# Оптимальное управление в непрерывных моделях однородной популяции животных пастбищного хозяйства

Халтар. Д [1], Анхбаяр. Г [2]
[1] Математикийн хїрээлэн
[2] МУИС-ийн Улаанбаатар сургууль

## 1. Общая схема для непрерывных моделей.Задача с линейной функцией воспроизводства

В математической экологии широкое развитие получили качественные исследования и проблемы управления в непрерывных моделях динамики биомассы(численности) сообщества [1]. Исследования разнообразных режимов оптимального управления в непрерывных моделях для однородной популяции проведены в работах Кларка и Абакумова [1, 2]. В них, в частности, исследуются задачи оптимального управления следующего вида

$$\int_0^T u(t)x(t)dt \to sup; \tag{1.1}$$

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) - u(t)x(t), \tag{1.2}$$

$$x(0) = x^0, 0 \le u(t) \le \bar{u}, \tag{1.3}$$

где $x(t)$-численность или биомасса популяции в момент времени $t$, $u(t)$- интенсивность сбора урожая, $g(x)$-скорость воспроизводственного процесса эксплуатируемой популяции. Применительно к пастбищному хозяйству, разводящему однородную популяцию животных мы будем рассматривать следующую модель

$$\int_0^T [f^1(u(t), x(t)) + f^2(u(t), x(t)) - \beta(t)v(t)]dt \to sup; \tag{1.4}$$

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) - u(t)x(t) + v(t), \tag{1.5}$$

$$x(0) = x^0, 0 \le u(t) \le \bar{u}, 0 \le v(t) \le v_{max}, \tag{1.6}$$

где $x(t)$-численность или биомасса животных в момент времени $t$, $u(t)$- интенсивность элиминирования, $v(t)$-интенсивность покупки, $g(x)$ -скорость воспроизводственного процесса животных для данного хозяйства, $f^1(u, x), f^2(u, x)$-соответственно функции доходов от потребления продукции элиминированных особей и от использования продукции живых особей, $\beta(t) > 0$-покупочная цена. Если в (1.2) функция $g(x)$ определяется естественным отбором в результате внутрипопуляционной борьбы за ресурсы, то функции $f^1(x), f^2(x), g(x)$ в (1.5) определяются возможностью потенциалом трудовых и материальных ресурсов, пастбищных площадей,имеющихся в расположении данного хозяйства.

В данной работе мы будем рассматривать функции вида: $f^1(u, x) = ux, f^2(u, x) = f^2(\frac{\bar{u}-u}{\bar{u}}, x)$ или $f^2(u, x) = f^2(x)$. Что касается функции $f^2()$ и $g()$, то их будем считать вогнутыми и удовлетворяющими условиям $f^2(0) = g(0) = 0, (f^2(x))'_{x=0} > 0, g'_{x=0}(x) > 0$. Запись $f^2(x)$ фиксирует тот факт, что каждая особь используется живой, независимо от того, будет ли она элиминирована, а запись $f^2(\frac{\bar{u}-u}{\bar{u}}, x)$ означает, что интенсивность использования продукции живых особей уменьшается за счет увеличения интенсивности элиминирования особей.Условия $(f^2(0))' >$

$0, g'(0) > 0$ гарантируют, что рост доходов от живых особей и рост численности при отсутствии элиминирования обеспечены для малой численности животных. Ясно, что чисто математически задача $(1.4) - (1.6)$ более общая чем задача $(1.1) - (1.3)$, так, что мы будем обобщать результаты работ $[1, 2]$ в том или ином направлении.

Основной метод исследования оптимальных траекторий проводится следующем образом: сначала применяется принцип максимума Понтрягина, затем с помощью фазовых картин экстремалей установливаются свойства оптимальных траекторий.

