Асуудал ба Шийдэл

Н.Ууганбаатар
Монгол Улсын Их Сургууль, Математик загварчлалын тэмхим

1. Оршил

Агуулгын хувьд математикийн философи, метаматематик, логикийн салбар ухаануудад хамаарах энэхүү өгүүллийн үндсэн зорилго нь, аливаа асуудал болон түүний шийдэл хоёрын хоорондох хамаарлыг судлахад оршино. Гэхдээ тус өгүүлэл нь ийм судалгааны зөвхөн эхлэл төдийхөн бөгөөд үнсдэн зорилгодоо хүрэх болоогүй байгаа юм. Харин дээрх зорилгод хүрсэн тохиолдолд ийм төрлийн судалгаа нь хэд хэдэн чухал ач холбогдолтой юм.

- "Орчин үед хувь хүний өдөр тутмын амьдрал асуудал-шийдлийн дунд өнгөрдөг" гэсэн ерөнхий дүгнэлтийг хүлээн зөвшөөрвөл, асуудал шийдлийн ерөнхий хамаарлыг судлах нь, оюунлаг талаасаа сонирхол татаад зогсохгүй, хүний өдөр тутмын амьдралыг зохицуулахад ач тустай байх болно.
- Аливаа улс орны хөгжлийн түвшин нь асуудал-шийдэл хоёрын харьцаан дээр тодорхойлогддог байж болох талтай; хөгжсөн оронд шийдэл нь давамгайлах бол, хөгжиж буй оронд асуудал нь (ядуурал, бохирдол г.м) давамгайлдаг. Иймд аливаа улс орны хувьд хөгжлийг ойлгох, цаашлаад хөгжих эсэх нь асуудал-шийдлийн хамаарлыг ойлгохоос шууд хамаардаг байх үндэслэлтэй.
- Шинжлэх ухаан, тэр дундаа математикийн шинжлэх ухааныг асуудал-шийдлийн цуглуулга гэж төсөөлж болно. Жишээ нь зарим математикийн түүхчдийн үзэж байгаар газар хэмжих асуудлаас геометр үүдэлтэй бол, тоолох буюу эмхлэх цэгцлэх асуудлаас арифметик үүдэлтэй байна. Иймд шинжлэх ухааны цаашдын

хөгжлийн талаар баримжаа авах, шинжлэх ухааныг таньж ойлгох, үнэ цэнийг нь мэдэрхэд дээрх судалгаа ач тусаа өгөх нь гарцаагүй.
- Асуудал-шийдлийн хамаарлыг тусгайлан судалсан судалгаа буюу шинжлэх ухааны салбар миний мэдэхээр байдаггүй. Иймд дээрх судалгаа нь шинэ төрлийн шинжлэх ухааны салбарын эхлэл болох боломжтой юм.

2. Математик, "Асуудал ба Шийдэл"ийн судлагдахуун болох нь

Нэрт математикч Д.Хилбэрт 1900 онд Парижд "Математикийн Асуудлууд" сэдвээр лекц уншиж, алдарт 23 асуудлаа танилцуулсан. Тэрээр "асуудлууд бол математикийн гол цөм" нь байдаг учраас, хэрэв математикийн шинжлэх ухааны ойрын ирээдүйн хөгжлийг таамаглая гэвэл, "тухайн үед дэвшүүлэгдэн хэлэлцэгдэж буй асуудлуудыг харах нь зүйтэй" гэсэн дүгнэлтэд хүрсэн байдаг. Түүнийхээр бол шийдэгдэх асуудлууд оршин байгаа нь математикийн оршин байхын үндэс бөгөөд, математик асуудлууд ихэнхдээ гадаад ертөнц буюу амьдралын туршлагаас үүдэн гарч, математикчлагдах явцдаа математикчийн буюу хүний оюун санааны оролцоотойгоор баяжих маягаар хөгждөг байна.

Харин математик асуудлуудын шийдэл бол хүнээс буюу математикчаас гарах санаа юм.
Шийдлийн хувьд гол нь локик талаасаа зөв, төгсгөлөг тооны үйлдлүүдээс бүрдэх учиртай гэжээ (Хилбэрт шийдлийн тухай ярихдаа гадаад ертөнцийн талаар огт дурдсангүй).

Хилбэртийн ярианд үндэслэн дараах дүгнэлтүүдэд хүрч болох юм:

1. Математик бол асуудал ба шийдлийн цуглуулга юм.
2. Математик асуудлуудын хувьд юу асуусан нь тодорхой байна; харин шийдэл нь чухам ямар байх нь тодорхойгүй бөгөөд шийдэлд хүрэхдээ зөвшөөрөгдөх тодорхой дүрэмүүдийн дагуу ажилна.

