О критерии ограниченности оператора Харди в пространстве Орлича

Жамсранжав Даваадулам
Кафедра математического анализа, Монгольский Государственный Университет
И-мэйл: davaadulam@num.edu.mn

Абстракт
В работе приведен критерий ограниченности одного оператора типа Харди в весовом пространстве Орлича.

Ключевые слова: критерий ограниченности, оператор типа Харди, весовое пространство Орлича

1 Весовое пространство Орлича

Определение 1.1. *Пусть* $\phi : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ *возрастающая, непрерывная справа функция, для которой* $\phi(0) = 0$. *Предположим, что на* $(0, +\infty)$ *функция не тождественно равно нулю или бесконечности. Тогда функция*

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(t)dt \tag{1.1}$$

называется функцией Юнга.

Отметим, что функции Юнга выпуклы.

Говорят, что функция Юнга Φ удовлетворяет Δ_2 условию ($\Phi \in \Delta_2$), если найдется число $c > 0$ такое, что для любых $s \in (0, \infty)$ выполнены неравенства

$$\Phi(2s) \le c\Phi(s) < \infty. \tag{1.2}$$

Пусть далее ν неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$, для которой

$$0 < V(x) = \int_0^x \nu(t)dt. \tag{1.3}$$

Определение 1.2. *Весовое пространство Орлича* $L_{\Phi,\nu}$ *состоит из всех измеримых функций* $g : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, *для которых конечна следующая норма*

$$\|g\|_{\Phi,\nu} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^\infty \Phi(\lambda^{-1}|f(x)|)\nu(x)dx \le 1 \right\}. \tag{1.4}$$

Норма называется конечной нормой Люксембурга.

Пространство Орлича может быть нелинейным. Но оно является выпуклым множеством. Нелинейность некоторого пространства Орлича объясняется слишком быстрым ростом его функции Юнга. Для линейности пространства Орлича необходимым и достаточным является условие Δ_2. При $\Phi \in \Delta_2$ и $V(t) = t$ пространство $L_{\Phi,\nu} = L_\Phi$ является перестановочно-инвариантным пространством.(см. [5])

Введем идеальное пространство $F = L_{\Phi,\nu} \cap L_\infty$. Норма в нем задается соотношением

$$\|g\|_F = \|g\|_{\Phi,\nu} + \|g\|_\infty. \tag{1.5}$$

Функцией гладкости пространства F является

$$w(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_F = 1 + \|\chi_{(0,t)}\|_{\Phi,\nu} = 1 + \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{V(t)}\right)}. \tag{1.6}$$

2 Дискретизация нормы пространства Орлича на конусе убывающих функций

Пусть

$$\Omega = \left\{ g \in L_{\Phi,\nu} : 0 \le g(t) \downarrow, g(+0) = \lim_{t \to +0} g(t) < \infty \right\} \tag{2.1}$$

конус ограниченных, убывающих, неотрицательных функций из пространства Орлича.

Символом $\sim$ будем обозначать эквивалентность двух величин.

Например, соотношения

$$a_k \sim b_k \quad \text{или} \quad \varphi(x) \sim \psi(x)$$

означают, что найдутся позитивные числа c_1 и c_2 такие, что для допустимых дискретных переменных k или непрерывных переменных x выполнены соотношения

$$c_1 a_k \le b_k \le c_2 a_k \quad \text{или} \quad c_1\varphi(x) \le \psi(x) \le c_2\varphi(x),$$

где $\{a_k\}, \{b_k\}$ неотрицательные последовательности и φ, ψ неотрицательные функции.

Пусть $b = \sqrt{a} > 1$. Фиксируем $T > 0$ из условия $\omega(T) = b$ и составим последовательность $\{\mu_m\}_{m=0}^{\infty}$ следующим образом

$$\omega(\mu_m) = b^m, \ m \in N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

Тогда

$$0 = \mu_0 < \mu_1 = T < \mu_2 < \cdots, \lim_{m\to\infty} \mu_m = \infty$$

Теорема 2.1. *Пусть $g \in \Omega$ и $\Phi \in \Delta_2$. Тогда*

$$\|g\|_F \sim \|\{g(\mu_m)\}\|_{l_{\Phi,\nu}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \sum_{m=0}^{\infty} \Phi(\lambda^{-1}g(\mu_m))\nu_m \le 1\right\}, \tag{2.2}$$

где $\nu_m = \frac{1}{V(b^{-m})}$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Краткое доказательство. Пусть

$$J_\lambda(g) = \int_0^\infty \Phi(\lambda^{-1}g(x))v(x)dx;\ 0 \le g \downarrow$$

В силу того, что g убывает и Φ возрастает

$$J_\lambda(g) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mu_m}^{\mu_{m+1}} \Phi(\lambda^{-1}g(x))dx \le \Sigma\Phi(\lambda^{-1}g(\mu_m))(V(\mu_{m+1}) - V(\mu_m))$$

Можно показать, что

$$V(\mu_{m+1}) - V(\mu_m) \approx \frac{1}{\Phi(b^{-m})} \equiv \nu_m$$

Отсюда и из Δ_2-условия получим

$$J_\lambda(g) \approx \sum_{m=0}^{\infty} \Phi(\lambda^{-1}g(\mu_m))\nu_m$$

Отсюда следует

$$\|g\|_F \approx \inf\left\{\lambda^{-1} : \sum_{m=0}^{\infty} \Phi(\lambda^{-1}g(\mu_m))\nu_m \le 1\right\} \equiv \|\{g(\mu_m)\}\|_{L_{\Phi y}}$$

3 Критерий ограниченности оператора типа Харди в пространстве Орлича.