Теперь рассмотрим случай, когда $g(x)$- линейная функция, $f^2(x)$-дважды непрерывно дифференцируемая, строго вогнутая функция, имеющая единственную точку максимума $\bar{x}$ и покупка отсутствует: $v_{max} = 0$. В практическом отношении такая ситуация характерна для хозяйства, направляющего основные усилия на обеспечение линейного роста численности животных и за счёт этого неуспеющего получить неотрицательный чистый доход при большой численности. Таким образом мы имеем следующую задачу оптимального управления

$$\int\limits_0^T (u(t)x(t) + f(x(t)))dt \to sup; \tag{1.7}$$

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - u(t)x(t), \tag{1.8}$$

$$x(0) = x^0, 0 \le u(t) \le \bar{u}. \tag{1.9}$$

**Теорема 1**: Пусть функция $f(x) = f^2(x)$ удовлетворяет перечисленным выше свойствам и $\bar{u} > \alpha > 0$. Тогда для оптимального управления $u(t)$ верны формулы. При $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) \ge -\alpha$,

$$u(t) = \begin{cases} 0 \quad , \quad 0 \le t < \tau, \\ \bar{u} \quad , \quad \tau \le t \le T. \end{cases}$$

При $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) < -\alpha$,

$$u(t)=\begin{cases} 0 & , \quad 0 \le t < \theta, x^0 < x^*_\alpha, \\ \alpha x^*_\alpha & , \quad \theta \le t \le \tau, \\ \bar{u} & , \begin{cases} t \in [0,\theta) \cup (\tau, T] & , \quad x^0 > x^*_\alpha, \\ \tau < t \le T & , \quad x^0 > x^*_\alpha, \end{cases} \end{cases}$$

где $f'(x^*_\alpha) = -\alpha, 0 \le \theta < T, \theta \le \tau < T$. Если $T$ достаточно большое число, то $\theta < \tau$.

**Доказательство:** Использование принципа максимума Понтрягина приводит к максимизации гамильтониана [3]

$$H = ux + f(x) + \psi(\alpha x - ux), \tag{1.10}$$

где $\psi$ определяется уравнением

$$\dot{\psi}(t) = \psi(t)(-\alpha + u(t)) - u(t) - f'(x(t)) \tag{1.11}$$

с граничным условием $\psi(T) = 0$. Максимизация функции (1.10) приводит к условию

$$u(t)=\begin{cases} 0 & , \quad \psi(t) > 1, \\ [0,\bar{u}] & , \quad \psi(t) = 1, \\ \bar{u} & , \quad \psi(t) < 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Исследуем фазовой портрет экстремальных линий системы уравнений (1.8) и (1.11), когда функция $u(t)$ удовлетворяет формулам из (1.12). В силу строгой вогнутности функции $f(x)$ и выполнения условия $\bar{u} > \alpha > 0$, $\psi = -\frac{f'(x)}{\alpha}$ возрастающая вогнутая функция,а $\psi = \frac{\bar{u}+f'(x)}{\bar{u}-\alpha}$, убывающая выпуклая функция.Они пересекаются в единственной точке $x^*_\alpha$, если существует конечная точка $x^*_\alpha: \ f'(x^*_\alpha) = -\alpha$. Принимая во внимание то, что эти функции являются изоклинами уравнения (1.11) со условием (1.12) соответственно в областях $\psi > 1$ и $\psi < 1$, а изоклиной уравнения (1.8) является ось $x = 0$.

Согласно принципу максимума Понтрягина должно выполняться условие $\psi(T) = 0$. Учитывая это обстоятельство мы из видов фазовых картин сможем заключить, что структура оптимальных траекторий, сформулированная в теореме 1 выполняется. Ясно, что при выполнении условия $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) < -\alpha$ и при том, что отрезок $[0, T]$ достаточно большой, оптимальная траектория обязательно проходит через точку $(x^*, 1)$ и остановится в ней достаточно долго.Условие $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) < -\alpha$ означает, что рассматриваемое хозяйство терпет большие убытки при выработке или получении продукции от живых особей, когда количество животных достаточно большое.

## 2 Случай с линейными продукционными функциями

$1^o$. Пусть функция $f^1(u, x)$ и $f^2(\frac{\bar{u}-u}{\bar{u}}, x)$ линейны и ставится следующая задача максимазации доходов за период времени $[0, T]$ :

$$\int\limits_0^T (u(t)x(t) + \alpha(\bar{u} - u(t))x(t))dt \to Sup; \tag{2.1}$$

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) - u(t)x(t) \tag{2.2}$$

$$x(0) = x^0, 0 \le u(t) \le \bar{u}, -\infty < \alpha < \infty \tag{2.3}$$

где $g(x)$ строговогнутая, дважды непрерывно дифференцируемая унимодельная функция, такая что $g'(0) > 0, g(0) = 0$. Параметер $\alpha$ является показателем доходности данного хозяйства в смысле выработки продукции.

