Квазивыпуклое программирование

Р.Энхбат

Монгольский Государственный Университет

Абстракт

Эта статья посвящена проблемам максимизации и минимизации квазивыпуклой функции на произвольном множестве. В работе мы сформулировали условия глобальной оптимальности для этих задач и показано их применение.

1 Введение

Рассмотрим две задачи максимизации и минимизации квазивыпуклой функции на произвольном множестве $D \subset R^n$:

$$f(x) \longrightarrow \max, \quad x \in D, \tag{1.1}$$

$$f(x) \longrightarrow \min, \quad x \in D. \tag{1.2}$$

Задачи (1.1) и (1.2) имеют важные применения в экономике и технологии. Квазивыпуклая функция как обобщение выпуклой функции часто появляется в экономических литературах. В работах [1, 4–6, 17, 20, 23, 25, 31] рассмотрены задачи оптимизации в микроэкономике. Особенно выпуклость играет важную роль в экономической теории. Например, классическая теория предпологает вогнутой производственной функции и функции полезности. А также функция спроса, полученная как решение задачи максимизации функции полезности на бюджетном ограничении, является выпуклой функцией. В зависимости от экономических условиях, рынков, а также предпочтения потребителей решается задача максимизации или минимизации квазивыпуклой функции.

Так называемая задача мультипликативного программирования $[2, 8, 19]$ может быть сведена к задаче квазивогнутой минимизации $[2, 8]$:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{p} f_i \;\longrightarrow\; \min, \quad x \in D, \tag{1.3}$$

где $f_i : R^n \to R$ выпуклые функции, $i = 1, 2, ..., p$ $(p \geq 2)$, D выпуклый компакт на R^n, и $f_i(x) \geq 0$ для любых $x \in D$ и $j = 1, 2, ..., p$.

А также задача D.C. программирования (разность двух выпуклых функции) [16]:

$$\begin{aligned} & g(x) = g_1(x) - g_2(x) \longrightarrow \min \\ & \text{subject to} \;\; h_i(x) \leq 0, \; i = 1, 2, ..., m, \end{aligned} \tag{1.4}$$

формулуется как задача квазивыпуклой минимизации, где g_1, g_2 и h_i $(i = 1, 2, ..., m)$ выпуклые функции на R^n.

В общем случае обе задачи (1.1) и (1.2) являются многоэкстремальными. Задача максимизации выпуклой функции или вогнутого программирования является частным случаем задачи (1.1) когда f выпуклый и D многогранник. Для решения этой задачи существуют методы основанные на отсечениях и методе ветвей и границ $[3, 11{-}16, 21, 22, 29, 30]$. Условия глобальной оптимальности для вогнутого программирования получены впервые А.Стрекаловскими в 1987 $[27, 28]$. Первая попытка построить численный алгоритм основанный на этих условиях была предпринята в [7]. Другие условия глобальной оптимальности использующие $\epsilon-$ субдифференциалы получены в [9]. С другой стороны, задача минимизации квазивыпуклой функции на выпуклом множестве рассматривалась Канторовичем [18]. Как известно, классические условия оптимальности и алгоритмы являются невсегда успешными для невыпуклой задачи оптимизации в смысле нахождения глобального решение. Даже не существуют универсальных методов и алгоритмов для решения задачи глобальной оптимизации. В связи с этим глобальная оптимизация требует других теорий и методов основанных на условиях глобальной оптимальности. Существующие глобальные методы и алгоритмы разработаны для задач специальных видов. Целью этой работы является получение условия глобальной оптимальности для задач (1.1) и (1.2), и показать их применение.

2 КВАЗИВЫПУКЛАЯ МАКСИМИЗАЦИЯ

2.1 Свойства квазивыпуклой функции

Рассмотрим определение и известные свойства квазивыпуклой функции.

Определение 2.1 Функция $f: R^n \to R$ называется квазивыпуклой если неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

выполняется для всех $x, y \in R^n$ and $\alpha \in [0,1]$.