Дээрх дүгнэлтүүдэд үндэслэн, асуудал-шийдлийн хамаарлыг судлахад математик ихээхэн хэмжээний "өгөгдөл" бүрдүүлнэ гэж үзэж болно. Тэр дундаа асуудал, шийдэл, хүн гэсэн хэлхээс нь математикийн асуудал, шийдэл, математикч гэсэн хэлхээсийг дотроо агуулж буй бөгөөд, энэ нь эхний хэлхээсийн талаар мэдээлэл авч болох хамгийн ойрын, бас хамгийн баян эх үүсвэр байх бүрэн боломжтой. Иймд математик нь бүхэлдээ асуудал-шийдлийн судлагдахуун юм.

3. Математик, "Асуудал ба Шийдэл"ийн судлаач болох нь

Асуудал-шийдлийн хамаарлыг олоход математик болон логик аргачлалаар хандах боломжтой юу? Тэр нь тохиромжтой юу?

Эдгээр асуудлуудад тодорхой хариулт одоогоор бидэнд алга. Гэхдээ иймэрхүү хандалт нь ямархуу байх вэ? гэдгийг ойлгохын тулд асуудал-шийдлийн тухай зарим зарчмуудыг математик аргаар томъёолох (аксиомчлох), мөн тэдний тухай зарим логик дүгнэлтүүдэд хүрэхийг оролдъё.

1-р зарчим: Асуудал, шийдэл хоёр нэг дор байдаггүй.

Энэ нь шууд утгаараа “асуудал, шийдэл хоёр нь ялгаатай, адилгүй,” “асуудлаас шийдэлд хүрэхийн тулд тодорхой зайг туулах хэрэгтэй болно” гэсэн зарчим юм. Математик томъёлолын хувьд $A \neq Ш$, $A \cap Ш =$ гэх мэт хувилбарууд байж болно.

2-р зарчим: Асуудал, шийдэл хоёр нь нэгдмэл юм.

Дараах асуудлыг авч үзье:
А.1: Асуудал анхдагч уу, шийдэл анхдагч уу? (Асуудал нь эхлүүлэгч үү? шийдэл нь эхлүүлэгч үү? Асуудал нь чухал уу? шийдэл нь чухал уу?)

Хариулт.1: А.1 өөрөө асуудал учраас, асуудал анхдагч.
Хариулт.2: Байз, байз, Хариулт.1-г зөв гэж үзье. Тэгвэл, “х учраас, асуудал нь анхдагч” гэж дүгнэх чинь өөрөө шийдэл учраас, асуудлын анхдагч байх гарцаагүй нөхцөл нь шийдлийн анхдагч байх юм биш үү?
Хариулт.3: Хариулт.2 их сайн санаа шиг санагдав. Гэхдээ Хариулт.2 чинь өөрөө асуудал дэвшүүлэх маягаар Хариулт.1-г няцааж байна аа даа. Тэгэхээр буцаад асуудал л анхдагч болох тийшээ явчлаа даа.
Хариулт.4: Хариулт.1-3 бүгд сайн санаанууд шиг санагдав. Миний бодлоор та хэдийн энэ яриа төгсгөлөг шатанд тодорхой үр дүнд хүрэх боломжгүй байх. Математикт ийм асуудлууд байдаг бөгөөд математикчид ийм тохиолдлыг боломжгүйн теорем гэж томъёлдог. Үүний жишээнүүд нь Хилбэртийн 2 болон 10-р асуудлууд дээр гарч ирдэг.
Логик болон Компьютерийн шинжлэх ухаанд computability, decidability гэх мэт суурь ойлголтууд байдаг бөгөөд тэднийг судалдаг тусдаа салбар ухаанууд байдаг. Иймд нэгэнт бид дээрх асуудалд төгөсгөлөг алхамд шийдэл олж чадахгүй учир, асуудал-шийдэл хоёр нь нэгдмэл юм гэсэн дүгнэлтээр энэ яриагаа эцэслэе.

3-р зарчим: Асуудлын төгөсгөлгүй чанар.

А нь аль нэг ертөнц дээрх бүх асуудлын олонлог байг. Тухайн ертөнцийн асуудлыг томъёлох хэл (syntax) буюу орчин нь лавлах боломжийг олгодог буюу аливаа юмыг тухайн юм мөн эсэхийг ямагт асуух боломжтой байг. Тэгвэл А нь эсвэл хоосон олонлог, эсвэл төгөсгөлгүй олонлог байна.

