\lambda_1,$$

and λ_1 *is minimal eigenvalue of kernel* $R(t,\tau)$.

1. Санамсаргүй процессын дундаж утгын хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

$\xi(t)$ нь $R(s,t)$ корреляцын функцтэй

$$a(t) = \sum_{r=1}^{N} \alpha_r \varphi_r(t) \qquad (1)$$

дундажтай гауссын санамсаргүй процесс байг. Энд α_r нь үл мэдэгдэх коэффициентүүд, $\varphi_r(t)$ - мэдэгдэж буй функцүүд.

Корреляцын функц $R(s,t)$ нь мэдэгдэж байна гэж үзээд дундаж утга $a(t)$ - г уг процессын ганц биелэлийг ажигласнаар үнэлье. Эхлээд $\xi(t)$ - ийн биелэл нь $t_1, t_2, \dots, t_n$ цэгүүд дээр ажиглагдсан тохиолдлыг сонирхоё. Энэ үед уг бодлого нь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ параметрыг $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ гэсэн санамсаргүй векторыг ажигласны үндсэн дээр үнэлэх асуудал болж байна. Энд $\xi_i = \xi(t_i), \quad i = \overline{1,\ n}.$

Эдгээр нь Гауссын санамсаргүй хэмжигдхүүнүүд болох бөгөөд α_r гэсэн параметрын өгөгдсөн утганд хамтын тархалтын нягт нь

$$f(\xi/\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\,|K|}} \exp\left\{-\frac{1}{2|K|}\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\eta_i\eta_j\right\}$$

болно. Энд $|K|$ нь ξ векторын корреляцын матриц, K_{ij} нь $r_{ij} = r(t_i, t_j)$ элементийн алгебрын гүйцээлт.

$$\eta_i = \xi_i - \sum_{r=1}^{N} \alpha_r \varphi_r(t_i).$$

$$\frac{\partial \ln f(\xi/\alpha)}{\partial \alpha_s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(\xi/\alpha)}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \alpha_s} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2|K|} \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\eta_j - \frac{1}{2|K|} \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\eta_j \right)(-\varphi_s(t_i)) =$$

$$= \frac{1}{|K|} \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\eta_j \varphi_s(t_i), \quad s = \overline{1, N}$$

η_j - ийн оронд зохих илэрхийллийг тавьж тэгтэй тэнцүүлбэл

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{K_{ij}}{|K|} \left(\xi(t_j) - \sum_{r=1}^{N} \alpha_r \varphi_r(t_j) \right) \varphi_s(t_i) = 0, \quad s = \overline{1, N}, \quad (2)$$

систем тэгшитгэл гарна. Энэ системийг бодож хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийг олно. Дараах тэмдэглэгээг оруулъя.

$$p_j^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_{ij}}{|K|} \varphi_s(t_i), \quad (j = \overline{1, n}; s = \overline{1, N}), \quad (3)$$

$$b_{sr} = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(s)} \varphi_r(t_j), \quad (s, r = \overline{1, N}), \quad (4)$$

Тэгвэл (2) систем нь

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^{(s)} \xi(t_j) = \sum_{r=1}^{N} \alpha_r b_{sr}, \quad (s = \overline{1, N}), \quad (5)$$

болно. $\frac{K_{ij}}{|K|}$ нь ξ - ийн корреляцын матрицын урвуу матрицын элемент болохыг анхаарвал (3)- аас $p_j^{(s)}$ нь

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j^{(s)} = \varphi_s(t_i), \quad (i = \overline{1, n}; s = \overline{1, N}), \quad (6)$$

тэгшитгэлийг хангах нь харагдаж байна. (4),(6) ёсоор

$$b_{rs} = b_{sr} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_i^{(r)} p_j^{(s)}, \quad (7)$$

болж $\left\| b_{rs} \right\|$ матриц нь тэгш хэмтэй байна. Энэ матрицын урвуу матрицын элементийг $b_{\bar{r}s}$ гэж тэмдэглээд (5) систем тэгшитгэлийг бодвол

$$\alpha_r^* = \sum_{s=1}^{N} b_{\bar{r}s} \sum_{j=1}^{N} p_j^{(s)} \xi(t_j)$$

болно. Үүнийг (1)-д орлуулбал $a(t)$ - ийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт нь

$$a^*(t) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} b_{\bar{r}s} \sum_{j=1}^{n} p_j^{(s)} \xi(t_j) \varphi_r(t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t) \xi(t_j), \quad (8)$$

болно. Үүнд

$$p_j(t) = \sum_{s=1}^{N} p_j^{(s)} \lambda_s(t), \quad (j = \overline{1, n}), \quad (9)$$

$$\lambda_s(t) = \sum_{r=1}^{N} b_{\bar{r}s} \varphi_r(t), \quad (s = \overline{1, N}), \quad (10)$$