Очевидно, что любая выпуклая функция является квазивыпуклой, но обратное утверждение не всегда выполняется. Если f квазивыпуклая то $-f$ называется квазивогнутой.

Лемм 2.1 Функция $f: R^n \to R$ квазивыпукла тогда и толька тогда, когда множество

$$L_c(f) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq c\}$$

выпукло для всех $c \in R$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $c \in R$ есть произвольное число и $x, y \in L_c(f)$. Тогда по определению квазивыпуклой функции мы имеем

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq c \quad \text{для всех } \alpha \in [0,1],$$

Отсюда заключаем, что $L_c(f)$ выпукло.

Достаточность. Пусть $L_c(f)$ выпуклое множество для всех $c \in R$. Для произвольных $x, y \in R^n$, определим $c^o = \max\{f(x), f(y)\}$. Тогда $x \in L_{c^o}(f)$ и $y \in L_{c^o}(f)$. Следовательно , $\alpha x + (1-\alpha y) \in L_{c^o}(f)$, для всех $\alpha \in [0,1]$. Лемма доказана. ■

Лемма 2.2 Пусть $f: \ R^n \to R$ дифференцуемая и квазивыпуклая функция. Тогда из неравенства $f(x) \leq f(y)$ для всех $x, y \in R^n$ вытекает

$$\langle f'(y), x-y \rangle \leq 0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение двух векторов.

Доказательство. Так как f квазивыпукло,мы имеем

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} = f(y)$$

для всех $\alpha \in [0,1]$ и $x, y \in R^n$ таких что $f(x) \leq f(y)$. Разлагаем функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки y :

$$f(y + \alpha(x-y)) - f(y) = \alpha \left(\langle f'(y), x-y \rangle + \frac{o(\alpha\|x-y\|)}{\alpha} \right) \leq 0, \quad \alpha > 0.$$

Учытивая, что $\frac{o(\alpha\|x-y\|)}{\alpha} \overset{\alpha \to o}{\longrightarrow} 0$, мы получаем $\langle f'(y), x-y \rangle \leq 0$ что и требовалось доказать. ■

2.2 Условия глобальной максимизации

Рассмотрим задачу максимизации квазивыпуклой функции

$$f(x) \ \longrightarrow \ \max, \quad x \in D, \tag{2.1}$$

где $f: R^n \to R$ дифференцуемая и квазивыпуклая функция и $D \subset R^n$ произвольное непустое множества R^n. Условие глобальной оптимальности для задачи формулируется следующим образом:

Теорема 2.1 Пусть z решение задачи (2.1), и

$$E_c(f) = \{y \in R^n \mid f(y) = c\}.$$

Тогда

$$\langle f'(y), x - y\rangle \leq 0 \text{ для всех} y \in E_{f(z)}(f) \text{ и } x \in D. \tag{2.2}$$

Если, дополнително, $f'(y) \neq 0$ для всех $y \in E_{f(z)}(f)$, тогда условие (2.2) является достаточным для того, чтобы точка $z \in D$ была решением задачи (2.1).

Доказательство. Необходимость. Предположим, что z является решением задачи (2.1) и $y \in E_{f(z)}(f)$ и $x \in D$. Тогда очевидно $f(x) \leq f(y)$. Применяя результат леммы 2.2, получаем $\langle f'(y), x - y\rangle \leq 0$.