Например условие $\alpha < 0$ означает убыточность хозяйства при получении продукции от живых особей, что характерно для хозяйств, разводящих крупнорогатых чисто мясного направления. В последнее время в нашей стране резко сохрашается численность таких прекрасных животных, как двух-горбатые верблюды, что связано с довольно низкой ценой на шерсть и с тем, что они практически перестали использоваться как транспортное средство, что в свою очередь говорит об явной отрицательности параметра $\alpha$.

Решение задачи (2.1) – (2.3) при $\alpha \geq 1$ очевидно. В этом случае управление $u(t) \equiv 0$ дает абсолютный минимум, так как экстремальные траектории сверху вниз пересекают абцисс $\psi = 0$,который является нижней границией векторного поля с постоянным управлением $u(t) = 0$.Как и в предыдушем случам напишем гамильтанион для этой задачи

$$H = \psi(g(x) - ux) + ux + \alpha(\bar{u} - u)x \tag{2.4}$$

Применение принципа максимума Понтрягина приводит к следующим соотношениям

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(x(t)) - u(t)x(t) & (2.5) \\ \dot{\psi}(t) = -\psi(t)g'(x(t)) - \alpha\bar{u} + (\psi(t) - 1 + \alpha)u(t) & (2.6) \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \psi > 1 - \alpha \\ 0 \leq u(t) \leq \bar{u} & , \quad \psi = 1 - \alpha \\ \bar{u} & , \quad \psi < 1 - \alpha \end{cases} \tag{2.7}$$

с граничными условиями $x(0) = x^0, \psi(T) = 0$. Сначала определим подмножество значений из области $\alpha < 1$, где возможно оптимальное стационарное состояние $(x(\alpha), \psi(\alpha) = 1 - \alpha)$ системы (2.5) – (2.7). Если для $\alpha$ существует стационарное состояние, то должны выполняться соотношения $u_\alpha = \frac{g(x^*_\alpha)}{x^*_\alpha}, 0 \leq \frac{g(x^*(\alpha))}{x^*(\alpha)}, g'(x^*(\alpha)) = \frac{-\alpha\bar{u}}{1-\alpha}$. Вообще хозяйство должно быть в состоянии уменьшить численность своего скота применяя максимальную интенсивность потребления $\bar{u}$ при любой численности животных. Для этого достаточно выполнение условия $g(x) \leq \bar{u}x$ для $\forall x > 0$, что в силу свойства функции $g(x)$ равносильно условию $\bar{u} \geq g'(0) > g'(x)$ для $\forall x > 0$. Поэтому управление $u(\alpha)$,соответствующее стационарному состоянию $(x(\alpha) > 0, 1 - \alpha)$ всегда меньше чем $\bar{u}$. Чтобы оно было неотрицательным, необходимо чтобы выполнялось условие $g(x(\alpha)) \geq 0$ или $g'(x^*(\alpha)) = \frac{-\alpha\bar{u}}{1-\alpha} \geq g'(\hat{x})$, где $g(\hat{x}) = 0$. С другой строны,чтобы $x(\alpha)$ было положительным, необходимо

$g'(x^*(\alpha)) = \frac{-\alpha\bar{u}}{1-\alpha} < g'(0)$. Таким образом если $\alpha$ принадлежит полу отрезку $0 > \frac{-g'(0)}{\bar{u}-g'(0)} < \alpha \leq \frac{-g'(\hat{x})}{\bar{u}-g'(\hat{x})} < 1$, то возникает стационарное состояние оптимального управления $u(\alpha)$ и соответствующее ему значение фазовой переменной $x(\alpha)$ за некоторый промежуток времени, когда $T$ достаточно большое число. При этом $x(t) = x^*_\alpha, u(t) = u(\alpha) = \frac{g(x^*(\alpha))}{x^*(\alpha)}$, где $g'(x^*(\alpha)) = \frac{-\alpha\bar{u}}{1-\alpha}$.