Хэрэв (4),(9) томъёонуудыг тооцвол

$$Ma^*(t) = \sum_{j=1}^{N} p_j(t) M\xi(t_j) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t) \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \varphi_l(t_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{N} \lambda_s(t) p_j^{(s)} \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \varphi_l(t_j) = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \sum_{s=1}^{N} \lambda_s(t) \sum_{j=1}^{n} p_j^{(s)} \varphi_l(t_j) =$$

$$= \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \sum_{s=1}^{N} \lambda_s(t) b_{sl} = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \varphi_l(t) = a(t)$$

гэдгээс (8) үнэлэлт нь хазайлтгүй үнэлэлт болно. Энэ үнэлэлтийн дисперсийг бодъё.

$$Da^*(t) = D\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\xi(t_j) = M\left[\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\xi(t_j) - \sum_{j=1}^{n} p_j(t) M\xi(t_j)\right]^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} p_j(t) p_i(t) M[\xi(t_i) - M\xi(t_i)][\xi(t_j) - M\xi(t_j)] = \sum_{i,j=1}^{n} p_j(t) p_i(t) r_{ij}$$

(4),(6),(9),(10) томъёонууд ёсоор

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_i(t) p_j(t) r_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} p_i(t) \sum_{s=1}^{N} \lambda_s(t) p_j^{(s)} r_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) p_j(t) r_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p_i(t) \sum_{s=1}^{N} \lambda_s(t) \varphi_s(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{N} \lambda_l(t) p_i^{(l)} \sum_{s=1}^{N} \lambda_s(t) \varphi_s(t_i) =$$

$$= \sum_{s,l=1}^{N} \lambda_l(t)\lambda_s(t)\sum_{i=1}^{n} p_i^{(l)}\varphi_s(t_i) = \sum_{s,l=1}^{N} \lambda_s(t)\lambda_l(t) b_{sl} =$$

$$= \sum_{l,s=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} b_{\bar{r}l}\varphi_r(t)\sum_{j=1}^{N} b_{\bar{j}s}\varphi_j(t) b_{ls} = \sum_{l,r=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} b_{\bar{r}l}\varphi_r(t)\varphi_j(t)\sum_{s=1}^{N} b_{\bar{j}s} b_{ls} =$$

$$= \sum_{l,r=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} b_{\bar{r}l}\varphi_r(t)\varphi_j(t)\delta_{jl} = \sum_{l,r=1}^{N} b_{\bar{r}l}\varphi_r(t)\varphi_l(t)$$

Ийнхүү

$$Da^{*}(t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} b_{\bar{i}j}\varphi_i(t)\varphi_j(t) \qquad (11)$$

болов.

$\xi(t)$ процессын биелэл нь $[0,\ T]$ завсрын бүх цэгүүд дээр ажиглагдсан үед - ийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийг дараах маягаар олж болно. $[0,\ T]$ завсрыг $t_1 = 0, \ldots, t_n = T$ цэгүүдээр хувааж

$$p_l(t) = p(t, t_l)\Delta t_l, \quad p_l^{(s)} = p^{(s)}(t_l)\Delta t_l$$

гэж тэмдэглэе. Энэ үед (6) томъёо нь

$$\sum_{j=1}^{n} r(t, t_j)\, p^{(s)}(t_j)\Delta t_j = \varphi_s(t), \quad t \in [0,\ T], \quad (s = \overline{1,\ N})$$

хэлбэртэй болно. $\max\ [t_i, t_j]$ нь тэг рүү тэмүүлж байхаар хуваалтын тоог төгсгөлгүй ихэсгэвэл дээрх томъёо нь

$$\int_0^T R(t,\tau)\, p^{(s)}(\tau)\, d\tau = \varphi_s(t), \quad 0 \le t \le T;\ s = \overline{1,\ N}, \qquad (12)$$

болно. Үүнтэй яг адилаар

$$b_{rs} = b_{sr} = \int_0^T p^{(s)}(t)\varphi_r(t)\,dt, \quad (r, s = \overline{1,\ N}), \ (13)$$

$$a^{*}(t) = \int_0^T p(t,\tau)\xi(\tau)\,d\tau$$

болохыг үзүүлж болно. Дээрх тэмдэглэл ёсоор

$$p(t,\tau) = \sum_{s=1}^{N} \lambda_s(t)\, p^{(s)}(\tau)$$

болох бөгөөд үүнийг анхаарвал

$$a^{*}(t) = \sum_{s=1}^{N} \lambda_s(t)\int_0^T p^{(s)}(\tau)\xi(\tau)\,d\tau$$

болно. Эцэст нь (9) ёсоор $a(t)$ - ийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт нь

$$a^*(t) = \sum_{s,r=1}^{N} b_{\bar{s}r} \int_0^T p^{(s)}(\tau)\xi(\tau)d\tau\varphi_r(t), \qquad (14)$$

болов.