Достаточность. Предположим от противного. Пусть z не является решением задачи (2.1); то есть существует точка $u \in D$ такая , что $f(u) > f(z)$. В силу леммы 2.1, замкнутое множество $L_{f(z)}(f) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq f(z)\}$ выпукло. Пусть y проекция точки u на $L_{f(z)}(f)$ такая, что

$$\|y - u\| = \min_{x \in L_{f(z)}(f)} \|x - u\|.$$

Ясно, что

$$\|y - u\| > 0 \tag{2.3}$$

так как $u \notin L_{f(z)}(f)$. Более того, точка y можеть рассматриваться как решение следующей задачи выпуклого программирования:

$$g(x) = \frac{1}{2}\|x - u\|^2 \longrightarrow \min, \quad x \in L_{f(z)}(f).$$

Запишем условия оптимальности в точке y:

$$\begin{cases} \lambda_o \geq 0,\ \lambda \geq 0,\ \lambda_o + \lambda > 0 \\ \lambda_o g'(y) + \lambda f'(y) = 0 \\ \lambda(f(y) - f(z)) = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Если $\lambda_o = 0$, тогда из (2.4) вытекает, что $\lambda > 0, f(y) = f(z)$ и $f'(y) = 0$ которое противоречит условию теоремы. Если $\lambda = 0$, мы имеем $\lambda_o > 0$ и $g'(y) = y - u = 0$. Последнее тоже противоречит условию (2.3). Тогда не нарушая общности, мы можем положить $\lambda_o = 1$ и $\lambda > 0$ в (2.4).

$$y - u + \lambda f'(y) = 0, \quad \lambda > 0,$$
$$f(y) = f(z).$$

Отсюда заключаем $\langle f'(y), u - y\rangle > 0$, которое противоречит (2.2). Теорема доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ **1**. Если $f(x)$ выпуклая, тогда условия глобальной оптимальности получены в [27] как:

Теорема 2.2 ([27]). Пусть D произвольное множество и точка $z \in D$ удовлетворяет условию

$$-\infty < \inf_{R^n} f < f(z) < +\infty$$

и $L_{f(z)}(f) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq f(z)\} \subset intdom\ f$ компакт. Тогда z является глобальным решением задачи (1.1) тогда и толька тогда, когда

$$\langle c, x - z\rangle \leq 0 \text{ для всех } x \in \overline{conv}\ D \text{ и } c \in \partial f(z),$$
$$\langle v, x - z\rangle \leq 1 \text{ для всех } x \in \overline{conv}\ D \text{ и } v \in S(f, z), \tag{2.5}$$

где

$$
\begin{aligned}
S(f,z) &= \left\{ v \in R^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists y \in R^n:\ y \neq z,\ y \in E_{f(z)}(f), \\ \exists \alpha > 0:\ \alpha v \in \partial f(y),\ \langle v, y-z \rangle = 1. \end{array} \right\}, \\
\partial f(z) &= \{c \in R^n \mid f(x) - f(z) \geq \langle c, x-z \rangle, \quad x \in R^n\}, \\
intdom\ f &= \{x \in R^n \mid f(x) < +\infty\},
\end{aligned}
$$

Здесь $\overline{conv}\ D$ замкнутая выпуклая оболочка множества D.

Если f дифференцуемая тогда нетрудно убедиться что условие(2.2) для задачи (2.1) эквивалентно условию (2.5).

ЗАМЕЧАНИЕ **2**. Условие (2.5)дополнено следующей теоремой.

Теорема 2.3 ([10]). Предположим, что f выпукла и D выпуклый замкнутый. Пусть точка $z \in D$ удовлетворяет условию $-\infty \leq \inf\limits_D f < f(z)$. Тогда z является глобальным решением задачи (1.1) тогда и толька тогда, когда

$$\partial f(x) \subset N(x|D) \text{ выполняется для всех } x \in D \text{ и } x \in E_{f(z)}(f),$$

где $N(x|D)$ нормальный конус к множеству D в точке x :

$$N(x|D) = \{c \in R^n \mid \langle c, y-x \rangle \leq 0, \quad y \in D\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ **3**. Если D выпукло, тогда пологая $y = z$ мы из (2.2) получаем хорошо известные условия локальной оптимальности [24] :

$$\langle f'(z), x-z \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D.$$

ЗАМЕЧАНИЕ **4**. Для того чтобы утверждать точка z' в D не является решением задачи достаточно найти пару $x, y \in R^n$ такую, что

$$\langle f'(y), x-y \rangle > 0, \quad f(y) = f(z'), \quad x \in D.$$

Пример 2.1

$$f(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2 - 1} \ ,$$
$$D = \{x \in R^2 \mid 0.6 \le x_1 \le 7; \ 0.6 \le x_2 \le 2\}.$$