**Теорема 2** Пусть $\bar{u} > g'(0)$, где $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая строговогнутая функция, удовлетворяющая условиям: $g'(0) > 0, g(0) = g(\hat{x}) = 0, g'(\bar{x}) = 0$, где $\bar{x} < \hat{x}$. Тогда оптимальния управления $u_\alpha(t)$ в задаче $(2.1)-(2.3)$ выражаются следующими формулами:

1. $u_\alpha(t) = 0$ для $\alpha \geq 1$ и $u_\alpha(t) = \bar{u}$ для $\alpha \leq \frac{-g'(0)}{\bar{u}-g'(0)}$
2. При $\frac{-g'(0)}{\bar{u}-g'(0)} < \alpha < 1$ верна формула

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq \theta_\alpha x(0) < x^*_\alpha \\ \frac{g(x^*(\alpha))}{x^*(\alpha)} & , \quad \theta_{alpha} < t \leq \tau_\alpha \\ \bar{u} & , \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq \theta_\alpha \ , \ x(0) \geq x^*_\alpha \quad \alpha \leq \frac{-g'(\hat{x})}{\bar{u}-g'(\hat{x})} \\ \tau_\alpha < t \leq T \end{cases} \end{cases}$$

где $\theta_\alpha = \tau_\alpha < T$ для $\alpha > \frac{-g'(\hat{x})}{\bar{u}-g'(\hat{x})}$ и для $\alpha = \frac{-g'(\hat{x})}{\bar{u}-g'(\hat{x})}$ при $x(0) < \hat{x}$; $\quad x^*_\alpha : \ g'(x^*_\alpha) = \frac{-\alpha\bar{u}}{1-\alpha}$.

Выражение $\frac{-\alpha\bar{u}}{1-\alpha}$ при $0 \leq \alpha \leq \frac{-g'(x)}{\bar{u}-g'(x)}$ принимает отрицательные значения, следовательно $x^*_\alpha \geq \bar{x}$, а при $\frac{-g'(0)}{\bar{u}-g'(0)} < \alpha < 0$ положительные значения значит $x^*_\alpha < \bar{x}$. В последные годы численность коз увеличивается максимальными темпами, что связано с резким увеличением цен на козиную пуху, что говорит о выполнения условия $\alpha \geq 1$. Некоторая стабилизация численности овец говорит о выполнении условия $\frac{-g'(0)}{\bar{u}-g'(0)} < \alpha \leq \frac{-g'(\hat{x})}{\bar{u}-g'(\hat{x})}$. Здесь, видимо сказывается то обстоятельство, что цены на мясо и шкуру достаточно высокие .

$2^0$. Теперь также рассмотрим задачу максимизации доходов с линейной функцией продукции: $f^2(x) = \alpha x, (-\infty < \alpha < \infty)$. Принципиальное различие от предыдущей модели состоит лишь в том, что здесь каждая особь используется живой, независимо от того, будет ли она элиминирована. Итак мы имеем следующую задачу оптимизации

$$\int_0^T (u(t)x(t) + \alpha x(t))dt \to Sup; \tag{2.8}$$

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) - u(t)x(t) \tag{2.9}$$

$$x(0) = x^0,\ 0 \leq u(t) \leq \bar{u} \tag{2.10}$$

Наложим на функцию $g(x)$ такие же условия,как в теореме 2. Гамильтониан в этой задача имеем вид:

$$H = \psi(g(x) - ux) + ux + \alpha x \tag{2.11}$$

Необходимые условия для оптимального процесса $(x(t), u(t))$ в форме принципа максимума Понтрягина выражаются соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(x(t)) - u(t)x(t) \\ \dot{\psi}(t) = -\psi(t)(g'(x(t)) - u(t)) - u(t) - \alpha \end{cases} \tag{2.12}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \psi > 1 \\ 0 \leq u(t) \leq \bar{u} & \psi = 1 \\ \bar{u} & \psi < 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

где выполняются граничные условия $x(0) = x^0, \psi(0) = 0$. Если система (2.2.12) имеет стационарное состояние $x^*_\alpha > 0$ при $\psi = 1$ то должно выполняться условие $-g'(0) < \alpha \leq -g'(\hat{x})$. Далее используем схему доказательства предыдущей теоремы, а именно сначала построим фазовые картины для случаев $-g'(0) < \alpha \leq -g'(\hat{x}), \alpha > -g'(\hat{x}), \alpha \leq -g'(0)$, затем проводим качественные исследования экстремальных траекторий,виды которых в для некоторых случаяв показаны на фазовом портрете.

Думаю, читателю не составит труда эти исследования провести самостоятельно.В результате получим следующую теорему о структуре оптимальных управлений в зависимости от значений параметра $\alpha$.

**Теорема 3** Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условию предыдущей теоремы. Тогда оптимальные управления $u_\alpha(t)$ в задаче (2.12) – (2.13) удовлетворяют условиям

1.$\alpha \leq -g'(0)$. В этом случае $u_\alpha(t) = \bar{u}$.