2. Гауссын процессын дундаж утгын хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт рүү дөхөх

(12),(13),(14) томъёонуудаас авч үзвэл (14) үнэлэлтийг байгуулахад $p^{(s)}(t)$ - г олоход хангалттай байна. Гэтэл $p^{(s)}(t)$ нь (12) гэсэн интеграл тэгшитгэлийн шийд болох ба үүнийг бодох нь практикийн хувьд хялбар биш байдаг.

Теорем. $R(t,\tau)$ *нь квадратаараа нийлбэрчлэгддэг, эерэг тодорхойлогдсон, симметр цөм байг. Тэгвэл дараах реккурент харьцаагаар тодорхойлогдох* $\{p_n^{(s)}(t)\}$ *функцүүдийн дараалал (12) тэгшитгэлийн шийд рүү дунджаар нийлнэ.*

$$p_n^{(s)}(t) = p_{n-1}^{(s)}(t) + \lambda\left[\varphi_s(t) - \int_0^T R(t,\tau)p_{n-1}^{(s)}(\tau)d\tau\right], \quad (15)$$

энд

$$p_0^{(s)}(t) \in L_2[a,b]$$

$$0 < \lambda < 2\lambda_1, \quad (16)$$

бөгөөд λ_1 нь $R(t,\tau)$ цөмийн хамгийн бага хувийн утга.

Баталгаа. (15) тэгшитгэлд

$$p_n^{(s)}(t) = p^{(s)}(t) + u_n^{(s)}(t)$$

гэж авбал

$$u_n^{(s)}(t) = u_{n-1}^{(s)}(t) + \lambda\int_0^T R(t,\tau)u_{n-1}^{(s)}(\tau)d\tau, \qquad (17)$$

хэлбэртэй болно. (17) тэгшитгэлийн хоёр талыг $v_i(t)$ хувийн функцүүдээр үржүүлж интегралчилбал

$$\alpha_i^n = \alpha_i^{n-1} - \lambda\int_0^T v_i(t)dt\int_0^T R(t,\tau)u_{n-1}^{(s)}(\tau)d\tau, \quad (18)$$

энд

$$\alpha_i^n = \int_0^T u_n^{(s)}(t)v_i(t)dt.$$

$R(t,\tau)$ симметр цөм гэдгээс

$$v_i(t) = \lambda_i\int_0^T R(t,\tau)v_i(\tau)d\tau$$

бөгөөд

$$\int_0^T v_i(t)\,dt \int_0^T R(t,\tau)u_{n-1}^{(s)}(\tau)\,d\tau = \frac{\alpha_i^{n-1}}{\lambda_i}.$$

Эндээс (18) нь дараах хэлбэртэй болно.

$$\alpha_i^n = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\alpha_i^{n-1} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^n \alpha_i^0.$$

Одоо

$$\int_0^T (u_n^{(s)}(t))^2\,dt = \int_0^T [p_n^{(s)}(t) - p^{(s)}(t)]^2\,dt$$

интеграл авч үзье. $\{v_i(t)\}$ функцүүд нь гүйцэд систем учраас

$$\int_0^T (u_n^{(s)}(t))^2\,dt = \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^n)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{2n}(\alpha_i^0)^2.$$

болно. Тэгвэл (16) тэнцэтгэл бишээс

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^2 \le 1,$$

бөгөөд дурын $\varepsilon > 0$ тооны хувьд түүнээс хамаарсан $N = N(\varepsilon)$ дугаар олдоод түүнээс цааших $n > N(\varepsilon)$ дугааруудын хувьд

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^n)^2 < \varepsilon$$

байна. Эндээс

$$\int_0^T (u_n^{(s)}(t))^2\,dt = \int_0^T [p_n^{(s)}(t) - p^{(s)}(t)]^2\,dt < \varepsilon$$

болж теорем батлагдлаа. ө.х. $\{p_n^{(s)}(t)\}$ дараалал $\{p^{(s)}(t)\}$ функц рүү дунджаар нийлнэ.

Ном зүй

[1] Гаек Я., *Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса*, Чех.мат.журнал Т.8/83/ вып. 4. 1958.
[2] Гнеденко Б.В., *Курс теории вероятностей.*, М. Наука 1988.
[3] Зоригт Ч, Чимэд-Очир Б, Цэрэнбат О., *Гауссын процессын корреляцийн функцийн тухай таамаглал шалгах ойролцоо шинжүүр*, МУИС, Улаанбаатар Сургуулийн эрдэм шинжилгээний бичиг, УБ, дугаар 6, хуудас 129-132, 2010
[4] Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А., *Гауссовские случайные процессы*, М. Наука 2001.
[5] Краснов М.Л., *Интегральные уравнения*, Наука, 1975.
[6] Розанов Ю.А., *Бесконечномерные гауссовские распределения*, Труды математического института, М, Наука, 1968.
[7] Lipster R.S, Shiryaev A.N., *Statistics of Random Processes*, Springer, 2001