Мы легко вычисляем градиент функции:

$$f'(x) = \left(\frac{x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - x_2^2}{(x_1 + x_2 - 1)^2} \ , \ \frac{x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2 - x_1^2}{(x_1 + x_2 - 1)^2} \right).$$

Очевидно, что точка $x^o = (0.6, 0.6) \in D$ есть локальное решение. Рассмотрим точки $u = (5, 2) \in D$ и $y = (3, 3)$ удовлетворяющие условию $f(y) = f(x^o) = 3.6$. Тогда имеем $\langle f'(y), u - y \rangle = \frac{12}{25} > 0$. Отсюда заключаем, что точка x^o не является глобальным решением. На самом деле, глобальное решение есть точка $x^* = (7, 0.6)$.

Пример 2.2 Рассмотрим задачу D.C программирования

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x) \longrightarrow \ \max$$
$$\text{где } x \text{ удовлетворяет условию } h_i(x) \le 0, \ i = 1, 2, ..., m,$$

где g_1, g_2 и $h_i, \ i = 1, 2, ..., m$ выпуклые дифференцуемые функции в R^n. Эту задачу нетрудно свести к следуюшей задаче квазивыпуклой максимизации:

$$-g(x) = g_2(x) - g_1(x) \longrightarrow \ \min$$
$$h_i(x) \le 0, \ i = 1, 2, ..., m,$$

Тогда условия глобальной оптимальности записываются как

$$g_1(x) - x_{n+1} \longrightarrow \ \max$$
$$g_2(x) \le x_{n+1}, \ h_i(x) \le 0, \ i = 1, 2, ..., m,$$

где $(x, x_{n+1}) \in R^n \times R$. Используя (2.2), мы получаем

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1(y)}{\partial x_i}(x_i - y_i) + y_{n+1} - x_{n+1} \le 0 \\ g_1(y) - y_{n+1} = g_1(z) \\ g_2(x) \le x_{n+1} \\ h_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Пример 2.3 Рассмотрим задачу дробного программирования

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \longrightarrow \max, \quad x \in D,$$

где f_1 выпуклая дифференцуемая , и f_2 вогнутая дифференцуемая функции на R^n.

$$f_1(x) > 0, \quad f_2(x) > 0 \text{ для всех } x \in D \subset B.$$

Используя лемму 2.1, легко можно показать что $f(x)$ квазивыпуклая функция. Следовательно, условие глобальной оптимальности (2.2) можно записать в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1(y)}{\partial x_i} f_2(y) - \frac{\partial f_2(y)}{\partial x_i} f_1(y) \right) \frac{(x_i - y_i)}{f_2^2(y)} \le 0 \text{ для всех } y \in E_{f(z)}(f) \text{ и } x \in D.$$

3 КВАЗИВЫПУКЛАЯ МИНИМИЗАЦИЯ

3.1 Условия глобальной минимизации

Рассмотрим задачу минимизации квазивыпуклой функции:

$$f(x) \longrightarrow \min, \quad x \in D, \tag{3.1}$$

где $f : R^n \to R$ непрерывная дифференцуемая квазивыпуклая функция и $D \subset R^n$ произвольное непустое множество. Условия глобальной оптимальности для задачи (3.1.)даются следующей теоремой.

Теорема 3.1 Если z является решением задачи (3.1). То

$$\langle f'(x), x-y\rangle \geq 0 \text{ для всех} y \in E_{f(z)}(f) \text{ и } x \in D, \tag{3.2}$$

где $E_c(f) = \{y \in R^n \mid f(y) = c\}$. Если, дополнительно

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty \text{ и } f'(x + \alpha f'(x)) \neq 0 \tag{3.3}$$

для всех $x \in D$ и $\alpha \geq 0$, тогда условие (3.2) является достаточным.