2.При $-g'(0) \leq \alpha$ верна формула

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \theta_\alpha \quad x(0) < x^*_\alpha \\ \frac{g(x^*_\alpha)}{x^*_\alpha} & \theta_\alpha < t \leq \tau_\alpha \\ \bar{u} & \begin{cases} 0 \leq t \leq \theta_\alpha \quad x(0) \geq x^*_\alpha \quad \alpha \leq -g'(\hat{x}) \\ \tau_\alpha < t \leq T \end{cases} \end{cases}$$

где $\theta_{alpha} = \tau_\alpha < T$ для $\alpha > -g'(\hat{x})$ и для $\alpha = -g'(\hat{x})$ при $x(0) < \hat{x}$; $\quad x^*_\alpha : \quad g'(x^*_\alpha) = -\alpha$.

Теперь проводим сравнительный анализ между оптимальными процессами $(x^*_{1\alpha}(t), u^*_{1\alpha}(t))$ и $(x_{2\alpha}{}^*(t), u_{2\alpha}{}^*(t))$ фигурующих в теоремах (2.1) и (2.2), соответствующих функционалам
$\Phi_{1\alpha}(u) = \int\limits_0^T (u(t)x(t)+\alpha(1-\frac{u(t)}{\bar{u}})x(t))dt = \int\limits_0^T (u(t)x(t)+\frac{\alpha}{\bar{u}}(\bar{u}-u(t))x(t))dt$ и $\Phi_{2\alpha}(u) = \int\limits_0^T (u(t)x(t)+\alpha x(t))dt.$

**Следствие 1** Пусть $(x^*_{1\alpha}(t), u^*_{1\alpha}(t))$ и $(x^*_{2\alpha}(t), u^*_{2\alpha}(t))$ соответственно оптимальные процессы для функционалов $\Phi_{1\alpha}(u)$ и $\Phi_{2\alpha}(u)$ в задачах (2.2.1)–(2.2.3) и (2.2.12)–(2.2.13). Тогда $\Phi_{10}(u^*_{10}) = \Phi_{20}(u^*_{20}), \Phi_{1\alpha}(u^*_{1\alpha}) > \Phi_{2\alpha}(u^*_{2\alpha})$ при $\alpha < 0$ и $\Phi_{1\alpha}(u^*_{1\alpha}) < \Phi_{2\alpha}(u^*_{2\alpha})$. при $\alpha > 0$.

Действительно,если $(u(t), x(t))$ некоторый допустимые процесс, то $\Phi_{1\alpha}(u) - \Phi_{2\alpha}(u) = -\alpha \int\limits_0^T \frac{u(t)}{\bar{u}} x(t)dt$. С другой стороны, оптимальный процесс $u^*_{2\alpha}$ задачи (2.2.12-2.2.14) является допустимым процессом задачи (2.2.1-2.2.3), то должно выполняться неравенство $\Phi_{1\alpha}(u^*_{1\alpha}) > \Phi_{1\alpha}(u^*_{2\alpha})$ . Поэтому $\Phi_{1\alpha}(u^*_{1\alpha}) - \Phi_{2\alpha}(u^*_{2\alpha}) \geq \Phi_{1\alpha}(u^*_{2\alpha}) - \Phi_{2\alpha}(u^*_{2\alpha}) = -\alpha \int\limits_0^T \frac{u^*_{2\alpha}(t)}{\bar{u}} x^*_{2\alpha}(t)dt$. Так как $\forall\alpha \quad \tau_\alpha < T$ и $u^*_{2\alpha}(t) > 0$ для $t \in (\tau_\alpha, T]$, значит, выполняется условие $\int\limits_0^T u^*_{2\alpha}(t)x^*(t)dt > 0$, что доказывает утверждение следствия 2.1.

Это следствие в практическом отношении показывает, что хозяйству при $\alpha > 0$ выгодно использовать продукцию всех особей, а при $\alpha < 0$ нужно использовать продукции тех живых особей, которых можно было элиминировать в данный момент, но они не подвергались ни к забою, ни к продаже.

## Список литературы

[1] Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла.-М.:Наука, 1979, 165 с.

[2] Clark C.W. Bioeconomic modelling and fisheries management.- N.Y.:Wiley Intersc.Pub., 1985.p. 291.

[3] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.-М.: Физматгиз, 1976, 392 с.