Баталгаа: А-г хоосон биш гэе. Тэгвэл а гэсэн дор хаяж нэг асуудал байж таарна. Лавлах операторыг ашиглан а.1: а? буюу Энэ чинь а мөн үү? гэсэн асуудал гаргаж ирье. Энэ маягаар лавлах операторыг төгөсгөлгүй олон удаа давтан ашиглаж болох бөгөөд B={a, a1., a.2, ...} гэсэн дарааалал нь төгөсгөлүй дараалал юм. B нь А-н дэд олонлог учир, А нь төгөсгөлгүй олонлог.

4-р зарчим: Асуудал гүнзгийрэх тусам асуудал, шийдэл хоёрын зай холдоно.

Асуудлууд нь өөр хоорондоо хамааралтай байдаг ертөнц төсөөлье. Тийм орчинд аливаа асуудлын хэр гүнзгий болохыг нь тухайн асуудлаас хамаарах бусад асуудлуудын тоогоор хэмжье. Харин асуудал шийдэл хоёрын зайг ямар нэгэн ээдрээний (complexity) хэмжүүрээр (жишээ нь Колмогоровын ээдрээ, Kolmogorov complexity) хэмжье. Тэгвэл дээрх зарчим нь эдгээр хэмжээсүүд хоорондоо эерэг хамааралтайг хэлж байгаа юм.
Шууд утгаараа бол “асуудал гүнзгийрэх тусам, шийдлийг нь олох хайлт ихсэнэ (уртсана)” гэсэн зарчим юм.

5-р зарчим: Олон юмсыг хамаарах асуудлыг ерөнхий гэе. Тэгвэл асуудал ерөнхий болох
тусам, шийдэл нь тодорхойгүй болно.

4,5-р зарчмууд нь хоорондоо төстэй юм. 5-р зарчимтай холбоотой нэг жишээ дурдъя: Хилбэртийн эхний асуудал буюу Г.Канторын Continuum Hypothesis-г авч үзье. Математикийн сурах бичгүүдэд тайлбарласнаар бол, олонлог нь маш олон юмсыг төлөөлөх ерөнхий ойлголт. Нөгөө талаас Канторын хипотез нь бүх олонлогуудад хамааралтай асуудал. Иймд энэ асуудал нь ерөнхий асуудал. Гэтэл 20-р зуунд К.Гөдел (Kurt Godel) болон П.Кохен (Paul Cohen) зэрэг математикчдийн судалгаа, дээрх асуудлын шийдэл нь Зермело-Франкелийн аксиомчлолын хүрээнд тодорхойгүй болохыг харуулсан. Иймд 5-р зарчим нь дор хаяж математик дахь асуудал-шийдлийн орчинд мөрдөгддөг байх боломжтой юм.

4. Төгсгөлийн үг

Энэхүү бэсрэг өгүүлэл нь дараах үндсэн санаануудыг дэвшүүлсэн болно:

1. Асуудал-Шийдлийн хамаарлыг олох нь сонирхолтой бөгөөд ашиг тустай судалгааны сэдэв юм.
2. Тийм судалгааны хувьд, математикийн шинжлэх ухаан судлагдахуун нь болох бүрэн боломжтой.
3. Тийм судалгааг математик, тэр дундаа логикийн салбар ухаанд түшиглэн явуулбал тодорхой үр дүнд хүрнэ.

Мөн 3 дахь санааг баяжуулах, илүү тодорхой болох үүднээс асуудал-шийдлийн ерөнхий хамаарлуудыг томъёлсон 5 зарчмийг товч танилцуулсан. Эдгээр зарчмуудаас эхний хоёр нь алсдаа асуудал-шийдлийн хамаарлын тухай онолын сууръ аксиомууд болох боломжтой бол, сүүлийн гурав нь тус онолын хүрээнд батлагдах тодорхой үр дүнгүүд болох магадлалтай. Эцэст нь энэ өрүүлэл нь асуудал-шийдлийн хамаарлыг судлах онолын дөнгөж эхлэл, бие халаалт, бэлтгэл ажлийн түвшинд уншигдах учиртайг дахин хэлье. Уншигч таныг өгүүллийн талаарх санаа оноогоо харамгүй хуваалцана гэж найдаж байна.

Ном зүй

[1] Enderton, H,B (2001) A Mathematical Introduction to Logic, Academic Press.
[2] Grattan-Guiness, I (2000) "A sideways look at Hilbert's twenty-three problems of 1900"
Notices of the AMS, 47(7): 752-757.
[3] Hilbert, D (1900) "Mathematical Problems"
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html
[4] Struik, D.J (1987) A Concise History of Mathematics, Dover Publications.
[5] Woodin, W.H (2001) "The Continuum Hypothesis, Part 1,2" Notices of the AMS, 48(6,7):
567-576, 681-690.
[6] Yandell, B.H (2001) The Honors Class: Hilbert's problems and their solvers, AK Peters.