Доказательство. Необходимость. Пусть z решение задачи (3.1). Возьмём $x \in D$ и $y \in E_{f(z)}(f)$. Тогда мы имеем $0 \geq f(z) - f(x) = f(y) - f(x)$. В силу леммы 2.2, получаем $\langle f'(x), x-y\rangle \geq 0$.

Достаточность. Предположим от противного. Пусть точка z не является решением задачи (3.1). Тогда существует точка $u \in D$ такая , что $f(u) > f(z)$. Построим луч y_α для $\alpha > 0$ как

$$y_\alpha = u + \alpha f'(u).$$

Покажем, что $f(y_\alpha) > f(u)$ для всех α. По формуле Тейлора мы имеем

$$f(u + \alpha f'(u)) - f(u) = \alpha \left(\|f'(u)\|^2 + \frac{o(\alpha\|f'(u)\|)}{\alpha} \right)$$

для всех $\alpha > 0$, $\lim\limits_{\alpha\to\ 0+} \frac{o(\alpha\|f'(u)\|)}{\alpha}$=0. Отсюда существует $\alpha_o > 0$,такой что $f(y_\alpha) - f(u) > 0$ выполнены для всех $\alpha \in (0, \alpha_o)$. Так как $f'(u) \neq 0$, $f'(u + \alpha_o f'(u)) \neq 0$ в силу леммы (2.2.), мы имеем $\langle f'(u + \alpha_o f'(u)), f'(u)\rangle \geq 0$. Заметим, что для всех $\gamma > 1$, а также $f(u+\gamma\alpha_o f'(u)) > f(u+\alpha_o f'(u))$ выполняется. В противном случае, мы имеем $f(u + \gamma\alpha_o f'(u)) \leq f(u + \alpha_o f'(u))$, следовательно по Лемме 2.2, $\langle f'(u + \alpha_o f'(u)), \alpha_o(\gamma - 1)f'(u)\rangle \leq 0$, или $\gamma \leq 1$ которое противоречит $\gamma > 1$. Более того можно показать, что функция $f(u+\gamma\alpha_o f'(u))$ является возрастающей относительно аргумента $\gamma > 0$. Действительно, если $f(u + \gamma'\alpha_o f'(u)) < f(u + \gamma\alpha_o f'(u))$ выполняется для $\gamma' > \gamma$, тогда $\alpha_o(\gamma' - \gamma)\langle f'(u + \gamma\alpha_o f'(u)), f'(u)\rangle \leq 0$, которое противоречит условию $\gamma' > \gamma$. Следовательно, $f(y_\alpha) > f(u)$ выполняется для всех $\alpha > 0$.

Очевидно, что функция $\varphi : R^+ \to R$ определенная как

$$\varphi(\alpha) = f(y_\alpha)$$

непрерывна на $[0, \infty)$. В силу условия (3.3), $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \varphi(\alpha) = +\infty.$, Следовательно существует $\hat{\alpha}$ такой, что $\varphi(\hat{\alpha}) > f(z)$. Используя непрерывность функции $\varphi(\alpha)$ и неравенства $\varphi(\hat{\alpha}) > f(z) > f(u)$, будем заключать, что существует $\bar{\alpha}$ такой, что

$$f(y + \bar{\alpha} f'(u)) = f(z),$$

которое означает $y_{\bar{\alpha}} \in E_{f(z)}(f)$. С другой стороны, мы имеем $f'(u) = \frac{1}{\bar{\alpha}}(y_{\bar{\alpha}} - u)$. Таким образом получаем

$$\langle f'(u), u - y_{\bar{\alpha}} \rangle = \frac{1}{\bar{\alpha}} \langle y_{\bar{\alpha}} - u, u - y_{\bar{\alpha}} \rangle = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \|y_{\bar{\alpha}} - y\|^2 < 0,$$

которое противоречит (3.2). Отсюда следует, что z есть глобальное решение (3.1). ■

ЗАМЕЧАНИЕ **1**. Если D выпукло, условия глобальной оптимальности впервые сформулированы Л.В. Канторовичом в следующем утверждении.