Пусть $E = E(\mathbb{R}^n)$ перестановочно-инвариантное пространство. Напомним, что банахово функциональное пространство является перестановочно-инвариантным пространством, если норма в нем монотонна относительно перестановок: (см. [5])

$$g^* \le f^*, f \in E \quad \Rightarrow \quad g \in E, \|g\|_E \le \|f\|_E.$$

Определение 3.1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ измеримое множество и $\mu(G) = t$ его лебеговая мера. Функция*

$$\varphi_E(t) = \|\chi_G\|_E \tag{3.1}$$

называется фундаментальной функцией пространства E.

Поскольку в перестановочно-инвариантном пространстве норма характеристической функции измеримого множества зависит только от меры множества, фундаментальная функция определяется формулой (3.1) однозначно. Не трудно убедиться в том, что фундаментальная функция неотрицательная, возрастающая и $\varphi_E(0) = 0$. Не умаляя общности можно считать, что функция φ_E вогнутая.

Введем функции

$$\mu_E(t) = \frac{1}{\varphi_E(t^{-1})}; \qquad \psi_E(t) = \mu'_E(t). \tag{3.2}$$

Теорема. *Ограниченность оператора*

$$G[g](t) = \int_t^\infty g(\tau)\mu_E(\tau)d\mu_E(\tau): \qquad \Omega \mapsto F[T,\infty) \tag{3.3}$$

эквивалентно требованию

$$\sup_{t\in(0,\infty)} \frac{\theta(2t)}{\theta(t)} < \infty, \tag{3.4}$$

где $\theta(t) = \mu_E[w^{-1}(t)], \quad t \in (0,\infty)$.

Краткое доказательство.

Пусть $\widetilde{G}[g](t) = G[g](T), t \in (0,T]$; $\widetilde{G}[g](t) = G[g](T), t > T$ Легко проверить, что

$$\|G\| \approx \sup_{g\in\Omega_F} \{\|\widetilde{G}[g]\|_F \cdot \|g\|_F^{-1}\}$$

Используя дискретизационную процедуру можно убедиться в том, что

$$\|G\| \approx \sup_{0\leq g_m\downarrow} \left\{ \|\{\sum_{k=m}^{\infty} g_k\sigma_k\}\|_{L_{\Phi y}} \cdot \|\{g_m\}\|_{L_{\Phi y}}^{-1} \right\}$$

где

$$\sigma_k = \int_{\mu_m}^{\mu_{m+1}} \mu_E(\tau^{-1})d\mu_E(\tau) = \ln[\mu_E(\mu_{k+1}) \cdot \mu_E(\mu_m)^{-1}]$$

Рассмотрим оператор $G(\{g_m\}_{m\in N}) = \{\sum_{k=m}^{\infty}\sigma_k g_k\}$. Нетрудно проверить, что он ограничен на пространствах $l_{l,v}$ и $l_{p,v}$ при условий

$$\sup_{k\in N} = \sup_{k\in N}\ln(\mu(\omega^{-1}(b^{k+1}))\cdot\mu(\omega^{-1}(b^k))^{-1}) < \infty$$

При условий $\Phi\in\Delta_2$ пространство $L_{\Phi y}$ является интерполяционным (см. [4] или [5]) между пространствами $l_{l,v}$ и $l_{p,v}$ при некотором $1 < p < \infty$. Таким образом, при условий (21) оператор G ограничен и на пространстве $L_{\Phi y}$, отсюда и следует ограниченность оператора G на пространстве $L_{\Phi y}$. Достаточность условия доказано.

Необходимость условия доказывается следующим образом. Допустим, что можно случиться $\sup_{k\in N}\{\sigma_k\} = \infty$, когда ограничен оператор G. Тогда мы можем считать, что $\exists m_j \uparrow; \quad \sigma_{m_j} \geq b^j, j = 0,1,2,\ldots$

Введем последовательность

$$g_m = 0, \qquad m \neq m_j; \qquad g_m = b^{-m_j - j}, m = m_j$$

и проверим факт, что $\|\{G(\{g_m\}_{m\in N})\}\|_{L_{\Phi y}} = \infty$, $\|\{\{g_m\}\}\|_{L_{\Phi y}} < \infty$, который противоречит ограниченности оператора G. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Гольдман М.Л., Керман Р., Об оптимальном вложении пространств Кальдерона и обобщенных пространств Бесова, Тр. МИАН.2002

[2] Гольдман М.Л., Керман Р., Принцип двойственности на пространствах Орлича-Лоренца, Сб. докл. международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные оператары. Проблемы математического образования"посвященной 75-летию со дня рождения Л.Д.Кудрявцева, М.Изд.РУДН, 1998. С. 179-183

[3] Берколайко М.З., Овчинников В.И. Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах. Тр.МИАН. 1983. Т161.С.3-17

[4] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М., Интерполяция линейных операторов, М.:Наука, 1978,400с

[5] Bennet C., Sharpley R. Interpolation of operators, Pure and Applied Math., 1988. Vol.129, academic Press, New-York.

[6] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М. Наука. 1977.456 с.