Теорема 3.2 ([18]). Точка $z \in D$ есть решение задачи (1.2) тогда и толька тогда, когда существует $c \in R^n$ такой, что

$$\langle c, x \rangle \le \langle c, z \rangle \quad \text{для всех } x \in D,$$

$$\langle c, x \rangle \ge \langle c, z \rangle \quad \text{для всех } x \in R^n \text{ такой что } f(x) \le f(z).$$

ЗАМЕЧАНИЕ **2**. Для того, чтобы утверждать, что $z \in D$ не является решением задачи (3.1), достаточно найти пару $u, y \in R^n$ такую, что $\langle f'(u), u - y \rangle < 0, f(y) = f(z)$ и $u \in D$.

Пример 3.1 Рассмотрим задачу:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \longrightarrow \min,$$

где

$$D = \{x \in R^2 : \ 5x_1^2 + 2x_2 + 3x_1 \le 16, \quad x_1^2 + x_2 \ge 5\}.$$

Классическое условие оптимальности дают трое стпционарных точек. $z^o = (1,4)$, $z^1 = (0,5)$ и $z^2 = (-2,1)$. Чтобы проверить точку z^o на глобальную оптимальность, рассмотрим точки $u = (-1,4) \in D$ и $y = (0, \sqrt{17})$ удовлетворяющее $f(y) = f(z^o) = 17$. Вычисляя $\langle f'(u), u-y \rangle$ мы имеем $\langle f'(u), u-y \rangle = 2(16 - 4\sqrt{17}) < 0$. Следовательно, z^o неявляется глобальным решением. Нетрудно убедиться, что z^2 есть глобальное решение с $f(z^2) = 5$.

Пример 3.2 Рассмотрим задачу D.C. программирования (1.4). Пусть g_1 и g_2 выпуклые функции. Тогда эта задача легко сводится к следующей задаче минимизации выпуклой функции на невыпуклом множестве и условия оптимальности будут:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1(y)}{\partial x_i}(x_i - y_i) + y_{n+1} - x_{n+1} \ge 0 \\ g_1(y) - y_{n+1} = g_1(z) \\ g_2(x) \ge x_{n+1} \\ h_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Пример 3.3 Рассмотрим задачу дробного программирования

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \longrightarrow \min, \quad x \in D, \qquad (3.4)$$

где f_1 выпуклая дифференцуемая , и f_2 вогнутая дифференцуемая функции на R^n. Предположим, что

$$f_1(x) > 0, \quad f_2(x) > 0 \text{ для всех } x \in D.$$

Как известно, $f(x)$ квазивыпуклая функция. Тогда условия глобальной оптимальности записываются в виде :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i}f_2(x)-\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_i}f_1(x)\right)\frac{(x_i-y_i)}{f_2^2(x)}\geq 0 \text{ выполняется для всех} y\in E_{f(z)}(f) \text{ и } x\in D.$$

Рассмотрим специальный случай задачи (3.1):

$$f(x) \longrightarrow \min, \quad x\in D, \tag{3.5}$$

где $f: \ R^n \rightarrow R$ непрерывна дифференцуемая и выпуклая функция, и D произволтный компакт на R^n.

В этом случае, условие (3.3.) теорема 3.1 можно ослабить с помошъю следующего утверждения.

Теорема 3.3 Предположим, что z есть глобальное решение задачи (3.5). Тогда

$$\langle f'(x), x-y\rangle \geq 0 \text{ выполняется для всех } y\in E_{f(z)}(f) \text{ и } x\in D. \tag{3.6}$$

Если, дополнительно

$$\min_{x\in D}\|f'(x)\|>0 \tag{3.7}$$

выполняется, тогда условия (3.6) является достаточным.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что z есть решение задачи (3.5). Рассмотрим точки $x\in D$ и $y\in E_{f(z)}(f)$. Тогда в силу выпуклости f, мы имеем

$$0\geq f(z)-f(x)=f(y)-f(x)\geq \langle f'(x), y-x\rangle.$$

Достаточность. Предположим от противного. Пусть условие (3.6) выполняется и существует точка $u\in D$ такая, что

$$f(u)<f(z).$$

Ясно, $f'(u)\neq 0$ в силу (3.11). Для $\alpha>0$ определим u_α как:

$$u_\alpha = u+\alpha f'(u).$$

Так как f выпукла, то мы имеем

$$f(u_\alpha) - f(u) \geq \langle f'(u), u_\alpha - u \rangle = \alpha \|f'(u)\|^2,$$

которое влечёт

$$f(u_\alpha) \geq f(u) + \alpha \|f'(u)\|^2 > f(u).$$

Находим $\alpha = \bar{\alpha}$ такой, что

$$f(u) + \bar{\alpha} \|f'(u)\|^2 = f(z),$$

Следовательно,

$$\bar{\alpha} = \frac{f(z) - f(u)}{\|f'(u)\|^2} > 0.$$

Таким образом мы получаем

$$f(u_{\bar{\alpha}}) \geq f(u) + \bar{\alpha} \|f'(u)\|^2 = f(z) > f(u).$$

Определим функцию $h : R^+ \to R$ как

$$h(\alpha) = f(u + \alpha f'(u)) - f(z),$$

где $R^+ = \{\alpha \in R \mid \alpha \geq 0\}$. Очевидно, что h непрерывна на $[0, +\infty)$. Заметим, что $h(\bar{\alpha}) \geq 0$ и $h(0) < 0$. Рассмотрим два случая относительно значения $h(\bar{\alpha})$.

Случай a: $h(\bar{\alpha}) = 0$ (или $f(u + \bar{\alpha} f'(u)) = f(z)$), тогда

$$\langle f'(u), u - u_{\bar{\alpha}} \rangle = -\langle f'(u), \bar{\alpha} f'(u) \rangle = -\bar{\alpha} \|f'(u)\|^2 < 0,$$

которая противоречит (3.10).

Случай b: $h(\bar{\alpha}) > 0$ и $h(0) < 0$. Поскольку h непрерывна, то существует $\alpha_o \in (0, \bar{\alpha})$ такой, что $h(\alpha_o) = 0$ (or $f(u + \alpha_o f'(u)) = f(z)$). Тогда мы имеем

$$\langle f'(u), u - u_{\alpha_o} \rangle = -\alpha_o \|f'(u)\|^2 < 0,$$

и мы снова приходим к противоречию с (3.6).

Таким образом теорема доказана. ■

Список литературы

[1] Akira Takayama, Mathematical Economics, *Cambridge University Press*, 1985.

[2] Brigitte Jaumard., Christophe Meyer and Hoang Tuy., Generalized Convex Multiplicative Programming via Quasiconcave Minimization, *Journal of Global Optimization*, 10, pp.229-256, 1997.

[3] Bulatov, V.P., The Embedding Methods in Extremum Problems, *Nauka*, Novosivirsk, 1977.

[4] Dixit, A.K., Optimization in Economic Theory, *Oxford University Press*, 1976.

[5] Donald W. Katzner, Static Demand Theory, *Macmillian*, London, 1970.

[6] Donald W. Katzner, Walrasian Microeconomics, *Addison-Wesley*, New-York, 1988.

[7] Enkhbat, R., An Algorithm for Maximizing a Convex Function over a Simple Set, *Journal of Global Optimization*, 8, pp.379-391, 1996.

[8] Harold P. Benson., An Outcome Space Branch and Bound-Outer Approximation Algorithm for Convex Multiplicative Programming, *Journal of Global Optimization*, 15, pp.315-342, 1999.

[9] Hiriart-Urruty, J.B., From Convex Optimization to Nonconvex Optimization, *Nonsmooth Optimization and Related Topics*, Plenum, pp.219-239, 1989.

[10] Hiriart-Urruty, J.B. and Ledyaev, J.S., A Note on the Characterization of the Global Maxima of a (tangentially) Convex Function over a Convex Set, *Journal of Convex Analysis*, 3(1), pp.55-61, 1996.

[11] Horst, R., On the Global Minimization of a Concave Function: Introduction and Servey, *Operations Research Spectrum*, 6, pp.195-200, 1984.

[12] Horst, R., A General Class of Branch and Bound Methods in Global Optimization with some New Approaches for Concave Minimization, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 51, pp.271-291, 1986.

[13] Horst, R., Outer Cut Methods in Global Optimization, *Springer- Verlag* Lecture

Notes in Economics and Mathematical Systems, 304, pp.28-40, 1987.

[14] Horst, R., Thoai, N.V. and Tuy, H., Outer Approximation by Polyhedral Convex Sets, *Operations Research Spectrum*, 9(3), pp.153-159, 1987.

[15] Horst, R., A New Branch and Bound Approach for Concave Minimization Problems, *Springer- Verlag* Lecture Notes in Computer, Science, 41, pp.330-337, 1987.

[16] Horst, R. and Tuy, H., Global Optimization(Deterministic Approaches), *Springer*, Berlin, 1990.

[17] James M. Henderson and Richard E. Quandt, Microeconomic theory: A Mathematical Approach, *McGraw-Hill*, 1971.

[18] Kantorovich, L.V., On an Effective Method for Solving some Classes of Extremum probelms , *Soviet Math.Doklady*, 28(3), pp.212-215, 1940.

[19] Konno, H. and Kuno, T., Multiplicative Programming Problems, *in Horst and Pardalos, eds., Handbook of Global Optimization*, Kluwer Dordrecht, pp.369-405, 1995.

[20] Michael D. Intriligator, Mathematical Optimization and Economic Theory, *Prentice-Hall*, 1971.

[21] Pardalos, P.M. and Rosen, J.B, Constrained Global Optimization: Algorithms and Applications, *Springer- Verlag* Lecture Notes in Computer, Science, 1987.

[22] Pardalos, P.M. and Rosen, J.B, Methods for Global Concave Minimization: A Bibliographic Survey, *SIAM Review*, 28, pp.367-379,1986.

[23] Paul Madden, Concavity and Optimization in Microeconomics, *Oxford University Press*, 1986.

[24] Rockafellar, R.T., Convex Analysis, *Princeton University Press*, Princeton, 1970.

[25] Roy Weintraub, E., Mathematics for Economists, *Cambridge University Press*, 1982.

[26] Schaible, S. and Ibaraki, T., Invited Review: Fractional programming, *European*

J. of Operational Research, 12, pp.325-338, 1983.

[27] Strekalovsky, A.S., On the Global Extremum Problem, *Soviet Math.Doklady*, 292(5), pp.1062-1066, 1987.

[28] Strekalovsky, A.S., Global Optimality Conditions for Nonconvex Optimization, *Journal of Global Optimization* , 12, pp.415-434, 1998.

[29] Tuy, H., Concave Programming under Linear Constraints, *Soviet Math.Doklady*, 159(1), pp.32-35, 1964.

[30] Tuy, H., Normal Conical Algorithm for Concave Minimization over Polytopes, *Mathematical Programming*, 51, pp.229-245, 1991.

[31] Varian, H.R., Microeconomic Analysis, *Norton*, New-York, 1984.

[32] Vasiliev, O.V., Optimization Methods, *World Federation Publishers*, Atlanta, 1996.